CALCOLO DEI COEFFICIENTI PER UN’ONDA A DENTE DI SEGA

Calcoliamo i coefficienti di Fourier di un'onda a dente di sega.

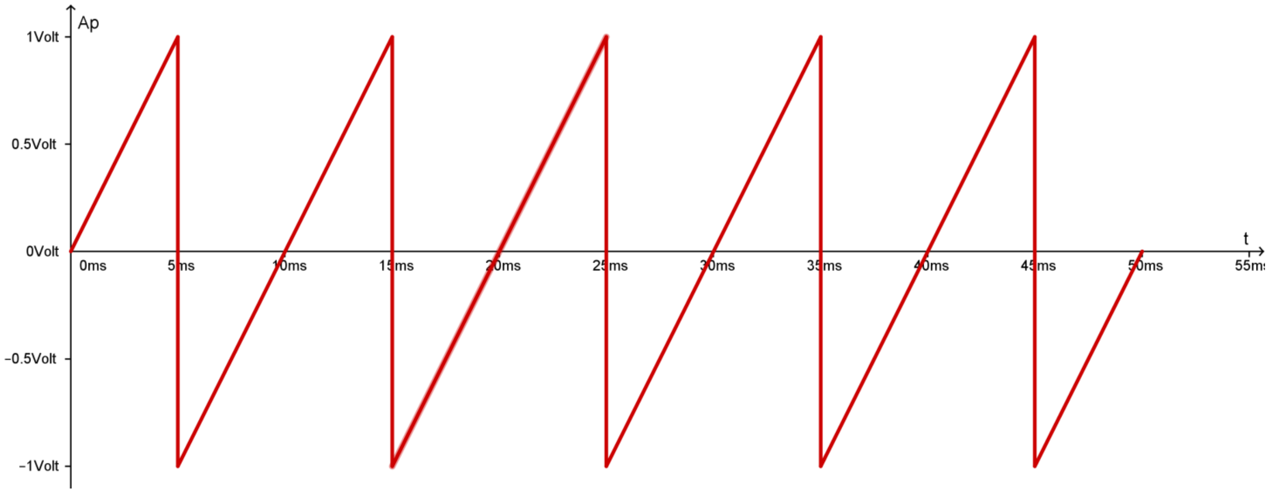

Figura 1 Onda a dente di sega nel dominio del tempo.

In figura 1 è rappresentato il grafico nel dominio del tempo dell'onda a dente di sega con le seguenti caratteristiche:

- ampiezza: 1V;
- periodo: 10ms
- frequenza: 100Hz.

Scriviamo la relazione:

$$f(t) = A_p \frac{2}{T} t \quad per - \frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$$

dove A_p è l'ampiezza del segnale e T è il suo periodo.
Calcoliamo il coefficiente C_0:

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_p \frac{2}{T} t\, dt = \frac{2A_p}{T^2} \frac{t^2}{2} \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = \frac{A_p}{T^2} \left(\frac{T^2}{4} - \frac{T^2}{4} \right) = 0$$

Risulta nullo infatti il valore medio della funzione è nullo quindi il segnale non ha componente continua.
Procediamo con il calcolo dei coefficienti A_k:

$$A_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_p \frac{2}{T} t \sin(k\omega t) dt = \frac{4A_p}{T^2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \sin(k\omega t) dt =$$

Calcoliamo:

$$\int t sin(k\omega t) dt =$$

Per parti.

$u = t \qquad\qquad\qquad v = -\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega}$

$du = dt \qquad\qquad\qquad dv = \sin(k\omega t)$

$$= -t\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega} + \int \frac{\cos(k\omega t)}{k\omega}dt = -t\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega} + \frac{\sin(k\omega t)}{k^2\omega^2} + C$$

$$= \frac{4A_p}{T^2}\left(-t\frac{\cos(k\omega t)}{k\omega} + \frac{\sin(k\omega t)}{k^2\omega^2}\right)\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{4A_p}{T^2}\left\{-\frac{T}{2k\omega}\cos\frac{k\omega T}{2} + \frac{1}{k^2\omega^2}\sin\frac{k\omega T}{2} - \left[\frac{T}{2k\omega}\cos\left(-\frac{k\omega T}{2}\right) + \frac{1}{k^2\omega^2}\sin\left(-\frac{k\omega T}{2}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{4A_p}{T^2}\left\{-\frac{T}{2k\omega}\cos\frac{k\omega T}{2} + \frac{1}{k^2\omega^2}\sin\frac{k\omega T}{2} - \frac{T}{2k\omega}\cos\left(-\frac{k\omega T}{2}\right) - \frac{1}{k^2\omega^2}\sin\left(-\frac{k\omega T}{2}\right)\right\} =$$

