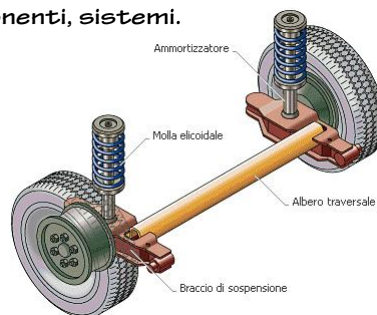




## Stato di sforzo



- ✓ La *Meccanica dei Materiali* si occupa del comportamento di corpi solidi sottoposti all'azione di forze e momenti.
- ✓ Questo comportamento include deformazioni, fratture e separazione di parti, collassi per buckling, effetti di carichi ripetuti nel tempo ed altri fenomeni.
- ✓ Per comodità nel seguito si indicheranno tre classi di corpi: elementi, componenti, sistemi.



1



## Stato di sforzo



Un generico stato di sforzo agente su un componente può essere ricondotto alla combinazione di stati di sforzo semplice:

assiale (trazione o compressione)

taglio

flessione

torsione

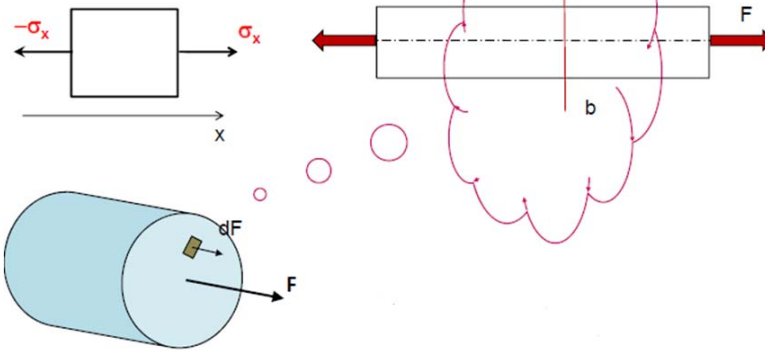
2



### Stato di sforzo: tensione



sforzo assiale: trazione e compressione



$$\sigma = \frac{F}{A}$$

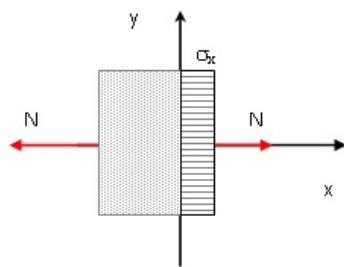
$$\sigma_x = \frac{dF}{dA}$$

$$F = \int_A \sigma_x dA$$

3



### Stato di sforzo: tensione



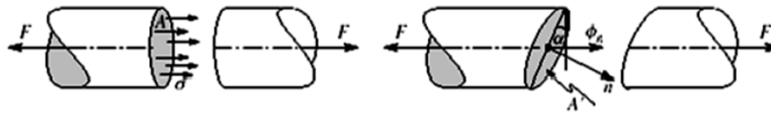
$$\sigma_x = \left[ \frac{N}{mm^2} \right] = [MPa]$$

N.B. : la distribuzione della tensione è uniforme nelle ipotesi di trave rettilinea e nelle sezioni sufficientemente distanti dai bordi (Principio di Saint Venant)

4



### Stato di sforzo: tensione



sforzo normale

$$\sigma_n = \frac{F_n}{A_n}$$

relazione tensione-deformazione nel caso uniassiale (esempio prova di trazione):

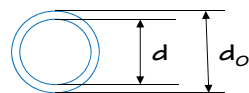
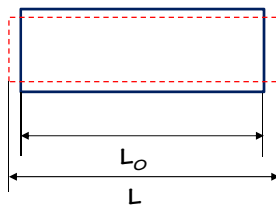
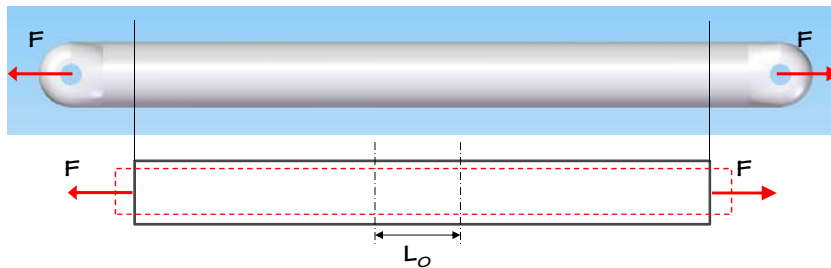
$$\sigma = \varepsilon E$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

5



### Prova di trazione



$A_0$  = area iniziale

$A$  = area corrente

Variazione di lunghezza  $\Delta L = L - L_0$

Variazione di diametro  $\Delta d = d_0 - d$

ASTM E8, EN10002, BS EN ISO 6892-1:2009

6



## Prova di trazione



Tensione normale

$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

Deformazione longitudinale

$$\varepsilon_l = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta L}{l_0}$$

