

Giorgio Graziani

Appunti di Fluidodinamica

Revisione Gennaio 2020

Indice

2	CINEMATICA	1
2.1	Il campo di velocità	1
2.2	Descrizione del moto euleriana e lagrangiana	3
2.3	Derivata materiale	6
2.3.1	Effetti non stazionari	7
2.3.2	Effetto della convezione	7
2.4	Moti mono-, bi-, tri-dimensionali	8
2.5	Il campo di accelerazione	9
2.6	Volume di controllo e sistema	10
2.7	Il teorema del trasporto di Reynolds	11
2.8	Traiettorie, linee di corrente, linee di fumo	17
2.9	Cinematica di una particella di fluido	20
2.9.1	Moto lineare e deformazione	20
2.9.2	Moto angolare e deformazione	22
2.10	Esercizi	26

Capitolo 2

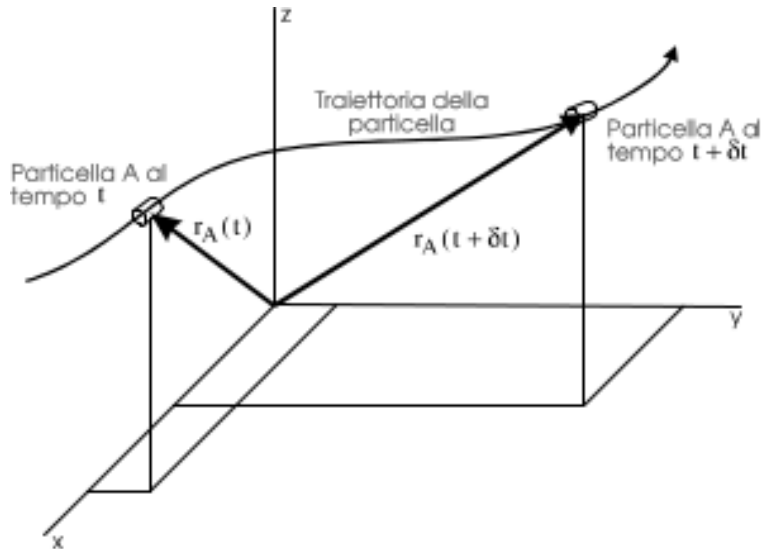
CINEMATICA

In questo capitolo prendiamo in considerazione alcuni aspetti del moto di un fluido che non riguardano le forze che producono il moto stesso. Esaminiamo, cioè, il campo di velocità e di accelerazione e le modalità per descrivere e visualizzare il moto. In altri termini, studiamo la cinematica del campo fluidodinamico. L'analisi più dettagliata delle forze necessarie per dare origine al moto, cioè la dinamica del moto, verrà discussa più avanti. Infatti una prima valutazione del carattere del moto di un fluido si può ottenere semplicemente tramite informazioni sulla cinematica del moto senza considerare le forze che lo producono: si pensi ad esempio al moto del gas che esce da una ciminiera oppure ai moti atmosferici che ci vengono indicati dalle nuvole.

Dall'analisi delle caratteristiche cinematiche del campo fluidodinamico è possibile ricavare una serie di informazioni utili per una più approfondita comprensione di alcuni aspetti fisici del problema.

2.1 Il campo di velocità

Quando un fluido si muove, vi è uno spostamento delle molecole da un punto ad un altro dello spazio ad ogni istante di tempo. Invece di considerare il moto delle singole molecole, come già spiegato in precedenza, si adotta l'ipotesi di continuo e si considera il fluido come se fosse composto da tante particelle (cioè piccole porzioni di fluido) che interagiscono sia tra loro che con l'ambiente circostante. Il moto del fluido viene quindi descritto attraverso la velocità e l'accelerazione delle particelle di fluido. L'ipotesi di continuo implica che le particelle sono a stretto contatto l'una con l'altra in modo tale che, in un determinato istante temporale, ciascuna proprietà fisica (densità, pressione, velocità, accelerazione ...) possa essere descritta in funzione della posizione



45

Figura 2.1: Identificazione di una particella mediante il vettore posizione

spaziale. Ognuna di queste grandezze, cioè, può essere rappresentata come un *campo*. Siccome i valori di ciascun campo possono variare nel tempo, per descrivere il moto del fluido tutte le grandezze fluidodinamiche devono essere espresse in funzione delle coordinate spaziali e del tempo. Ad esempio la temperatura in una stanza è completamente individuata dal campo di valori $T = T(x,y,z,t)$ in tutto lo spazio ed in qualsiasi istante del giorno o della notte.

Una delle variabili più importanti per lo studio del moto di un fluido è il campo di velocità:

$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k}$$

in cui u, v, w sono le componenti del vettore velocità nelle direzioni x, y, z rispettivamente. La velocità di una particella è per definizione espressa dalla variazione nel tempo del vettore posizione della particella.

Come mostrato in figura 2.1, la posizione della particella A nel sistema di riferimento scelto è espressa attraverso il vettore posizione \vec{r}_A , il quale, se la particella si muove, dipende dal tempo. La variazione nel tempo della posizione è la velocità \vec{V}_A della particella. Considerando tutte le particelle si ottiene il campo del vettore velocità $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$.

In quanto vettore, la velocità ha un'intensità, una direzione ed un verso. L'intensità di \vec{V} , indicata con V , è: $V = |\vec{V}| = (u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}$. La variazione di velocità (intensità e/o direzione) dà luogo ad un'accelerazione.

2.2 Descrizione del moto euleriana e lagrangiana

Per lo studio del moto di un fluido è possibile seguire due approcci diversi. Il primo, detto *euleriano*, utilizza il concetto di campo appena introdotto ed analizza il moto del fluido descrivendone tutte le proprietà (pressione, densità, velocità, ecc.) in funzione delle coordinate spaziali e del tempo. Le informazioni sul moto sono espresse da ciò che avviene in punti fissi dello spazio mentre il fluido scorre.

Il secondo tipo di approccio, detto *lagrangiano*, utilizza delle particelle di fluido individuali seguendole nel loro moto e valutando come variano nel tempo le proprietà del fluido ad esse associate. In tale modo, quindi, le particelle vengono marcate per potere essere riconosciute durante il moto. Per capire la differenza tra i due diversi tipi di descrizione del moto, consideriamo l'esempio del fumo emesso da una ciminiera. Nella descrizione euleriana si pone un termometro in una data posizione all'apice della ciminiera e si misura la temperatura in funzione del tempo. In istanti diversi passano per quel punto delle particelle differenti. Si ottiene così l'andamento della temperatura nel tempo in quella determinata posizione ($x = x_o, y = y_o, z = z_o$), cioè $T = T(x_o, y_o, z_o, t)$. L'uso di molti termometri posti in punti diversi, ma fissi, permette di ottenere il campo di temperatura $T = T(x, y, z, t)$. Per conoscere la temperatura di una certa particella in funzione del tempo è necessario conoscere la posizione spaziale occupata da quella particella nei diversi istanti temporali.

Usando la descrizione lagrangiana, invece, si collega un termometro ad una determinata particella (A) e si misura la temperatura di questa durante il suo moto. Si ottiene così la temperatura della particella A in funzione del tempo $T_A = T_A(t)$. L'uso di tanti termometri collegati alle diverse particelle del fluido permette di ottenere i valori della temperatura nel tempo per tutte le particelle nel campo $T = T(P, t)$. Per conoscere la temperatura in ciascun punto dello spazio è necessario conoscere quale posizione spaziale occupa ogni particella in quell'istante temporale. In genere è possibile passare da un tipo di descrizione all'altra.

Di solito in fluidodinamica è più facile adottare una descrizione euleriana del moto, sia per l'analisi sperimentale che per quella matematica. In alcuni casi, però, la descrizione lagrangiana è più conveniente. Ad esempio alcune soluzioni numeriche di problemi di fluidodinamica sono basate sullo studio

del moto di singole particelle e delle loro interazioni mutue, oppure in alcuni esperimenti alcune particelle vengono contrassegnate e seguite nel moto. Analogamente alcune misure oceanografiche vengono ottenute per mezzo di strumenti che seguono le correnti oppure, infine, il controllo del flusso sanguigno nelle arterie viene ottenuto attraverso dei traccianti che riflettono i raggi X. In tutti questi casi viene adottata una descrizione del moto lagrangiana.