Considerato che:

$$\cos\left(-\frac{k\omega T}{2}\right) = \cos\frac{k\omega T}{2} \qquad e \qquad \sin\left(-\frac{k\omega T}{2}\right) = -\sin\frac{k\omega T}{2}$$

Si trova:

$$= \frac{4A_p}{T^2}\left\{-\frac{T}{2k\omega}\cos\frac{k\omega T}{2} + \frac{1}{k^2\omega^2}\sin\frac{k\omega T}{2} - \frac{T}{2k\omega}\cos\frac{k\omega T}{2} + \frac{1}{k^2\omega^2}\sin\frac{k\omega T}{2}\right\} =$$

$$= \frac{4A_p}{T^2}\left\{-\frac{T}{k\omega}\cos\frac{k\omega T}{2} + \frac{2}{k^2\omega^2}\sin\frac{k\omega T}{2}\right\} =$$

Ma: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ quindi:

$$= \frac{4A_p}{T^2}\left\{-\frac{T}{k\frac{2\pi}{T}}\cos\frac{k\frac{2\pi}{T}T}{2} + \frac{2}{k^2\frac{4\pi^2}{T^2}}\sin\frac{k\frac{2\pi}{T}T}{2}\right\} =$$

$$= \frac{4A_p}{T^2}\left\{-\frac{T^2}{2k\pi}\cos(k\pi) + \frac{2T^2}{4k^2\pi^2}\sin(k\pi)\right\} = -\frac{4A_p}{T^2}\frac{T^2}{2k\pi}\cos(k\pi) = -\frac{2A_p}{k\pi}\cos(k\pi)$$

Ma

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} -1 & se\ k\ dispari \\ 1 & se\ k\ pari \end{cases}$$

Quindi:

$$A_k = \begin{cases} \frac{2A_p}{k\pi} & se\ k\ dispari \\ -\frac{2A_p}{k\pi} & se\ k\ pari \end{cases}$$

Calcoliamo ora i coefficienti B_k.

$$B_k = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(k\omega t)dt = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_p\frac{2}{T}t\cos(k\omega t)dt = \frac{4A_p}{T^2}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t\cos(k\omega t)dt =$$

Calcoliamo:

$$\int t\cos(k\omega t)dt =$$

Per parti.

$$u = t \qquad v = \frac{\sin(k\omega t)}{k\omega}$$

$$du = dt \qquad dv = \cos(k\omega t)$$

$$= t\frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} - \int\frac{\sin(k\omega t)}{k\omega}dt = t\frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} - \frac{\cos(k\omega t)}{k^2\omega^2} + C$$

$$= \frac{4A_p}{T^2}\left(t\frac{\sin(k\omega t)}{k\omega} - \frac{\cos(k\omega t)}{k^2\omega^2}\right)\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} =$$

$$= \frac{4A_p}{T^2}\left\{\frac{T}{2k\omega}\sin\frac{k\omega T}{2} - \frac{1}{k^2\omega^2}\cos\frac{k\omega T}{2} - \left[-\frac{T}{2k\omega}\sin\left(-\frac{k\omega T}{2}\right) - \frac{1}{k^2\omega^2}\cos\left(-\frac{k\omega T}{2}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{4A_p}{T^2}\left\{\frac{T}{2k\omega}\sin\frac{k\omega T}{2} - \frac{1}{k^2\omega^2}\cos\frac{k\omega T}{2} + \frac{T}{2k\omega}\sin\left(-\frac{k\omega T}{2}\right) + \frac{1}{k^2\omega^2}\cos\left(-\frac{k\omega T}{2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{4A_p}{T^2}\left\{\frac{T}{2k\omega}\sin\frac{k\omega T}{2} - \frac{1}{k^2\omega^2}\cos\frac{k\omega T}{2} - \frac{T}{2k\omega}\sin\frac{k\omega T}{2} + \frac{1}{k^2\omega^2}\cos\frac{k\omega T}{2}\right\} = 0$$

come deve essere dato che la funzione presenta simmetria dispari.

A questo punto possiamo scrivere lo sviluppo in serie di Fourier in forma cartesiana:

$$f(t) = \frac{2A_p}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin(k\omega t)$$

In questo caso la forma cartesiana coincide con quella polare, infatti:

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = A_k$$

$$\Phi_k = arctg\frac{B_k}{A_k} = 0$$

Adesso possiamo disegnare il grafico dell'onda quadra nel dominio della frequenza.