Deformazione trasversale

$$\varepsilon_d = \frac{d - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0}$$

7



## Prova di trazione



Contrazione trasversale:

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$$

(coeff. di Poisson)

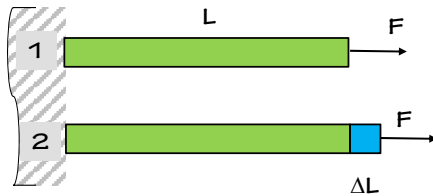
E' controllato dalla tendenza del materiale a mantenere lo stesso volume

Valori tipici per materiali metallici in campo lineare elastico: 0.28-0.34

8



### Trave sollecitata assialmente



Stato di sollecitazione

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Stato di deformazione

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Risposta elastica

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \longrightarrow \Delta L = \varepsilon L \longrightarrow \Delta L = \frac{FL}{EA}$$

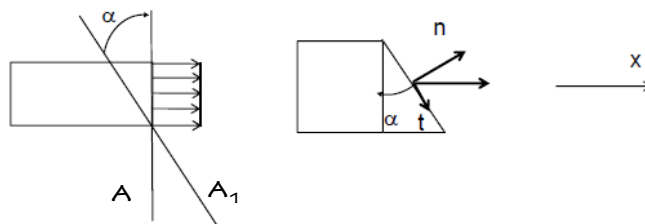
9



### Trave sollecitata assialmente



#### Tensione normale e sforzo di taglio



$$\sigma_x = \frac{P}{A} \quad A_1 = \frac{A}{\cos \alpha} \quad \sigma_n = \frac{N}{A_1} \quad \tau_n = \frac{V}{A_1}$$

$$\sigma_n = \frac{N}{A_1} = \frac{P \cos \alpha}{A} \cos \alpha = \frac{P}{A} \cos^2 \alpha = \frac{P}{A} \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

10



### Trave sollecitata assialmente



$$\sigma_n = -\frac{V}{A_1} \quad \sigma_n = -\frac{P}{A} \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{P}{A} \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

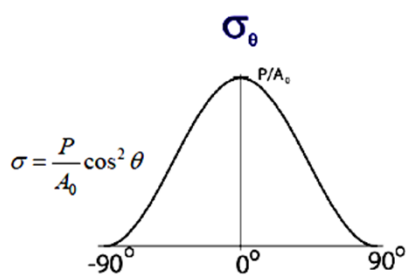
$$\sigma_n = \sigma_x \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$$

$$\tau_n = -\sigma_x \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

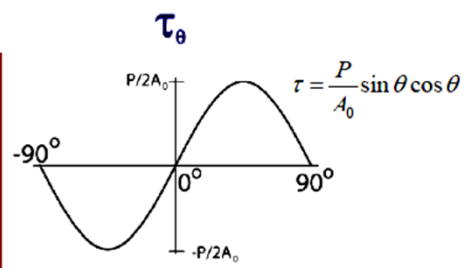
11



### Trave sollecitata assialmente



At  $\theta = \pm 90^\circ$        $\sigma = 0$   
 At  $\theta = \pm 45^\circ$        $\sigma = P/2A_0$   
 At  $\theta = 0^\circ$            $\sigma = P/A_0$  (max)



At  $\theta = \pm 90^\circ$        $\tau = 0$   
 At  $\theta = \pm 45^\circ$        $\tau = P/2A_0$  (max)  
 At  $\theta = 0^\circ$            $\tau = 0$

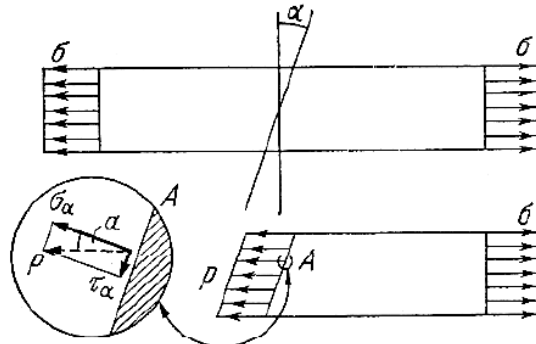
12



## Trave sollecitata assialmente



### Tensione normale e sforzo di taglio



$$\tau_{\max} \text{ per } \alpha = 45^\circ = \frac{\sigma}{2} \quad \tau = G\gamma \quad \text{con} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

13



## Deformazioni "termiche"



### Effetti della variazione di temperatura uniforme

Un aumento della temperatura determina un allungamento della barra, proporzionale alla sua lunghezza  $l$  e all'incremento di temperatura  $\Delta T$

$$\Delta l^t = \alpha \Delta T l$$

### Deformazione termica

$$\varepsilon^t = \alpha \Delta T$$

### Deformazione totale

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^t = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