Come si è visto, nella descrizione euleriana (detta anche *spaziale*) si rappresenta la variazione di grandezze in punti fissi dello spazio in funzione del tempo. La stessa posizione è però occupata in istanti diversi da particelle diverse. Perciò la descrizione spaziale non fornisce informazioni dirette relativamente alle variazioni di una certa proprietà di una particella perché questa cambia posizione nel tempo. Le variabili indipendenti adottate in questa descrizione sono le posizioni spaziali, indicate ad esempio dalla terna (x_1, x_2, x_3) , ed il tempo. La descrizione lagrangiana (detta anche *materiale* o *referenziale*) considera invece le singole particelle seguendole nel loro moto ed adotta come variabili indipendenti delle terne (ad esempio X_1, X_2, X_3) che individuano in modo univoco ciascuna particella del fluido. Per fare sì che ogni particella possa essere individuata in modo univoco si attribuisce alla terna (X_1, X_2, X_3) che contrassegna una data particella il valore delle coordinate spaziali occupate da quella particella in una qualsiasi configurazione del fluido che viene assunta come riferimento (ad esempio quella in cui il fluido si trova in quiete).

Le due descrizioni referenziale, X , e spaziale, x , sono collegate dalla *legge del moto* per cui è possibile ottenere una descrizione dall'altra. Infatti la legge del moto esprime le posizioni spaziali occupate dalla particella (X_1, X_2, X_3) nei diversi istanti temporali. Supponiamo ad esempio che la legge del moto di un campo fluidodinamico sia rappresentata dalle:

$$\begin{aligned}x_1 &= X_1 + ktX_2 \\x_2 &= X_2 \\x_3 &= X_3\end{aligned}\tag{2.1}$$

in base alle quali, quindi, varia nel tempo solamente la coordinata spaziale x_1 della particella. Assumiamo un campo di temperatura espresso, nella descrizione spaziale, dalla relazione:

$$T(x_1, x_2, x_3, t) = x_1 + x_2\tag{2.2}$$

secondo la quale la temperatura in un punto fisso del campo risulta indipendente da t . In questo caso il campo di temperatura viene detto *stazionario*, cioè la variazione della temperatura rispetto al tempo, calcolata in un punto fisso dello spazio, è nulla:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{x_1, x_2, x_3 \text{ fissi}} = 0 \quad (2.3)$$

Il simbolo di derivata parziale usato qui sopra ricorda che la grandezza T non dipende solo dal tempo, ma anche da altre variabili (quelle spaziali) che vengono mantenute fisse nella derivata (come ricorda il pedice). In generale quest'ultima indicazione verrà omessa nel seguito ricordando che, in una derivata parziale, la variazione è calcolata soltanto rispetto a quella variabile indipendente mentre le altre restano costanti. La descrizione materiale del campo di temperatura, cioè la temperatura di una generica particella di fluido P (definita dalla sua etichetta X_1, X_2, X_3), si ottiene sostituendo le (2.1) nella (2.2):

$$T(P, t) = X_1 + ktX_2 + X_2 = X_1 + (kt + 1)X_2 \quad (2.4)$$

La velocità della particella materiale è espressa, per la generica componente v_i ($i = 1, 2, 3$), da:

$$v_i = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{X_1, X_2, X_3 \text{ fissi}}$$

per mezzo della quale, considerando le (2.1), si ottiene la descrizione materiale del campo di velocità, cioè quella che adotta le particelle di fluido come variabili indipendenti:

$$\begin{aligned} v_1(X_1, X_2, X_3, t) &= kX_2 \\ v_2(X_1, X_2, X_3, t) &= v_3(X_1, X_2, X_3, t) = 0 \end{aligned}$$

Tenendo conto ancora delle (2.1), la descrizione spaziale del campo di velocità (in cui le variabili indipendenti sono le coordinate dello spazio) è:

$$\begin{aligned} v_1(x_1, x_2, x_3, t) &= kx_2 \\ v_2(x_1, x_2, x_3, t) &= v_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0 \end{aligned}$$

La variazione nel tempo della temperatura di una data particella materiale, esaminando la (2.4), è espressa da:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{X_1, X_2, X_3 \text{ fissi}} = \frac{DT}{Dt} = kX_2 \quad (2.5)$$

Si può notare che, nonostante la temperatura non dipenda dal tempo nella descrizione spaziale (2.2), ciascuna particella è soggetta a delle variazioni di temperatura poiché si sposta da una posizione nello spazio ad un'altra.

2.3 Derivata materiale

Per non confondere la derivata rispetto al tempo in un punto fisso dello spazio (2.3) con quella relativa ad una particella di fluido, (2.5) si indica quest'ultima come $\frac{D}{Dt}$ e si definisce *derivata materiale* o *derivata sostanziale*.

Mentre il primo membro della (2.3) rappresenta la variazione della temperatura rispetto al tempo misurata in un punto fisso dello spazio, la derivata materiale rappresenta la variazione nel tempo di una data proprietà di una certa particella come, cioè, se la seguiamo nel suo moto analogamente a quanto visto per la descrizione lagrangiana. Questa espressione può essere calcolata, anziché direttamente seguendo la particella nel suo moto, mediante grandezze valutate in punti fissi dello spazio (cioè tramite informazioni ottenute nella descrizione spaziale). Ad esempio indicando con $T = T(x, y, z, t)$ la temperatura in un certo campo fluidodinamico, può essere utile determinare la variazione nel tempo della temperatura di una particella di fluido (indicata con A) nel suo moto attraverso questo campo di temperatura. In particolare è necessario tenere conto che la temperatura T_A dipende dal tempo sia esplicitamente $T_A(t)$, sia per il fatto che la posizione (x_A, y_A, z_A) della particella può cambiare nel tempo ($x_A = x_A(t)$ ecc...) e quindi questa può occupare punti dello spazio con valori diversi della temperatura subendo la variazione:

$$\frac{dT_A}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx_A}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy_A}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{dz_A}{dt}$$

in cui tutte le derivate a secondo membro sono calcolate nel punto dello spazio occupato in quell'istante dalla particella A. Indicando con (u_A, v_A, w_A) le componenti della velocità della particella A nel punto del campo da essa occupato in quell'istante temporale, possiamo esprimere la variazione di temperatura della particella come:

$$\frac{dT_A}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} u_A + \frac{\partial T}{\partial y} v_A + \frac{\partial T}{\partial z} w_A$$

In generale, per una qualsiasi particella si ha:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w = \frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T$$

in cui compare l'operatore di derivata materiale definito da:

$$\frac{D(\)}{Dt} = \frac{\partial(\)}{\partial t} + \frac{\partial(\)}{\partial x} u + \frac{\partial(\)}{\partial y} v + \frac{\partial(\)}{\partial z} w \quad (2.6)$$

La notazione utilizzata spesso per la derivata materiale è:

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})(\cdot) \quad (2.7)$$

Il prodotto scalare del vettore velocità \vec{V} con l'operatore gradiente $\vec{\nabla}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial z}\vec{k}$ è una rappresentazione compatta per il termine di derivata spaziale che appare nella derivata materiale (2.6).

L'espressione (2.7) vale, con riferimento al termine contenuto tra (\cdot) , per una grandezza sia scalare che vettoriale.

2.3.1 Effetti non stazionari

L'espressione della derivata materiale contiene due tipi di termini: quello in cui compare la derivata rispetto al tempo e quelli in cui compaiono le derivate spaziali. La prima parte, detta derivata locale, rappresenta l'effetto della non stazionarietà del moto.

Nel caso di moto stazionario il termine locale si annulla in qualsiasi punto del campo poiché non si ha alcuna variazione nel tempo delle grandezze fluidodinamiche in ciascun punto fisso dello spazio. Può invece esservi una variazione di tali grandezze per una particella che si muove. Nel caso di moto non stazionario le grandezze fluidodinamiche (velocità, temperatura, pressione ecc.) possono variare nel tempo in ciascun punto del campo. Ad esempio una tazza di caffè in cui il liquido sia fermo ($\vec{V}=0$) si raffredderà per effetto dello scambio termico con l'ambiente circostante. Cioè:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}T = \frac{\partial T}{\partial t} < 0$$

2.3.2 Effetto della convezione

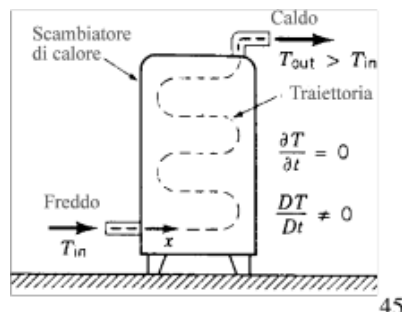


Figura 2.2: Flusso stazionario attraverso uno scambiatore di calore.