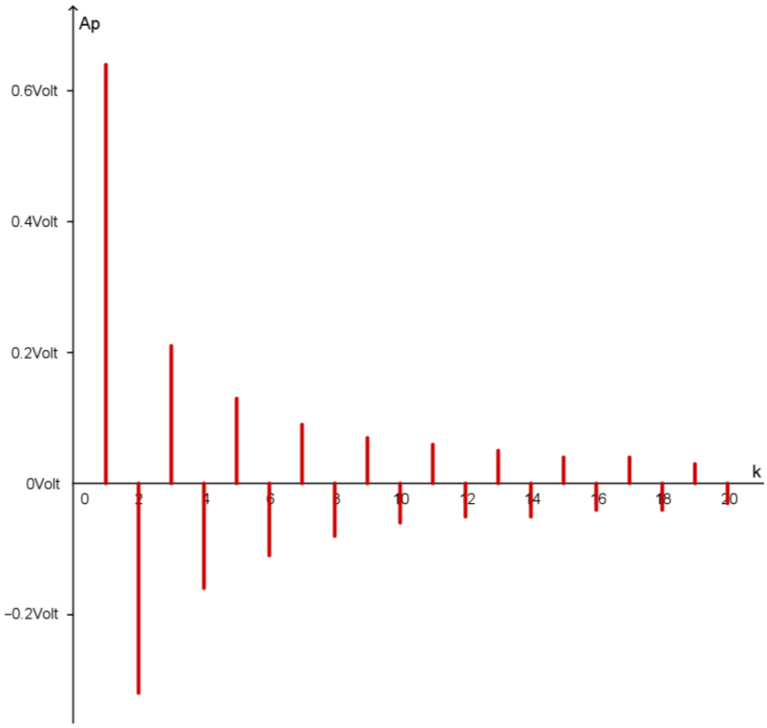

Figura 2 Dente di sega nel dominio della frequenza.

I valori sono stati ricavati ponendo l'ampiezza A_p=1V. Il segnale dato è, quindi, formato da infinite sinusoidi: la fondamentale (k=1) ha ampiezza $A_p = \frac{2A_p}{\pi} = 0{,}64V$ e frequenza f=100Hz, la seconda armonica ha ampiezza $A_p = -\frac{A_p}{\pi} = -0{,}32V$ e frequenza f=200Hz, la terza armonica ha ampiezza $A_p = \frac{2A_p}{3\pi} = 0{,}21V$ e frequenza f=300Hz, ecc.
Dal grafico si vede che al crescere della frequenza diminuisce l'ampiezza che, ad un certo punto, diventa trascurabile.
La serie di Fourier ha infiniti termini ma si considerano solo le armoniche che danno un contributo significativo al segnale (in base alla precisione desiderata).

Ricostruzione del segnale

Usando GeoGebra possiamo ricostruire il segnale e verificare il risultato ottenuto.
Ho sommato i grafici fino alla ventunesima armonica.

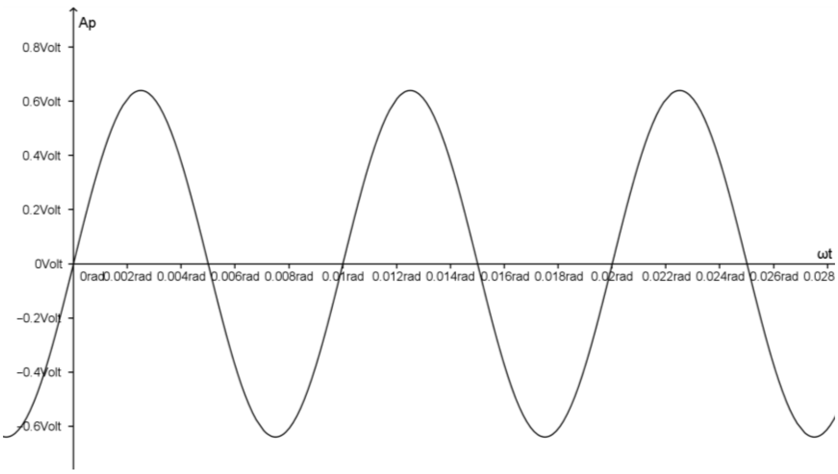

Figura 3 La fondamentale.