### Allungamento totale

$$\Delta l = \Delta l^e + \Delta l^t = \frac{Nl}{EA} + \alpha \Delta T l$$

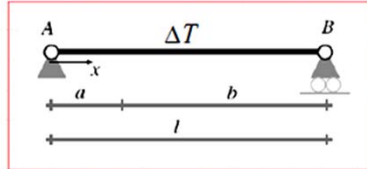
14



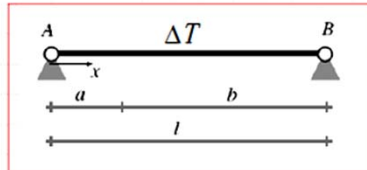
## Deformazioni "termiche"



**Strutture isostatiche** - La struttura si deforma senza che si destino stati di sollecitazione interni



**Strutture iperstatiche** - La deformazione termica non è libera di esplicarsi a causa dei vincoli. L'allungamento totale deve essere nullo: deve quindi nascere un accorciamento elastico uguale e contrario



$$\Delta l = \Delta l^e + \Delta l^t = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{Nl}{EA} + \alpha \Delta T l = 0$$

$$\frac{Nl}{EA} = -\alpha \Delta T l$$

$$N = -EA\alpha\Delta T$$

$$\sigma = -E\alpha\Delta T$$

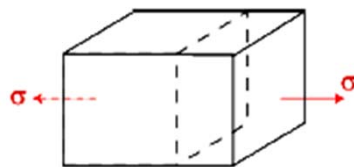
15



## Taglio

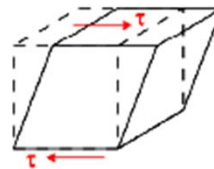


Il taglio agisce parallelamente alla direzione di applicazione del carico



Normal stress results in a volume change.

Shear stress results in a shape change.



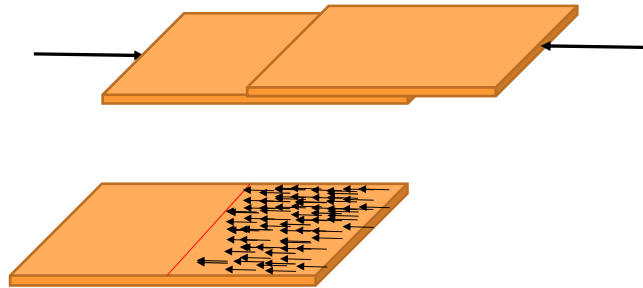
Gli sforzi di taglio (shear stress) sono prodotti in un corpo quando le forze applicate tendono a far «scorrere» una parte del corpo rispetto ad un'altra.

16



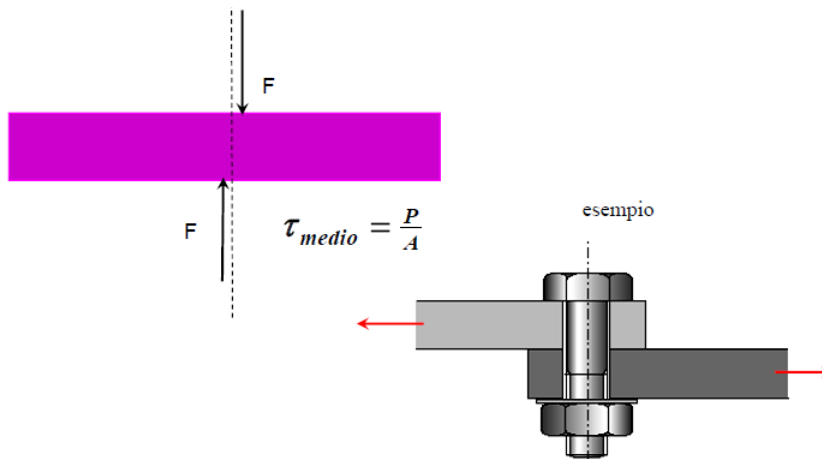


Esempio



In generale: sforzo di taglio = Forza / sezione interessata

Lo sforzo di taglio (shear stress) agisce tangenzialmente alla superficie del materiale



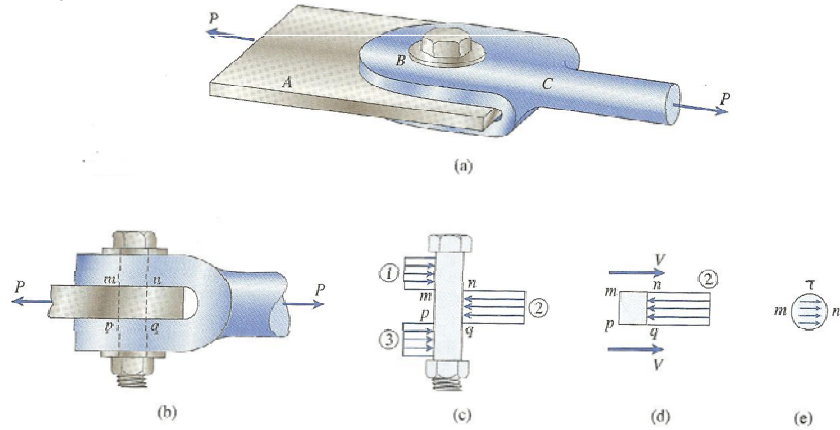
Si considera uno sforzo di taglio medio poiché il taglio non è uniforme lungo la sezione