La parte della derivata materiale (2.6) rappresentata dalle derivate spaziali è detta termine convettivo. Questo rappresenta il fatto che una proprietà del campo fluidodinamico associata ad una particella di fluido può variare in seguito allo spostamento della particella da un punto del campo, dove quella proprietà ha un certo valore, ad un altro punto del campo dove il valore è diverso. Questo contributo alla variazione nel tempo della proprietà associata alla particella si può avere sia se il moto è stazionario sia se è non stazionario. Esso dipende dal moto della particella (convezione) in zone del campo dove si ha un gradiente non nullo della proprietà considerata.

Nell'esempio di figura 2.2 la temperatura di una particella di acqua varia mentre questa scorre all'interno dello scambiatore di calore. L'acqua che entra all'ingresso ha sempre la stessa temperatura fredda, T_{in} , mentre all'uscita ha sempre la stessa temperatura calda $T_{out} > T_{in}$. Si ha quindi un flusso stazionario. La temperatura di ciascuna particella aumenta mentre questa scorre nello scambiatore (T_{out}/T_{in}). Quindi si ha $\frac{DT}{Dt} \neq 0$ per effetto del termine convettivo nella derivata totale della temperatura. In particolare si ha $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ma $u \frac{\partial T}{\partial x} \neq 0$ (con x misurata lungo la traiettoria) poiché si ha un gradiente di temperatura non nullo lungo la traiettoria. Una particella che segue questo percorso lungo il quale la temperatura varia ($\frac{\partial T}{\partial x} \neq 0$) muovendosi con velocità u subirà una variazione di temperatura data da $\frac{DT}{Dt} = u \frac{\partial T}{\partial x}$ anche in una situazione di moto stazionario ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$).

2.4 Moti mono-, bi-, tri-dimensionali

In generale il moto di un fluido è un fenomeno complesso tridimensionale e non stazionario in cui si ha: $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$. In molte situazioni è però possibile utilizzare delle ipotesi semplificative che permettono una comprensione del fenomeno più facile senza tuttavia pregiudicarne l'accuratezza. Una di queste semplificazioni è quella di considerare un flusso reale, tridimensionale, come se fosse mono- o bi-dimensionale.

Quasi sempre il campo di velocità ha tutte le tre componenti diverse da zero, ciascuna delle quali dipende dalle tre variabili spaziali e dal tempo. In molti casi gli aspetti tridimensionali sono importanti dal punto di vista degli effetti fisici prodotti e quindi non è possibile trascurare nessuna delle componenti della velocità. Il moto dell'aria intorno all'ala di un aeroplano è un esempio della complessità dovuta alle tre dimensioni. In altre situazioni una delle componenti della velocità può essere relativamente piccola rispetto alle altre due componenti, quindi può essere ragionevolmente trascurata ed il flusso può essere considerato come bi-dimensionale. Cioè $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$.

Quando è possibile considerare trascurabili due delle componenti della velocità, il campo di velocità viene approssimato come mono-dimensionale: $\vec{V} = u \vec{i}$

Nonostante tutte le situazioni reali presentino degli effetti tridimensionali, tuttavia in alcune situazioni l'approssimazione di flusso mono-dimensionale risulta sufficientemente accurata. In altri casi, invece, tale assunzione conduce a dei risultati completamente errati. Ad esempio, nello studio del moto di un corso d'acqua, pur essendo presenti dei complessi fenomeni tridimensionali, in alcuni casi si può considerare il campo di velocità come mono-dimensionale espresso da $\vec{V} = V_o \vec{i}$ in cui \vec{i} è la direzione di valle e V_o la velocità media. In realtà le anse del fiume sono prodotte da effetti tridimensionali. Però se l'analisi richiede solamente il calcolo della portata, ad esempio, l'approssimazione di moto monodimensionale può essere sufficiente.

2.5 Il campo di accelerazione

Come si è visto in precedenza, è possibile descrivere il moto del fluido sia seguendo le singole particelle (descrizione lagrangiana o materiale) sia rimanendo fermi nello spazio ed osservando il passaggio di particelle differenti (descrizione euleriana o spaziale). In ciascuno dei due casi per applicare correttamente la seconda legge di Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ è necessario esprimere in modo appropriato l'accelerazione delle particelle. Nel primo caso si rappresenta l'accelerazione di ogni particella (P) come si fa nella dinamica del corpo rigido: $\vec{a} = \vec{a}(P, t)$. Nella descrizione euleriana, invece, si esprime il campo di accelerazione in funzione della posizione e del tempo senza seguire nel suo moto alcuna particella particolare: $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$.

L'accelerazione di una particella è rappresentata dalla variazione nel tempo del vettore velocità $\vec{V} = \vec{V}(P, t)$

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad (2.8)$$

Utilizzando l'espressione della derivata materiale l'accelerazione si esprime, nella descrizione spaziale, in funzione della velocità $\vec{V}(x, y, z, t)$:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} w \quad (2.9)$$

da cui si vede che in un moto non stazionario la velocità in un punto fisso dello spazio (occupato da particelle differenti) può variare nel tempo dando origine ad una parte dell'accelerazione della particella. Inoltre una particella

può accelerare per effetto della variazione di velocità che subisce spostandosi tra due punti nello spazio.

Le componenti scalari della relazione vettoriale (2.9) sono:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v + \frac{\partial u}{\partial z}w \\ a_y &= \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v + \frac{\partial v}{\partial z}w \\ a_z &= \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}u + \frac{\partial w}{\partial y}v + \frac{\partial w}{\partial z}w \end{aligned} \quad (2.10)$$

in cui a_x, a_y, a_z sono le componenti dell'accelerazione in direzione x, y, z .

Il primo termine della (2.9) si definisce accelerazione *locale*, mentre la parte di accelerazione rappresentata dal termine $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$ viene chiamata accelerazione *convettiva*.

2.6 Volume di controllo e sistema

Il comportamento di un fluido è descritto da alcune leggi fisiche fondamentali le quali sono espresse attraverso un opportuno sistema di equazioni. In particolare l'analisi di un campo fluidodinamico si basa sul principio di conservazione della massa, sulle leggi del moto di Newton e sui principi della termodinamica. Queste equazioni fondamentali possono essere applicate in modi diversi utilizzando i concetti di sistema e di volume di controllo.

Si definisce *sistema* un insieme di materia composto sempre dalle stesse particelle di fluido, il quale si può muovere ed interagire con l'ambiente circostante. Invece il *volume di controllo* è un volume nello spazio (un'entità geometrica indipendente dalla massa) attraverso il quale può scorrere del fluido. La scelta del volume di controllo non è unica, anzi, in generale, è del tutto arbitraria anche se alcune scelte del volume di controllo possono essere più utili di altre.

Un sistema è, come detto, una quantità di materia predefinita ed identificabile. Può essere composto da una grande massa, come l'aria contenuta nell'atmosfera terrestre, o da una massa infinitesima, come una singola particella di fluido. Le molecole che fanno parte del sistema vengono contrassegnate in qualche modo (ad esempio colorandole di rosso), realmente oppure solo idealmente, in modo da poterle identificare continuamente nel loro moto. Il sistema può interagire in vario modo con l'ambiente circostante, variando in continuazione la propria dimensione e forma, ma contenendo sempre la stessa massa.

Ad esempio una massa d'aria aspirata all'interno di un compressore può costituire un sistema. Può cambiare forma e dimensioni (viene compressa), la sua temperatura può variare ed infine può essere espulsa attraverso l'uscita del compressore.