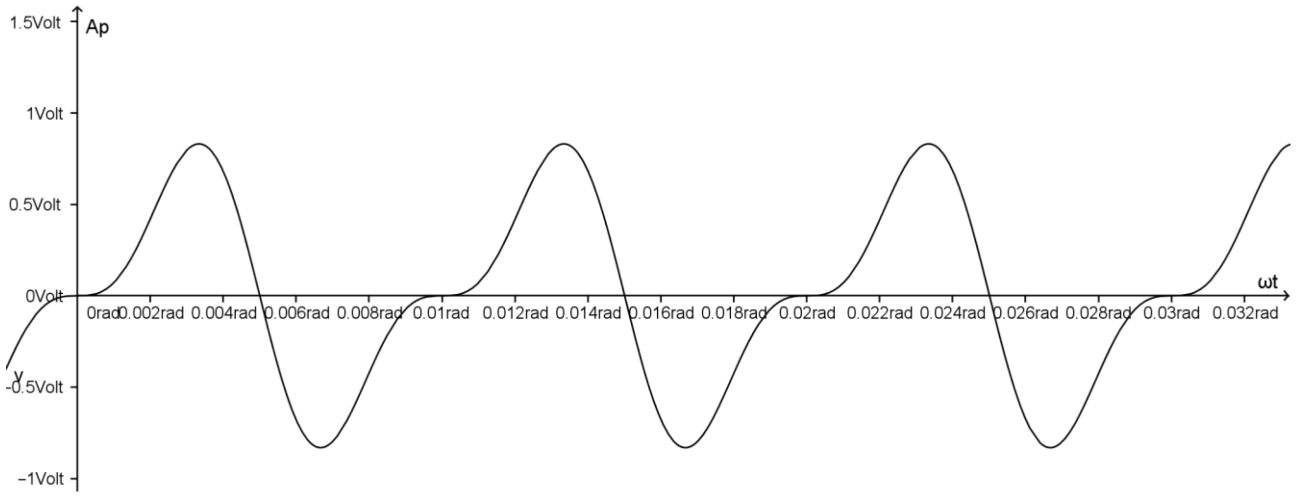

Figura 4 Sommo la seconda armonica.

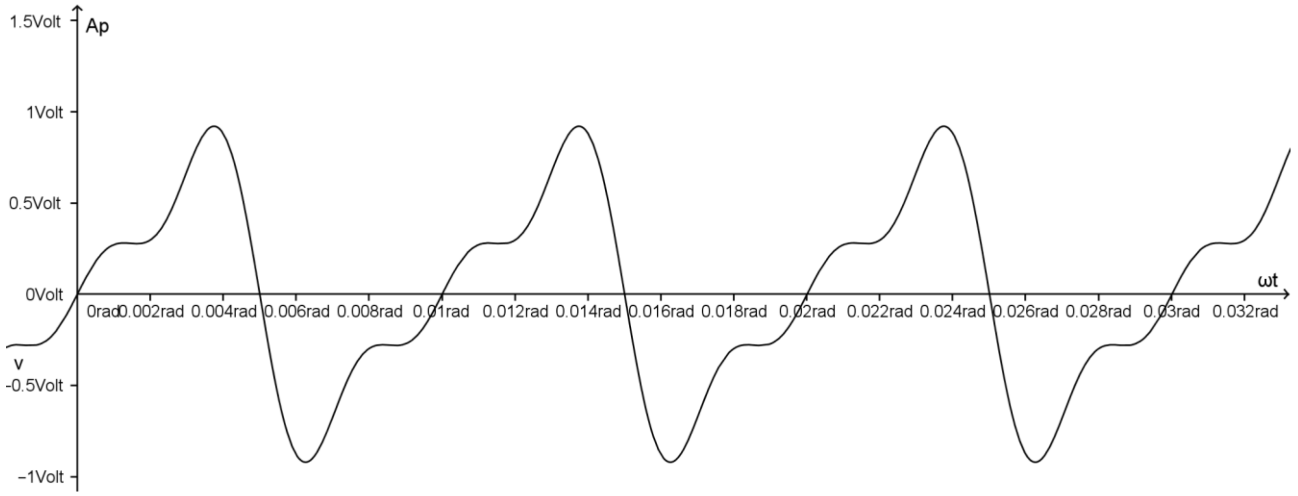

Figura 5 Sommo la terza armonica.