Taglio



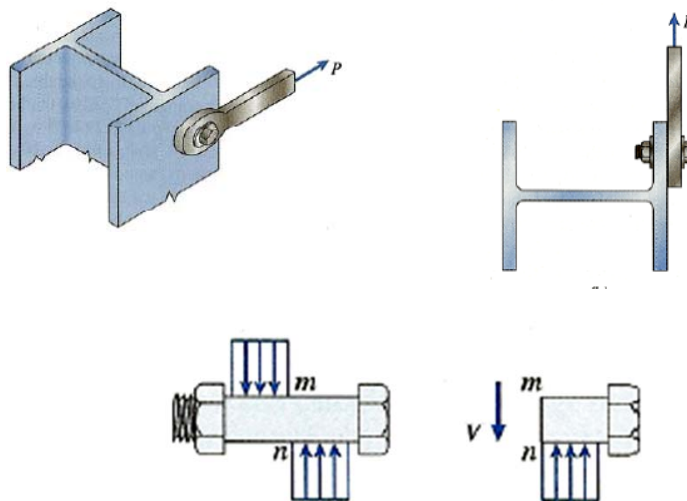
Esempio



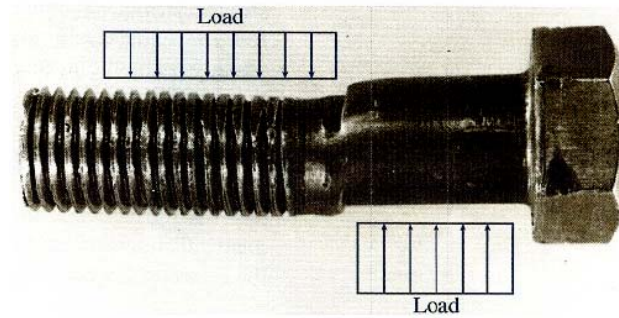
19



Taglio





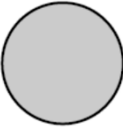

20



$$\tau_{medio} = \frac{V}{A}$$

Esempi: dimensionamento di bulloni, linguette, spine, rivetti, saldature, incollaggi

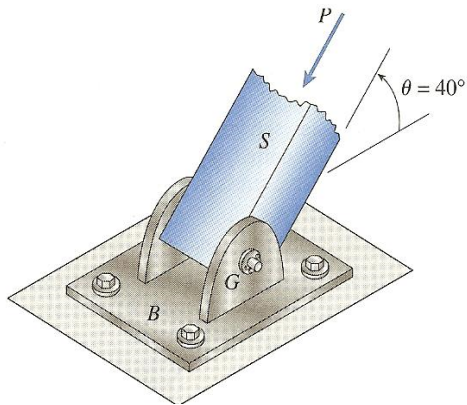


Forma della sezione	Formula	Forma della sezione	Formula
 Rettangolare	$\tau_{max} = \frac{3V}{2A}$	 Circolare cava sottile, spessa	$\tau_{max} = \frac{2V}{A}$
 Circolare	$\tau_{max} = \frac{4V}{3A}$	 A "I" (pareti sottili)	$\tau_{max} = \frac{V}{A_{web}}$

Shigley - Progetto e costruzione di macchine 2/ed  
Richard G. Budynas, J. Keith Nisbett



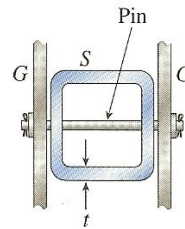
## Taglio



$P=54 \text{ kN}$

$t=12 \text{ mm}$

Diametro spina (pin) = 18 mm



Spessore tenute  $G = 15 \text{ mm}$   
Spessore piastra  $B = 8 \text{ mm}$   
Spessore bulloni di ancoraggio = 12 mm

23



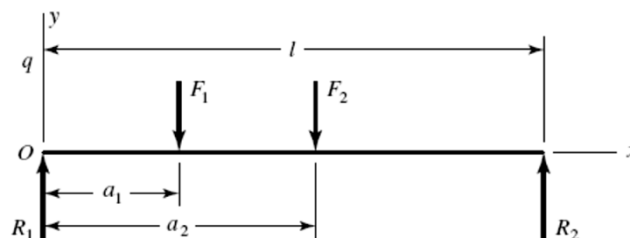
## Flessione



La flessione è un tipo di sollecitazione che provoca la formazione di momenti flettenti nelle sezioni di una trave.