In altri casi possiamo essere più interessati a valutare le azioni esercitate da un fluido su di un oggetto, piuttosto che seguire nel suo moto una determinata porzione di fluido (sistema). Si utilizza allora il concetto di volume di controllo identificando un volume particolare nello spazio ed analizzando il moto del fluido che si trova all'interno di questo volume o che lo attraversa. La relazione tra sistema e volume di controllo è simile per molti aspetti a quella tra le descrizioni lagrangiana ed euleriana. Nel sistema (e nella descrizione lagrangiana) si segue il fluido e lo si studia nel suo moto. Nel volume di controllo (e nella descrizione euleriana), invece, si osserva il fluido in una porzione dello spazio (ferma o in movimento).

Tutte le leggi fondamentali del moto di un fluido sono espresse nella forma di partenza considerando un sistema: “la massa di un sistema rimane costante” oppure “la variazione nel tempo della quantità di moto di un sistema è uguale alla somma di tutte le forze esterne agenti sul sistema”. Per utilizzare le equazioni del moto dal punto di vista applicativo è necessario riformularle in termini di volume di controllo. Si introduce a tal fine il teorema del trasporto di Reynolds.

2.7 Il teorema del trasporto di Reynolds

Tutte le leggi fisiche sono espresse in funzione di varie grandezze come ad esempio la velocità, l'accelerazione, la massa, la temperatura, la quantità di moto ecc. Indichiamo allora con B una di queste grandezze mentre con b ne indichiamo il valore per unità di massa. Si ha cioè:

$$B = mb$$

in cui m è la massa della porzione di fluido in esame. Ad esempio se B è proprio la massa m si ha di conseguenza $b = 1$; se $B = m\frac{V^2}{2}$ (energia cinetica della massa) allora $b = \frac{V^2}{2}$ (energia cinetica per unità di massa). Le grandezze B e b possono essere sia scalari che vettori. Se la quantità di moto di una massa di fluido è $\vec{B} = m\vec{V}$ allora $\vec{b} = \vec{V}$ rappresenta la quantità di moto per unità di massa, cioè la velocità.

La grandezza B si definisce proprietà *estensiva* mentre b è la proprietà *intensiva*. Mentre il valore di B è direttamente proporzionale alla massa di fluido considerata, il valore di b non dipende dalla massa. Il valore totale di

una proprietà estensiva posseduta dal sistema in un certo istante si indica con B_{SIS} e viene ottenuto dalla somma dei valori associati alle singole particelle del sistema (ciascuna di volume $d\mathcal{V}$ e di massa $\rho d\mathcal{V}$):

$$B_{SIS} = \int_{SIS} \rho b d\mathcal{V}$$

L'integrale è esteso a tutto il sistema, cioè, in generale, ad un volume che cambia nel tempo.

Quasi tutte le leggi che descrivono il moto di un fluido fanno comparire la variazione nel tempo di una proprietà estensiva di un sistema. Ad esempio si considera la variazione nel tempo della quantità di moto di un sistema oppure la variazione nel tempo della massa di un sistema. Di solito si trovano quindi termini come:

$$\frac{dB_{SIS}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{SIS} \rho b d\mathcal{V} \right) \quad (2.11)$$

Per potere esprimere le leggi del moto utilizzando il volume di controllo, serve un'espressione per la variazione nel tempo di una data proprietà estensiva del fluido contenuto nel volume di controllo B_{VC} invece che nel sistema:

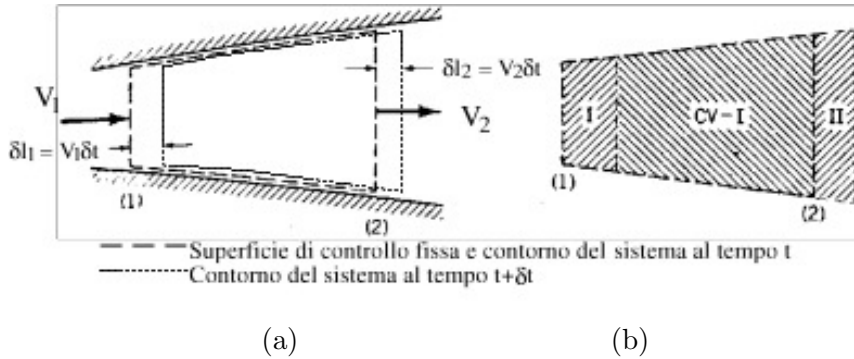
$$\frac{dB_{VC}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\int_{VC} \rho b d\mathcal{V} \right) \quad (2.12)$$

in cui l'integrale è esteso al volume di controllo considerato.

Nonostante le (2.11) e (2.12) sembrino simili, la loro interpretazione fisica è notevolmente diversa. Dal punto di vista matematico la differenza è rappresentata dal limite di integrazione. Formalmente invece indicheremo la derivata nella (2.11) con il simbolo D/Dt della derivata materiale per evidenziarne il carattere lagrangiano. La (2.11) rappresenta quindi la variazione nel tempo della proprietà B associata ad un sistema (cioè ad una data porzione di fluido) in movimento mentre la (2.12) rappresenta la variazione nel tempo della proprietà B relativa ad una regione dello spazio.

Anche nei casi in cui il volume di controllo ed il sistema occupano la stessa regione dello spazio, i due termini $\frac{dB_{VC}}{dt}$ e $\frac{dB_{SIS}}{dt}$ non sono necessariamente uguali. Il teorema del trasporto di Reynolds definisce la relazione tra la variazione nel tempo di una proprietà estensiva per il sistema e quella per il volume di controllo, cioè la relazione tra la (2.11) e la (2.12).

Una versione semplice del teorema di trasporto di Reynolds si può ottenere facilmente studiando il flusso monodimensionale attraverso un volume di controllo fisso, come indicato in figura 2.3 (a). Assumiamo come volume di controllo il volume fisso all'interno del condotto compreso fra le sezioni (1) e



45

Figura 2.3: Sistema e volume di controllo per il flusso attraverso un condotto di sezione variabile.

(2). Il sistema è costituito dal fluido che occupa il volume di controllo in un dato istante di tempo t . Al tempo successivo $t + \delta t$ il sistema si è spostato verso destra di una piccola quantità. Le particelle di fluido che si trovavano in corrispondenza della sezione (2) della superficie di controllo al tempo t si sono spostate verso destra della distanza $\delta l_2 = V_2 \delta t$ in cui V_2 è la velocità del fluido nella sezione (2). Allo stesso modo il fluido che si trova inizialmente nella sezione (1) si è spostato della distanza $\delta l_1 = V_1 \delta t$.

Supponiamo che il fluido attraversi in direzione normale le sezioni (1) e (2) e che V_1 e V_2 siano costanti sulle sezioni (1) e (2). Come indicato in figura 2.3 (b), il fluido uscito dal volume di controllo tra gli istanti t e $t + \delta t$ viene indicato con II, quello entrato con I ed il volume di controllo con VC. Il sistema al tempo t è composto dal fluido nella sezione VC (SIS = VC al tempo t), mentre al tempo $t + dt$ il sistema è composto dal fluido che occupa le sezioni (VC - I) + II. Invece il volume di controllo rimane sempre lo stesso, VC, in qualsiasi istante.

Data la proprietà estensiva B , il suo valore per il sistema all'istante t è:

$$B_{SIS}(t) = B_{VC}(t) \quad (2.13)$$

poiché infatti il sistema ed il fluido contenuto nel volume di controllo sono coincidenti al tempo t . Il valore al tempo $t + dt$ è dato da:

$$B_{SIS}(t + dt) = B_{VC}(t + dt) - B_I(t + dt) + B_{II}(t + dt)$$

Allora la variazione del valore di B nel sistema nell'intervallo di tempo dt divisa per questo stesso intervallo (con la consueta operazione di passaggio al limite per $dt \rightarrow 0$) è:

$$\begin{aligned} \frac{dB_{SIS}}{dt} &= \frac{B_{SIS}(t+dt) - B_{SIS}(t)}{dt} = \\ &= \frac{B_{VC}(t+dt) - B_I(t+dt) + B_{II}(t+dt) - B_{SIS}(t)}{dt} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ricordando che all'istante iniziale vale la (2.13), la (2.14) può essere riscritta come:

$$\frac{dB_{SIS}}{dt} = \frac{B_{VC}(t+dt) - B_{VC}(t)}{dt} - \frac{B_I(t+dt)}{dt} + \frac{B_{II}(t+dt)}{dt} \quad (2.15)$$

Il primo termine al secondo membro della (2.15) rappresenta la variazione nel tempo della quantità di B contenuta nel volume di controllo $\frac{dB_{VC}}{dt}$.