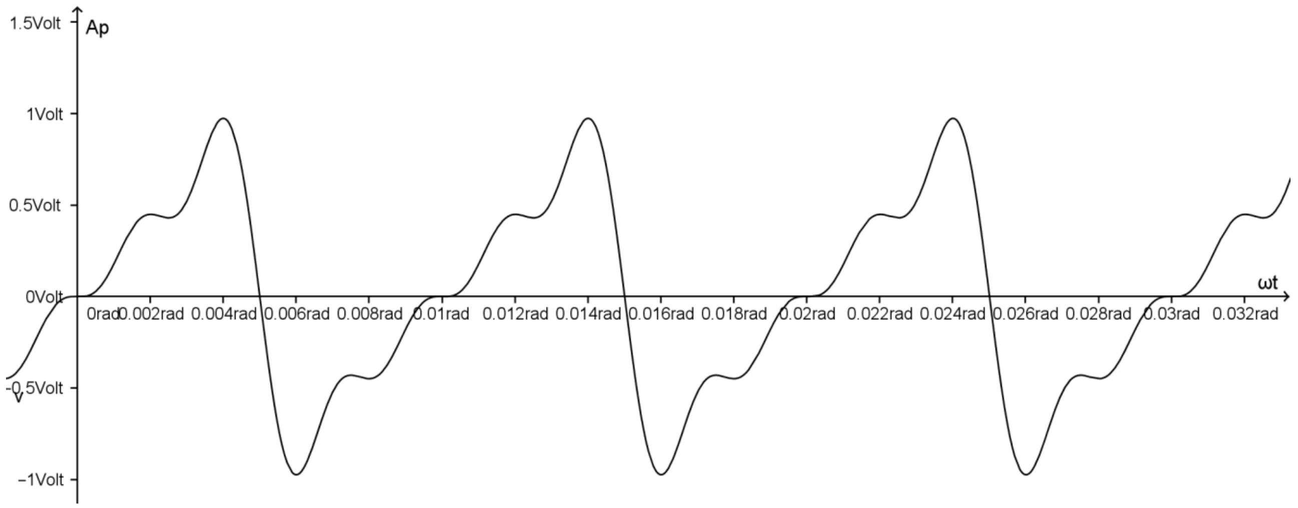

Figura 6 Sommo la quarta armonica.

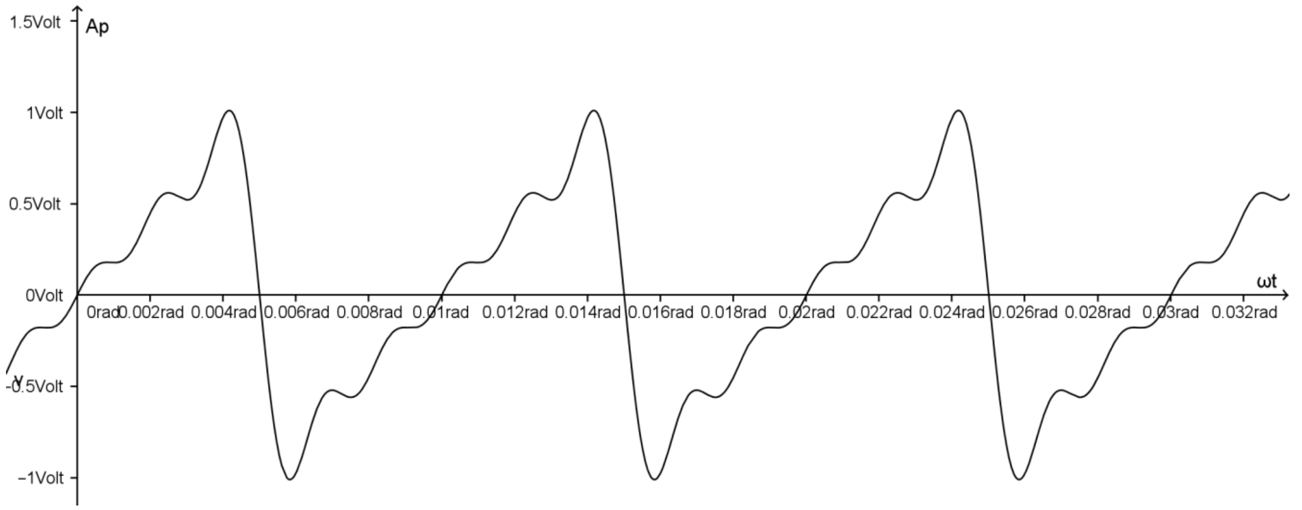

Figura 7 Sommo la quinta armonica.