**Flessione semplice:** forze normali e trasversali nulle, solo momento flettente

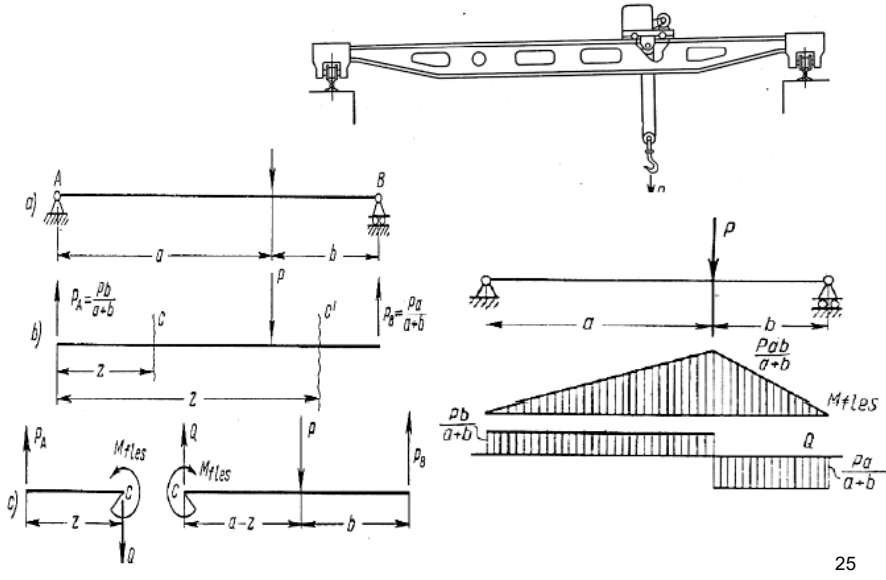
**Caso comune:** Flessione con Taglio



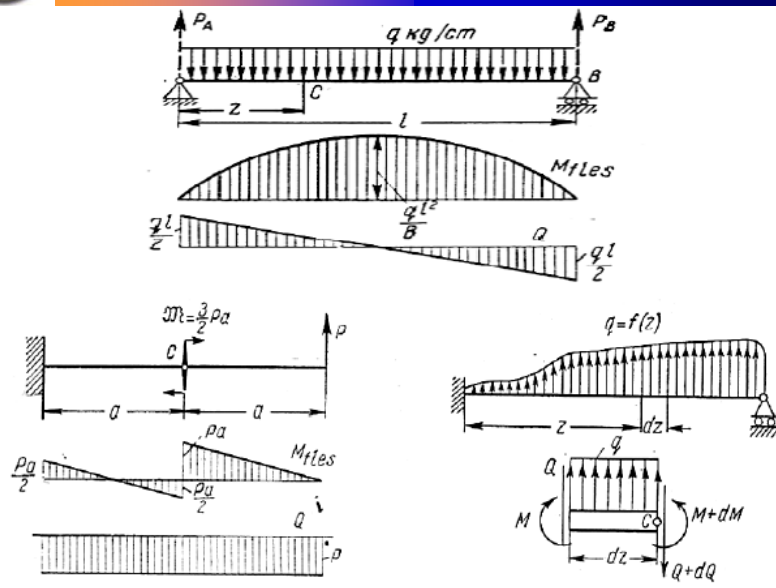
24



# Flessione

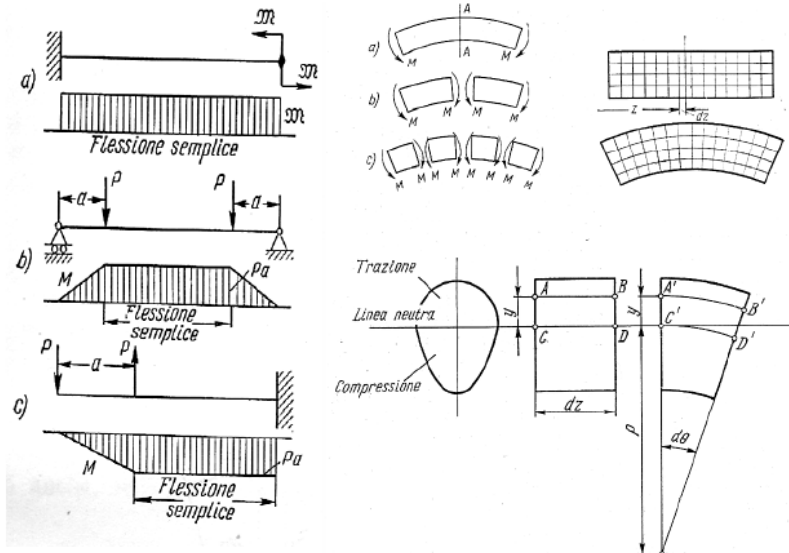


# Flessione





## Flessione semplice



27



## Flessione semplice

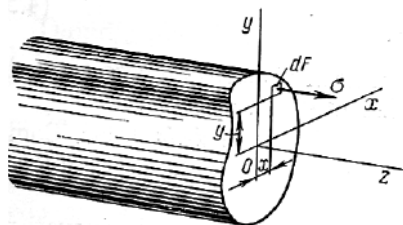


Nel caso di trave uniforme la curvatura è la stessa per ogni sezione.