Il terzo termine al secondo membro della (2.15) indica la quantità della proprietà estensiva B uscita nel tempo dt dal volume di controllo attraverso la superficie di controllo. Infatti la quantità di B contenuta nella regione II è uguale alla quantità per unità di volume, ρb , moltiplicata per il volume $dV_{II} = A_2 \delta l_2 = A_2 V_2 dt$. Allora si ha:

$$B_{II}(t+dt) = (\rho_2 b_2)(dV_{II}) = \rho_2 b_2 A_2 V_2 dt \quad (2.16)$$

in cui b_2 e ρ_2 sono i valori di b e ρ assunti costanti su tutta la sezione (2). La quantità della proprietà B uscente dal volume di controllo nell'unità di tempo e di area è data da $\rho_2 V_2 b_2$ e viene definita *flusso* di B .

Allo stesso modo la quantità di B che entra nel volume di controllo attraverso la sezione (1) nell'intervallo dt corrisponde a quella contenuta nella regione I ed è espressa dalla quantità per unità di volume moltiplicata per il volume $dV_1 = A_1 \delta l_1 = A_1 (V_1 dt)$ ottenendo un'espressione analoga alla (2.16).

Combinando le (2.15) e (2.16) si ottiene la relazione tra la variazione nel tempo di B per il sistema e quella per il volume di controllo:

$$\frac{DB_{SIS}}{Dt} = \frac{dB_{VC}}{dt} + \rho_2 A_2 V_2 b_2 - \rho_1 A_1 V_1 b_1 \quad (2.17)$$

Questa è una versione del teorema di trasporto di Reynolds valida nelle ipotesi relative al problema di figura 2.3 cioè volume di controllo fisso con un solo lato di ingresso ed uno di uscita, con valori uniformi delle proprietà (densità, velocità) e con velocità normali alle sezioni (1) e (2). Si vede che la variazione nel tempo di B nel sistema non è necessariamente uguale a quella nel volume di controllo poiché infatti l'ammontare di B che entra nel volume di controllo, $\rho_1 A_1 V_1 b_1$, non deve essere necessariamente uguale a quello che esce $\rho_2 A_2 V_2 b_2$.

Se la velocità del fluido non è diretta come la normale alle sezioni attraverso le quali il fluido entra o esce dal volume di controllo, allora il flusso di B verrà espresso attraverso la componente normale della velocità. Indicando con \vec{n} la normale uscente dalla superficie di controllo, il flusso di B uscente dal volume di controllo è espresso come $\rho_2 (\vec{V} \cdot \vec{n})_2 b_2$ mentre quello entrante è $-\rho_1 (\vec{V} \cdot \vec{n})_1 b_1$. Il segno $-$ tiene infatti conto del verso discorde tra la normale e la velocità nella sezione 1.

La (2.17) si può scrivere allora come:

$$\frac{DB_{SIS}}{Dt} = \frac{dB_{VC}}{dt} + \rho_2 A_2 (\vec{V} \cdot \vec{n})_2 b_2 + \rho_1 A_1 (\vec{V} \cdot \vec{n})_1 b_1 \quad (2.18)$$

In generale il volume di controllo può avere più ingressi ed uscite. Oppure le proprietà del fluido possono non essere costanti sulle sezioni. Dal punto di vista concettuale possiamo pensare che tutti gli ingressi siano raggruppati in I e tutte le uscite in II. L'ammontare totale della proprietà B che attraversa la superficie di controllo verrà allora espresso mediante un integrale e la (2.18) diventa:

$$\frac{DB_{SIS}}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b \, d\mathcal{V} + \int_{SC} \rho b \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS \quad (2.19)$$

in cui è stata coinvolta l'intera superficie di controllo SC in quanto il prodotto scalare $\vec{V} \cdot \vec{n}$ risulta nullo per le porzioni di essa che non sono attraversate, né in ingresso né in uscita, dal fluido. Il prodotto $\rho b \vec{V} \cdot \vec{n}$ rappresenta la portata di B per unità di area attraverso la superficie di controllo e viene definito *flusso* della proprietà B .

La (2.19) è l'espressione generale del teorema del trasporto di Reynolds per un volume di controllo fisso e non deformabile.

Partendo dalla (2.19) è possibile ricavare altre forme per il Teorema del Trasporto di Reynolds. In particolare, utilizzando il teorema della divergenza per l'ultimo termine, si ottiene:

$$\frac{DB_{SIS}}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} \rho b \, d\mathcal{V} + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho b \vec{V}) \, d\mathcal{V} \quad (2.20)$$

ovvero

$$\frac{DB_{SIS}}{Dt} = \int_{VC} \left[\frac{\partial(\rho b)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho b \vec{V}) \right] d\mathcal{V} \quad (2.21)$$

Infine, ricordando che l'ultimo termine al secondo membro nella (2.21) si può scrivere come $\nabla \cdot (\rho b \vec{V}) = \vec{V} \cdot \nabla(\rho b) + \rho b \nabla \cdot \vec{V}$, e tenendo conto dell'espres-

sione della derivata materiale (2.7), si ha:

$$\frac{DB_{SIS}}{Dt} = \int_{VC} \left[\frac{D(\rho b)}{Dt} + \rho b \nabla \cdot \vec{V} \right] dV \quad (2.22)$$

L'espressione (2.22) viene ricavata qui di seguito in maniera alternativa utilizzando il concetto di mappa del moto introdotto in precedenza. Consideriamo un corpo deformabile \mathcal{B} , ovvero un insieme di particelle di fluido al tempo t . Indichiamo con \mathcal{D} la configurazione del corpo \mathcal{B} nello spazio euclideo \mathcal{E} . Tale configurazione è espressa dalla mappa del moto χ , continua e invertibile, per cui si ha:

$$\mathcal{D} = \chi(\mathcal{B}, t) \quad \mathbf{x} = \chi(\mathbf{P}, t) = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.23)$$

in cui \mathbf{P} è la particella che, al tempo t , occupa la posizione \mathbf{x} in \mathcal{E} e si è indicato con \mathbf{X} la particella nella descrizione referenziale. Valgono anche le relazioni inverse:

$$\mathcal{B} = \chi^{-1}(\mathcal{D}, t) \quad \mathbf{P} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.24)$$

Supponiamo di volere calcolare la variazione temporale dell'integrale di una proprietà fisica del fluido al tempo t^n :

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}, t^n)} f(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.25)$$

siccome la configurazione χ del corpo \mathcal{B} varia nel tempo, non è immediatamente possibile trasportare la derivata materiale dentro l'integrale.

Per fare ciò si deve prendere in considerazione un volume \mathcal{V}_o non variabile nel tempo, ad esempio quello al tempo t_o . E' possibile così esprimere l'elemento di volume come $dV = J dV_o$ in cui J è lo Jacobiano della trasformazione tra $\chi(\mathcal{B}, t^n)$ e $\chi(\mathcal{B}, t_o)$:

$$J = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) \quad (2.26)$$

Si può dimostrare che:

$$\frac{dJ}{dt} = J \nabla \cdot \vec{V} \quad (2.27)$$

con \vec{V} campo di velocità. Quindi si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}, t^n)} f(\mathbf{x}, t) dV &= \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B}, t_o)} f[\chi(\mathbf{X}, t), t] J(\mathbf{X}, t) dV_o = \\ &= \int_{\chi(\mathcal{B}, t_o)} \left(\frac{Df}{Dt} J + f \frac{dJ}{dt} \right) dV_o = \int_{\chi(\mathcal{B}, t_o)} \left(\frac{Df}{Dt} + f \nabla \cdot \vec{V} \right) J dV_o = \end{aligned}$$

$$= \int_{\chi(\mathcal{B}, t^n)} \left(\frac{Df}{Dt} + f \nabla \cdot \vec{V} \right) dV \quad (2.28)$$

che corrisponde alla (2.22) per $f = \rho b$.