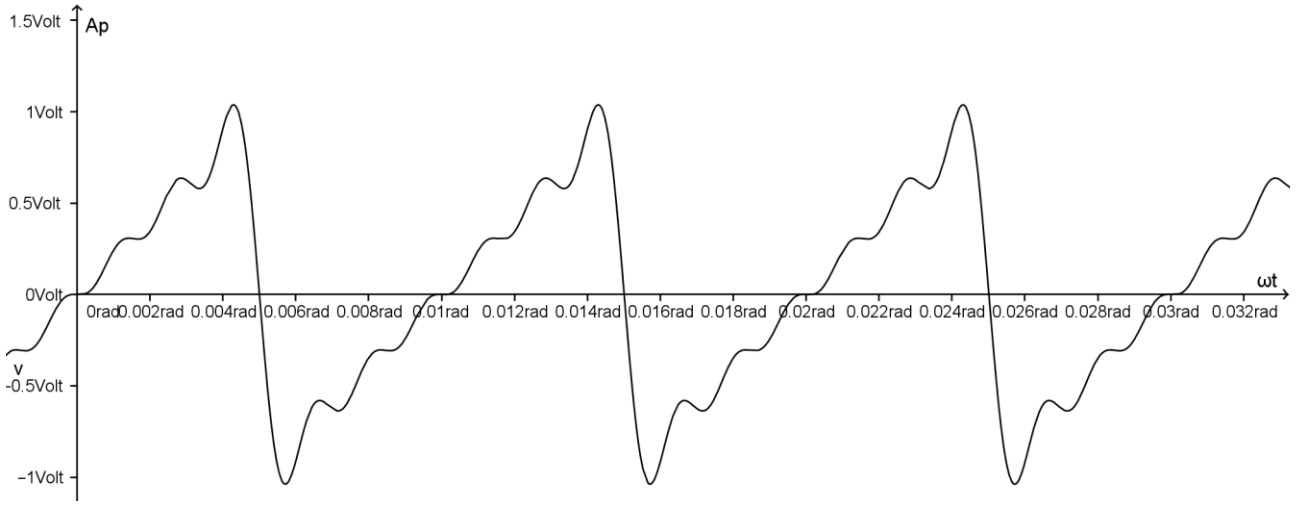

Figura 8 Sommo la sesta armonica.

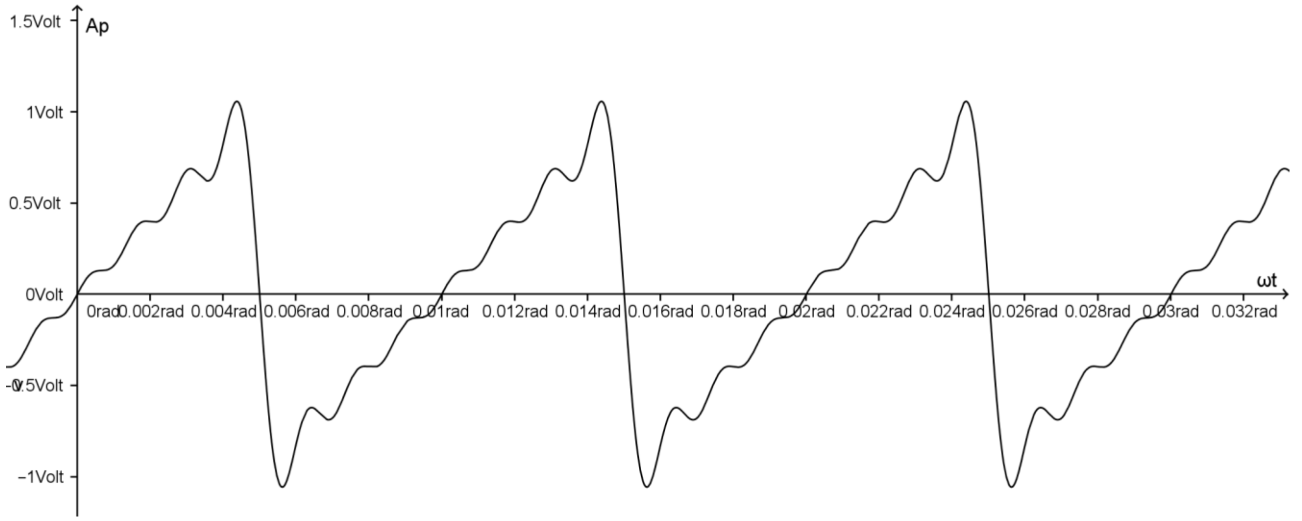

Figura 9 Sommo la settima armonica.