L'asse di una trave uniforme in flessione semplice assume la forma di un arco di cerchio.

In generale tutte le sezioni di una trave uniforme non si piegano in caso di flessione semplice, ma ruotano solamente.

Il luogo geometrico dei punti per i quali lo sforzo  $\sigma = 0$



$$N = \int_F \sigma dF = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0$$

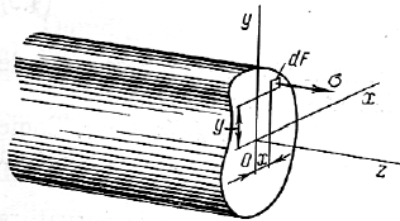
momento statico della sezione rispetto all'asse neutro

poiché il momento statico è nullo, l'asse neutro passa per il baricentro della sezione

28



### Flessione semplice

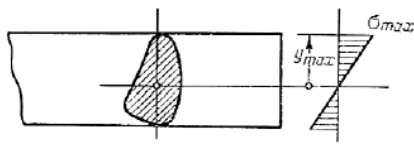


curvatura

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}$$

$$\sigma = \frac{My}{J_x}$$

sforzo normale



$$J_x = \frac{bh^3}{12} \quad \text{con} \quad y_{\max} = \frac{h}{2}$$

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} \quad \text{con} \quad y_{\max} = \frac{D}{2}$$

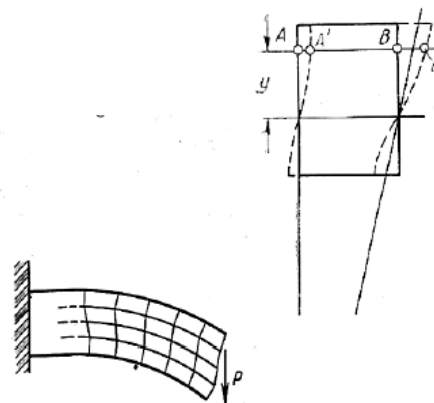
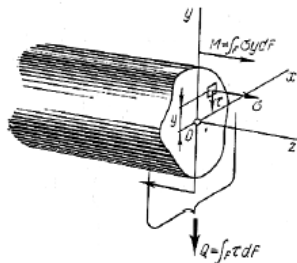
**GLI SFORZI DI FLESSIONE SONO INVERSAMENTE PROPORZIONALI AL CUBO DELLE DIMENSIONI LINEARI DELLA SEZIONE**



### Flessione semplice

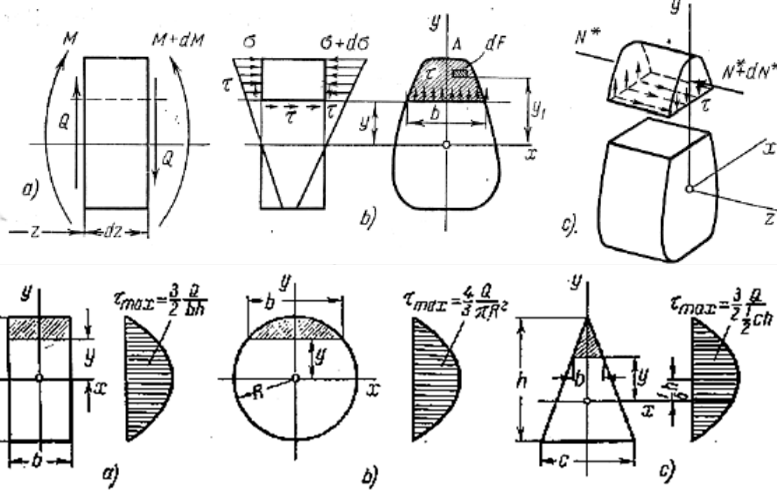


In caso di flessione con taglio Q oltre al momento flettente si ha una forza di taglio. La presenza di forze di taglio è accompagnata da deformazioni angolari