2.8 Traiettorie, linee di corrente, linee di fumo

Nonostante il moto di un fluido possa essere molto complesso, vi sono tuttavia alcuni concetti utili nella visualizzazione e nell'analisi del campo fluidodinamico. Definiamo a tal fine le linee di corrente, le linee di fumo e le traiettorie. Le linee di corrente sono spesso utilizzate negli sviluppi analitici, mentre le linee di fumo e le traiettorie hanno delle applicazioni negli esperimenti.

La *traiettoria* di una particella è il percorso descritto nello spazio da una particella materiale in un dato intervallo temporale. Per visualizzare la traiettoria si può ad esempio immettere nel campo fluidodinamico una particella riflettente e scattare una fotografia con un tempo di esposizione lungo. Dal punto di vista analitico la traiettoria di una particella che si trova nel punto $\vec{X}_o = (X_{o1}, X_{o2}, X_{o3})$ al tempo t_o può essere ottenuta dal campo di velocità $\vec{V}(\vec{x}, t)$ risolvendo le equazioni differenziali:

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.29)$$

con la condizione $x_i = X_{oi}$ per $t = t_o$.

Una *linea di corrente* al tempo t^n è quella curva alla quale è tangente il vettore velocità in ciascun punto del campo in quell'istante. Nel caso di moto stazionario non si ha alcuna variazione nel tempo delle grandezze, compresa la direzione del vettore velocità, e quindi le linee di corrente sono delle linee fisse nello spazio. In caso di moto non stazionario, l'andamento delle linee di corrente può variare nel tempo. Per visualizzare le linee di corrente in un dato istante, si può fotografare il campo fluidodinamico con un'esposizione molto breve dopo aver disseminato nel fluido una grande quantità di particelle riflettenti. Ciascuna particella produrrà sulla foto un tratto rettilineo che approssima la tangente alla linea di corrente in quel punto del campo e in quell'istante di tempo. Dal punto di vista matematico l'andamento della linea di corrente al tempo t^n passante per il punto $\vec{x}_o = (x_{o1}, x_{o2}, x_{o3})$ si ottiene risolvendo il sistema di equazioni:

$$\frac{dx_i}{ds} = V_i(x_1, x_2, x_3, t^n) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.30)$$

con la condizione $x_i = x_{oi}$ per $s = 0$.

Il parametro s lungo la linea di corrente non va confuso con il tempo (presente invece nelle equazioni della traiettoria) il quale è tenuto fisso nell'integrazione della (2.30) in modo che le curve risultanti siano le linee di corrente all'istante t^n . Queste, in genere, potranno variare da istante ad istante. La (2.30) è l'equazione che esprime le linee tangenti al campo di velocità. Ad esempio, in un moto bidimensionale, la pendenza $\frac{dy}{dx}$ della linea di corrente deve essere uguale alla tangente all'angolo formato dal vettore velocità con l'asse delle x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} \quad (2.31)$$

Se i valori della velocità sono noti in tutto il campo in un dato istante di tempo, la (2.31) può essere integrata per ottenere l'espressione della linea di corrente.

La *linea di fumo* per il punto \vec{x}_o al tempo t è rappresentata dall'insieme delle posizioni al tempo t di tutte le particelle che in un istante di tempo precedente $\tau \leq t$ hanno occupato la posizione \vec{x}_o . La linea di fumo rappresenta la curva formata da tutte le particelle (di fumo, di inchiostro ecc.) che vengono iniettate continuamente nel punto fisso \vec{x}_o e si muovono senza diffondersi, compreso tra 0 e t . Una particella si trova sulla linea di fumo se aveva attraversato il punto \vec{x}_o in un certo istante di tempo τ tra 0 e t .

Se le componenti della velocità non dipendono dal tempo, allora le traiettorie coincidono con le linee di corrente in quanto il parametro s lungo la linea di corrente può essere considerato come il tempo.

In una data posizione \vec{x} al tempo t , la linea di corrente passante per \vec{x} , la traiettoria della particella che occupa la posizione \vec{x} e la linea di fumo attraverso \vec{x} hanno la stessa tangente. Nel caso di moto stazionario le tre curve coincidono mentre sono in genere distinte per moti non-stazionari.

Consideriamo, per esempio, il campo di velocità espresso da:

$$u = \frac{x}{1+t} \quad ; \quad v = y \quad ; \quad w = 0$$

a) Determiniamo la linea di corrente al tempo t^n che passa per il punto (x_o, y_o, z_o) . Dalla (2.30) si ha:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{x}{1+t} \text{ integrando si ha: } \int_{x_o}^x \frac{dx}{x} = \frac{1}{1+t^n} \int_0^s ds$$

$$\ln\left(\frac{x}{x_o}\right) = \frac{s}{1+t^n} \text{ ed infine: } x = x_o e^{\frac{s}{1+t^n}}.$$

Analogamente:

$$\frac{dy}{ds} = y \quad ; \quad \int_{y_o}^y \frac{dy}{y} = \int_0^s ds \quad ; \quad \ln\left(\frac{y}{y_o}\right) = s \quad ; \quad y = y_o e^s$$

$$\frac{dz}{ds} = 0 \quad ; \quad z = z_o$$

Eliminando il parametro s si ottiene la curva nel piano $z = z_o$:

$$\frac{y}{y_o} = \left(\frac{x}{x_o} \right)^{(1+t^n)}$$

b) Determiniamo la traiettoria di una particella che si trova in (X,Y,Z) al tempo t_o . Dalla (2.29) si ha:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t} \text{ da cui: } \int_X^x \frac{dx}{x} = \int_{t_o}^t \frac{dt}{1+t};$$

$$\ln \left(\frac{x}{X} \right) = \ln \left(\frac{1+t}{1+t_o} \right) \quad ; \quad x = X \left(\frac{1+t}{1+t_o} \right)$$

Analogamente

$$\frac{dy}{dt} = y \quad ; \quad \int_Y^y \frac{dy}{y} = \int_{t_o}^t dt \quad ; \quad y = Y e^{(t-t_o)}$$

$$\frac{dz}{dt} = 0 \quad ; \quad z = Z$$

Eliminando t dalle espressioni di x,y,z, si ottiene come traiettoria della particella la curva nel piano $z = Z$.

$$y = Y e^{\left(\frac{x-X}{X} \right)}$$

avendo posto $t_o = 0$.

c) Determiniamo l'espressione della linea di fumo attraverso (x_o, y_o, z_o) al tempo t. Dall'espressione della traiettoria si individuano le posizioni occupate nei vari istanti t dalla particella che si trovava in (X,Y,Z) al tempo t_o :

$$x = X \frac{1+t}{1+t_o} \quad ; \quad y = Y e^{(t-t_o)} \quad ; \quad z = Z$$

da cui si determina qual è la particella che si trovava in (x_o, y_o, z_o) al tempo τ , precedente t:

$$X = x_o \frac{1+t_o}{1+\tau} \quad ; \quad Y = \frac{y_o}{e^{(\tau-t_o)}} \quad ; \quad Z = z_o$$

Quindi le posizioni occupate da questa particella negli istanti di tempo successivi t sono espresse da:

$$x = x_o \left(\frac{1+t_o}{1+\tau} \right) \quad ; \quad y = y_o \frac{e^{(t-t_o)}}{e^{(\tau-t_o)}} \quad ; \quad z = z_o$$

Eliminando il parametro τ si ottiene la curva nel piano $z = z_o$:

$$\frac{y}{y_o} = e^{(t+1)\left(1-\frac{x_o}{x}\right)}$$

2.9 Cinematica di una particella di fluido

Analizziamo dal punto di vista matematico il moto di una particella di fluido all'interno del campo fluidodinamico. In fig. 2.4 è schematizzato un elementino di fluido di forma cubica il quale, trovandosi inizialmente in una certa posizione, si sposta in un altro punto dopo un certo intervallo di tempo δt . Nel campo si avrà una variazione di velocità in genere complessa, quindi l'elemento di fluido non solo traslerà da una posizione ad un'altra, ma anche ruoterà, varierà il proprio volume (deformazione lineare) e subirà variazioni di forma (deformazione angolare). Nonostante questi movimenti e deformazioni avvengano contemporaneamente, possiamo considerarli separatamente l'uno dall'altro, come riportato in figura 2.4. Il moto e la deformazione dell'elemento sono strettamente connessi alla velocità ed alla variazione di velocità nel campo.