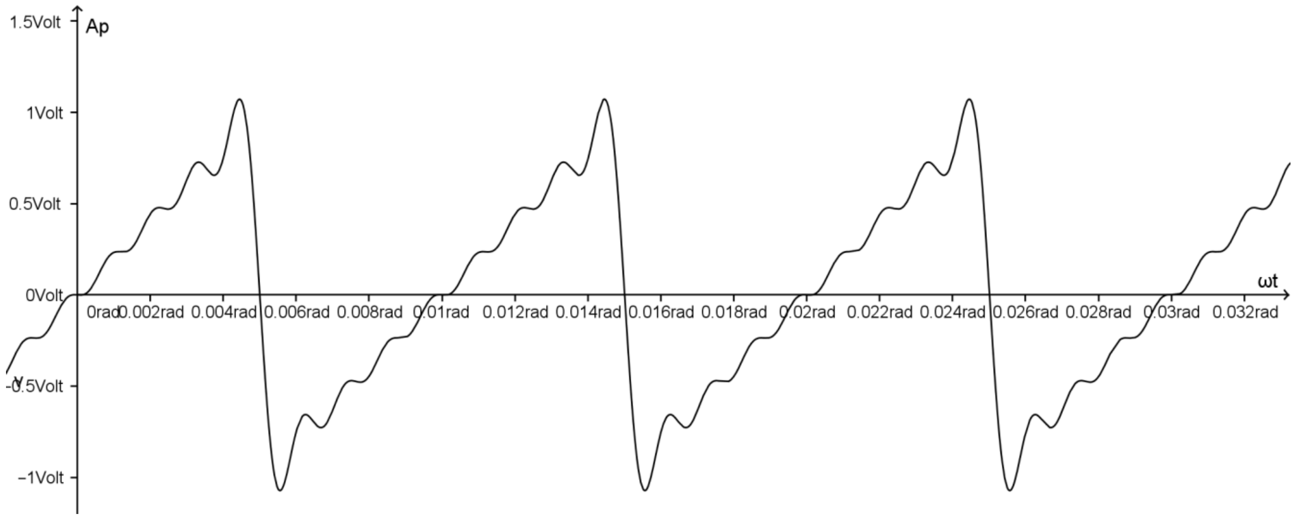

Figura 10 Sommo l'ottava armonica.

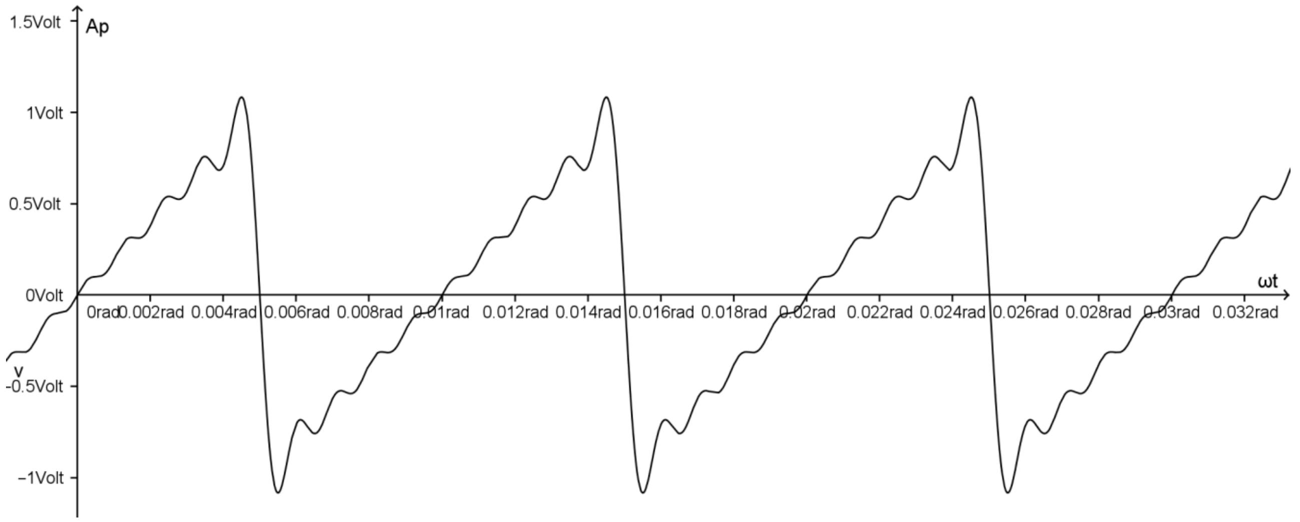

Figura 11 Sommo la nona armonica.