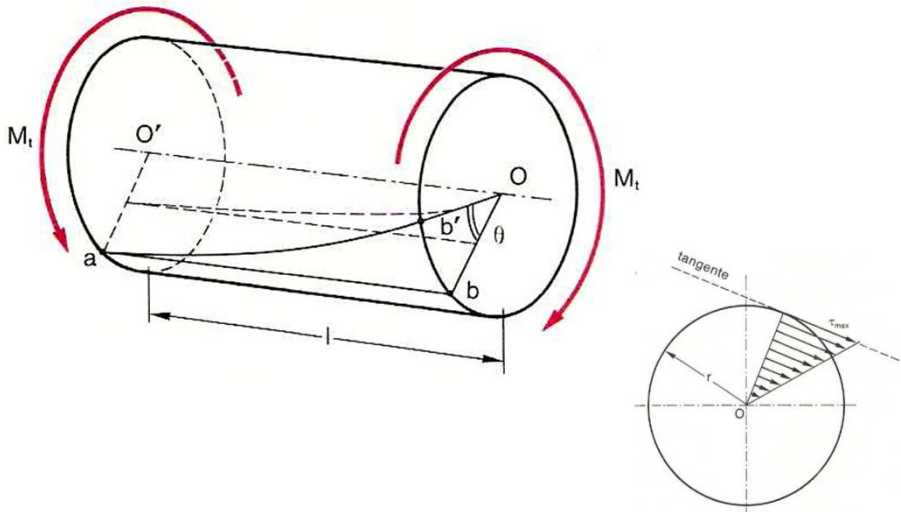
### Flessione semplice



31

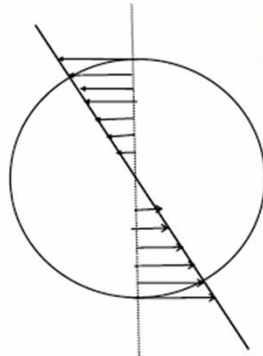


### Torsione



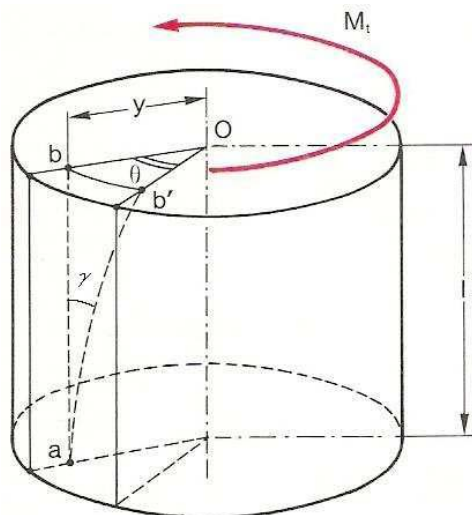
32





distribuzione del taglio dovuto a momento torcente sulla generica sezione circolare

Per sezioni diverse il calcolo è più complesso: esistono comunque tabelle riassuntive per le sezioni più comuni

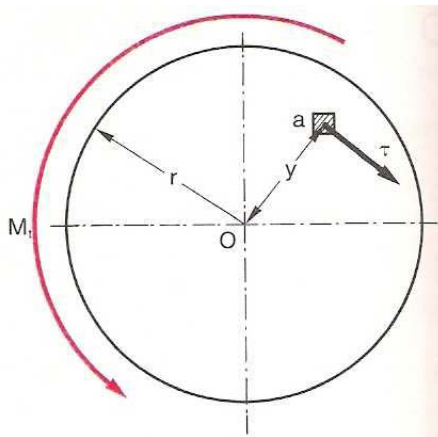


$$\gamma = \frac{\widehat{bb'}}{l} \quad \widehat{bb'} = y\theta$$

$$\gamma = \theta \frac{y}{l}$$



Applicando la legge di Hooke, abbiamo  $\tau = G\gamma$



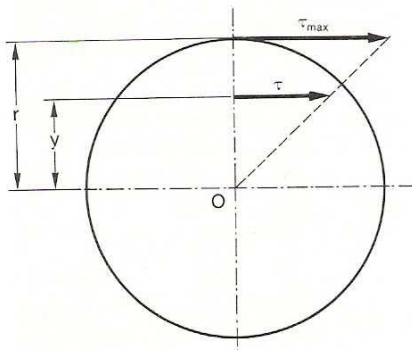
$$\tau = G\theta \frac{y}{l} \quad \sum \tau a y = M_t$$

$$\sum \frac{G\theta}{l} ay^2 = M_t$$

$$\frac{G\theta}{l} \sum ay^2 = M_t$$

$$\frac{G\theta I_p}{l} = M_t$$

$$\theta = \frac{M_t l}{GI_p}$$



$$\tau = G\theta \frac{y}{l}$$

Equazione di stabilità

$$\tau = \frac{M_t y}{I_p}$$

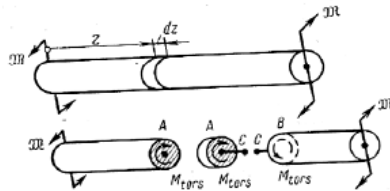
$$\tau_{\max} = \frac{M_t r}{I_p}$$

Modulo di resistenza a torsione

$$W_t = \frac{I_p}{r}$$

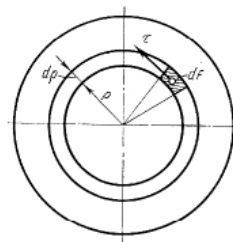
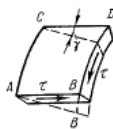
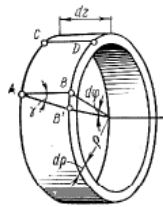
Verifica a torsione