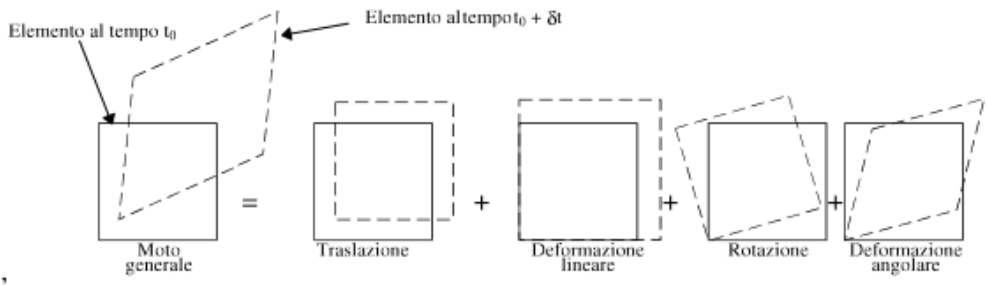


Figura 2.4: Tipi di moto e di deformazione per un elemento fluido.

Cerchiamo ora di capire in che modo il moto e la deformazione di un elementino di fluido dipendono dal campo di velocità.

2.9.1 Moto lineare e deformazione

Il tipo di moto più semplice per un elemento di fluido è la traslazione (figura 2.5). In un piccolo intervallo di tempo δt , la particella che si trova in O si sposta nel punto O' . Se tutti i punti dell'elemento hanno la stessa velocità, come si verifica in assenza di differenze di velocità, allora l'elemento trasla semplicemente da una posizione all'altra.

Nel caso in cui il gradiente della velocità è diverso da zero, l'elemento subirà in genere anche una deformazione ed una rotazione mentre si muove.

In generale il campo di velocità dipende da tutte le variabili spaziali e dal tempo. Per meglio comprendere gli effetti legati alla dipendenza da ciascuna delle variabili spaziali esaminiamo alcuni moti semplici nei quali la velo-

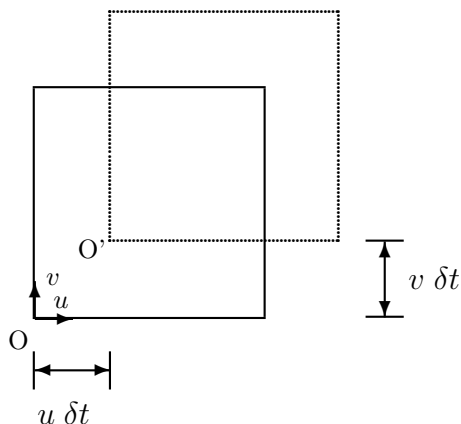


Figura 2.5: Traslazione di un elemento fluido nel tempo δt .

cità è funzione solo di una o due variabili spaziali. Assumiamo, ad esempio, $u = u(x)$, $v = w = 0$ per comprendere l'effetto della sola componente $\frac{\partial u}{\partial x}$ del gradiente di velocità su un piccolo cubo di lati δx , δy e δz .

Come è mostrato in figura 2.6 (a), la componente della velocità in direzione x in tutti i punti del lato OB è u . Allora nei punti del lato AC , separato da OB della piccola distanza δx , la stessa componente può essere espressa come $u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x$. Questa differenza di velocità produce una deformazione in direzione x dei lati dell'elemento di volume pari a $\frac{\partial u}{\partial x} \delta x \delta t$ durante l'intervallo δt in cui la linea OA si deforma in OA' e BC in BC' (figura 2.6 (b)). La corrispondente variazione di volume (rettangolo $AA'C'C$ in figura 2.6 (b)) è:

$$\delta \mathcal{V} = \frac{\partial u}{\partial x} \delta x \delta t \delta y \delta z.$$

La variazione nel tempo, per unità di volume, dell'ampiezza del volume per effetto del gradiente di velocità $\frac{\partial u}{\partial x}$ è:

$$\frac{1}{\mathcal{V}} \frac{d(\delta \mathcal{V})}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta t}{\delta t} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.32)$$

In modo analogo, nel caso generale in cui fossero presenti anche le componenti $\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial w}{\partial z}$, cioè per un moto in cui $u = u(x)$, $v = v(y)$, $w = w(z)$, si avrebbe:

$$\frac{1}{\mathcal{V}} \frac{d(\delta \mathcal{V})}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \quad (2.33)$$

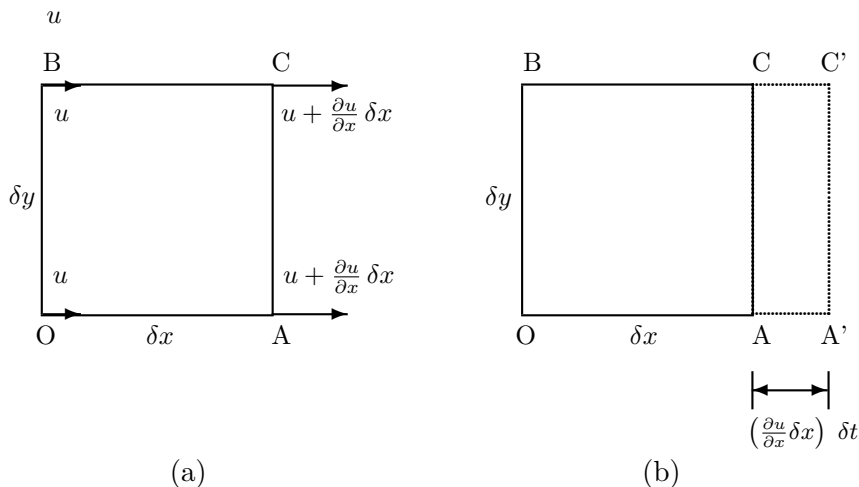


Figura 2.6: Velocità (a) e deformazione lineare (b) di una particella.

Questa variazione percentuale di volume per unità di tempo si chiama *velocità di dilatazione volumetrica* (o lineare) e corrisponde alla divergenza del vettore velocità.

Il volume dell'elemento può quindi cambiare quando questo si sposta in punti diversi del campo. Nel caso di fluidi incomprimibili la dilatazione volumetrica è nulla, quindi l'elemento si può allungare in alcune direzioni ed accorciare in altre in modo però che il volume totale non cambi. Le variazioni di velocità rappresentate da $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ producono semplicemente una deformazione lineare dell'elemento senza, cioè, che cambi l'orientamento dei lati dell'elemento. Le derivate incrociate $\frac{\partial u}{\partial y}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}$ ecc. fanno ruotare l'elemento ed in genere producono anche una deformazione angolare.

2.9.2 Moto angolare e deformazione

Studiamo ora un campo in cui si ha solo $u = u(y)$, $v = v(x)$, $w = 0$. Consideriamo per semplicità il moto nel piano x-y, anche se il risultato si può facilmente generalizzare.

La variazione di velocità che produce sia la rotazione che la deformazione angolare è indicata in figura 2.7 (a). In un piccolo intervallo di tempo δt i segmenti OA e OB ruotano degli angoli $\delta\alpha$ e $\delta\beta$ fino alle nuove posizioni OA' e OB' (figura 2.7 (b)).