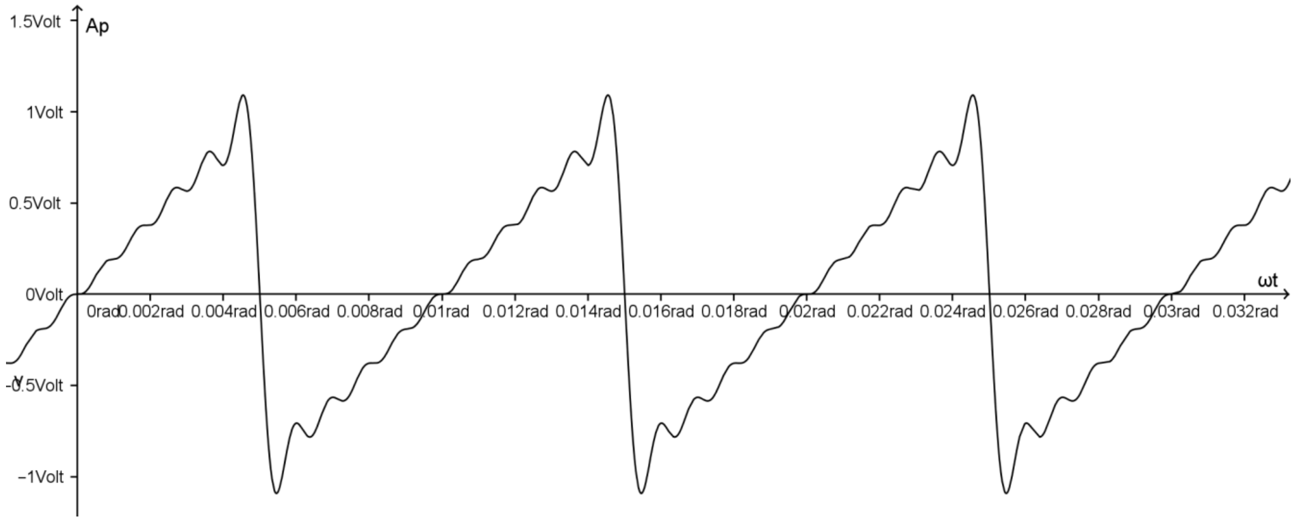

Figura 12 Sommo la decima armonica.

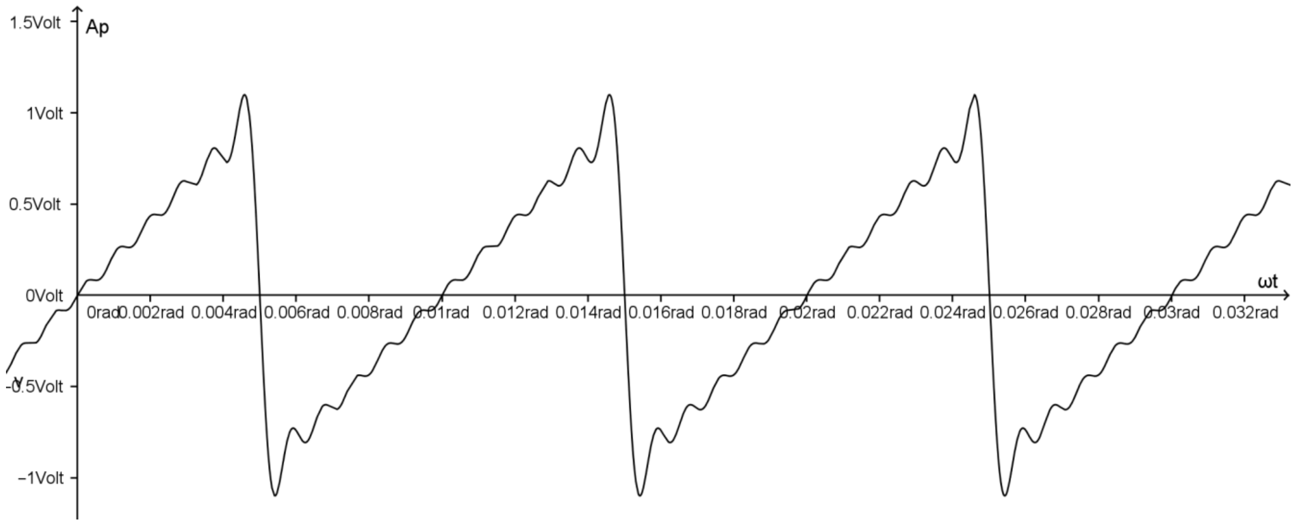

Figura 13 Sommo l'undicesima armonica.

Si vede dalle figure che il segnale ottenuto approssima sempre di più un'onda a dente di sega.