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} \leq \tau_{amm}$$



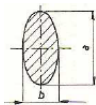
$$\gamma = \rho\vartheta \rightarrow \tau = G\vartheta\rho$$

$$\vartheta = \frac{M_t}{GJ_p} \rightarrow \tau = \frac{M_t\rho}{J_p} \rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_t\rho_{\max}}{J_p}$$



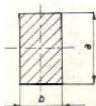
$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$\tau = \frac{16M_t}{\pi d^3}$$



SEZIONE ELLITTICA:

Detti  $a$  e  $b$  i due assi con  $b \leq a$  avremo  $W_t = \frac{\pi}{16} ab^2$



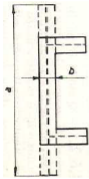
SEZIONE RETTANGOLARE:

Nel caso di sezioni rettangolari di base  $b$  e altezza  $a$  con  $b \leq a$  avremo  $W_t = \frac{ab^2}{3 + 1,8 \frac{b}{a}}$



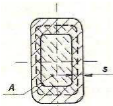
SEZIONE QUADRATA:

Detto  $L$  il lato del quadrato, avremo  $W_t = \frac{L^3}{4,8}$



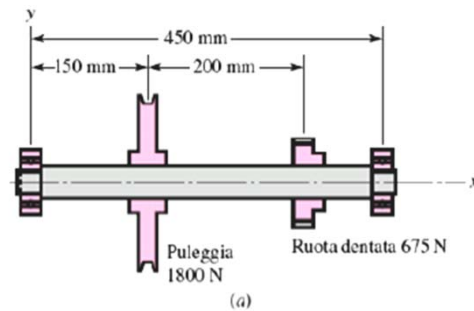
SEZIONE PROFILATI CONTORNO APERTO a C. T. Z. ecc.:

Detto  $b$  lo spessore (eventualmente medio del profilato) e  $a$  la lunghezza del profilato ottenuta allineando i vari tratti, avremo  $W_t = \frac{ab^2}{3}$



SEZIONE CAVA DI PICCOLO SPESSORE

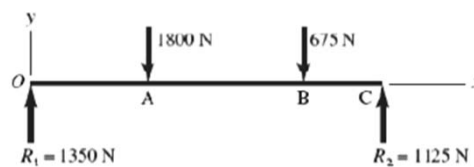
Detto  $s$  lo spessore ed  $A$  l'area racchiusa dal contorno medio, avremo  $W_t = 2As$



Materiale: acciaio con carico di snervamento = 340 MPa

Considerare coefficiente di sicurezza di 1.5

Trovare il diametro minimo di progetto.

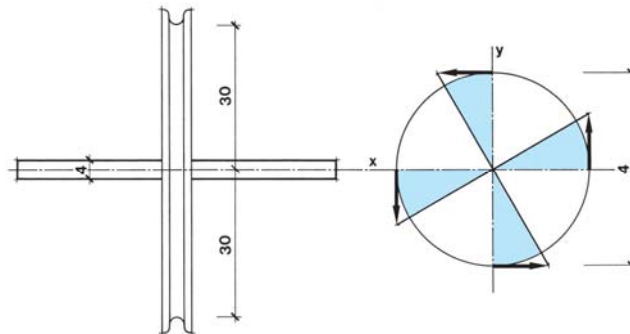




### Esempio di torsione



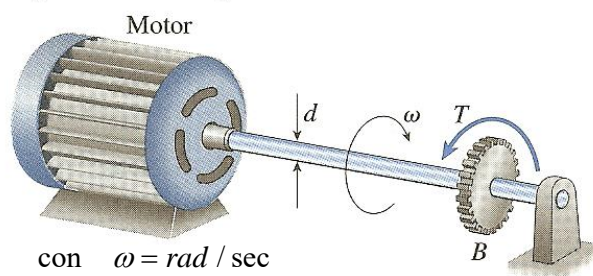
Su un corto albero di trasmissione in acciaio, con diametro  $\varnothing = 40$  mm e lunghezza  $l = 0,60$  m, è montata una puleggia con raggio  $r = 30$  cm. Calcolare il carico massimo perimetrale che può essere sollevato e l'angolo totale di torsione, facendo in modo che la tensione massima non superi il valore di  $120$  N/mm<sup>2</sup>



41



### Potenza e momento torcente



$$P = T\omega \quad \text{con} \quad \omega = \text{rad} / \text{sec}$$

$$\omega = 2\pi f \quad \text{con} \quad f = \text{Hz} = \text{sec}^{-1}$$

$$P = 2\pi fT \quad \text{numero di giri al minuto } n = 60f$$

$$P = \frac{2\pi nT}{60}$$

$$\tau_{\max} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad \rightarrow \quad d = \sqrt[3]{\frac{16T}{\pi\tau_{\text{amm}}}} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi\tau_{\text{amm}}} \frac{60P}{2\pi n}}$$

42



### Esempio di flessione e torsione