La velocità angolare del segmento OA, ω_{OA} , è data da:

$$\omega_{OA} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \alpha}{\delta t}$$

Per piccole rotazioni si ha:

$$\tan \delta \alpha \cong \delta \alpha = \frac{AA'}{OA} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} \delta x\right) \delta t}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \delta t \quad (2.34)$$

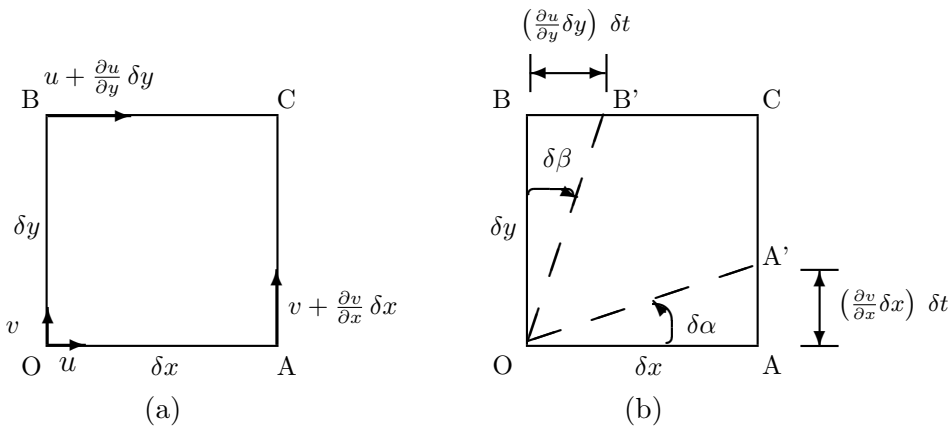


Figura 2.7: Velocità (a) e deformazione angolare (b) di una particella.

e quindi:

$$\omega_{OA} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) \delta t}{\delta t} \right] = \frac{\partial v}{\partial x}$$

si noti che per $\frac{\partial v}{\partial x}$ positive ω_{OA} risulta antiorario. In modo analogo per OB si ha:

$$\omega_{OB} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta \beta}{\delta t}$$

$$\tan \delta \beta \cong \delta \beta = \frac{BB'}{OB} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \delta y\right) \delta t}{\delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} \delta t \quad (2.35)$$

$$\omega_{OB} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \delta t}{\delta t} \right] = \frac{\partial u}{\partial y}$$

In questo caso a $\frac{\partial u}{\partial y}$ positiva corrisponde ω_{OB} oraria. La rotazione, ω_z , dell'elemento intorno all'asse z è data per definizione dalla media delle due velocità ω_{OB} e ω_{OA} delle due linee ortogonali OA ed OB. Allora, assumendo come positivo il verso di rotazione antiorario, si ha:

$$\omega_z = \frac{\omega_{OA} - \omega_{OB}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.36)$$

Nel caso in cui sono presenti le altre derivate della velocità è possibile valutare in modo analogo la rotazione dell'elemento di fluido rispetto agli altri due assi coordinati:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (2.37)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.38)$$

Le tre componenti $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ possono essere usate per esprimere il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \quad (2.39)$$

Esaminando le espressioni precedenti si vede che $\vec{\omega}$ è uguale alla metà del rotore del vettore velocità:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{V} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \times \vec{V} \quad (2.40)$$

Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \det \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

La *vorticità* $\vec{\zeta}$ è definita come il rotore della velocità e corrisponde al doppio della velocità angolare:

$$\vec{\zeta} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = 2\vec{\omega} \quad (2.41)$$

Dalla (2.36) si vede che nel caso in cui $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$ la velocità angolare ω_z è nulla. Più in generale se in tutto il campo si ha $\vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$ allora la velocità

angolare (e quindi la vorticità) è ovunque nulla. In questo caso il moto viene detto *irrotazionale*. Si vedrà più avanti che la condizione di moto irrotazionale semplifica molto l'analisi del campo fluidodinamico.

Dalla figura 2.7 (b) si vede che le derivate $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ oltre ad essere collegate alla rotazione dell'elemento, possono produrre anche una variazione degli angoli formati dai lati dell'elemento (variazione di forma). La variazione dell'angolo formato dai lati OA ed OB, inizialmente retto, è detta deformazione di taglio, $\delta\gamma$, ed è pari a (vedi fig. 2.7 (a)):

$$\delta\gamma = \delta\alpha + \delta\beta$$

in cui $\delta\gamma$ è considerato positivo se l'angolo retto originario diminuisce.

La variazione nel tempo di $\delta\gamma$ è detta *velocità di deformazione di taglio* o velocità di deformazione angolare ed indicata con $\dot{\gamma}$. Ricordando che gli angoli $\delta\alpha$ e $\delta\beta$ sono collegati alle derivate della velocità dalle (2.34) e (2.35):

$$\dot{\gamma} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\gamma}{\delta t} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{(\partial v / \partial x) \delta t + (\partial u / \partial y) \delta t}{\delta t} \right] = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.42)$$

La velocità di deformazione angolare è collegata ad una corrispondente tensione di taglio che produce la variazione di forma dell'elemento. Nel caso in cui $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, dalla (2.42) si ottiene $\dot{\gamma} = 0$ e quindi l'elemento di fluido ruota come un corpo rigido senza deformarsi altrimenti la rotazione avviene con una variazione dell'angolo $A\hat{O}B$.

Come si è visto l'analisi del moto elementare di una particella coinvolge le derivate di tutte le componenti della velocità rispetto a tutte le direzioni. Quindi si hanno nove grandezze del tipo $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ che esprimono le componenti del tensore gradiente di velocità.

Tale tensore può essere espresso come somma di una parte simmetrica (un tensore è simmetrico se $a_{ij} = a_{ji}$) e di una parte antisimmetrica (un tensore è antisimmetrico se $a_{ij} = -a_{ji}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= e_{ij} + \Omega_{ij} \end{aligned} \quad (2.43)$$

avendo indicato con e_{ij} la parte simmetrica e con Ω_{ij} la parte antisimmetrica del tensore gradiente di velocità. Il tensore Ω_{ij} è collegato alla velocità angolare

(2.40) dalla relazione:

$$\omega_k = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Omega_{ij} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = -\frac{1}{4} \left[\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (2.44)$$

in cui simbolo ϵ_{ijk} viene chiamato *tensore permutazione* o *tensore di Ricci* (vedere nota ¹).

Il penultimo termine nella (2.44) si può modificare nel modo seguente:

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\epsilon_{jik} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (2.45)$$

Quindi la (2.44) diventa:

$$\omega_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{2}\vec{\zeta} \quad (2.46)$$

dalla quale si ottiene un altro modo di calcolare il rotore di un vettore.

Il tensore Ω_{ij} si definisce *tensore velocità angolare* mentre e_{ij} è indicato come *tensore velocità di deformazione*. Se il moto della particella è dato da una traslazione più una rotazione rigida, la velocità di deformazione è nulla e quindi il tensore e_{ij} è nullo.

Gli elementi sulla diagonale principale di e_{ij} rappresentano le velocità di deformazione lineare mentre quelli fuori diagonale esprimono la velocità di deformazione angolare.

2.10 Esercizi

- 1) In un dato campo fluidodinamico la velocità è espressa da $\vec{V} = (3x + 2y)\vec{i} + (2x + 3z)\vec{j} + (2y + z)\vec{k}$. Calcolare il modulo della velocità nel punto $(x = 1, y = 2, z = 2)$. [12.21 m/s]
- 2) In un dato campo fluidodinamico la velocità è espressa da $\vec{V} = (3x + 2y)\vec{i} + (2x + 3z)\vec{j} + (2y + z)\vec{k}$ e la temperatura è $T = (x - 2y + t)$. Calcolare la variazione rispetto al tempo della temperatura della particella che, in un dato istante, occupa la posizione spaziale $(x=1, y=1, z=1)$. [-4 K/s]

¹Per il tensore ϵ_{ijk} si ha:

$\epsilon_{ijk} = 1$ se la terna i, j, k forma una permutazione ciclica della sequenza 1,2,3

$\epsilon_{ijk} = -1$ se la terna i, j, k forma una permutazione anticiclica della sequenza 1,2,3

$\epsilon_{ijk} = 0$ altrimenti (ad esempio quando due indici assumono lo stesso valore)

Quindi, permutando gli indici i e j , si ha: $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$

- 3) La velocità del fluido in un moto bidimensionale è espressa da $\vec{V} = 3(x^2 - y^2)\vec{i} - 6xy\vec{j}$. Calcolare il modulo dell'accelerazione della particella che si trova nel punto $x=y=1\text{m}$. [50.9 m/s²]
- 4) In un campo fluidodinamico bidimensionale la densità, nella descrizione spaziale, è espressa da $\rho = x_1 - x_2 t$. La legge del moto è $x_1 = X_2 + t X_1$; $x_2 = X_1$. Ricavare l'espressione della densità nella descrizione materiale. [$\rho = X_2$]
- 5) Nello stesso caso dell'esercizio precedente ricavare le componenti della velocità di una generica particella. [$u = X_1$; $v = 0$]
- 6) Ancora in riferimento all'esercizio 4, calcolare la variazione rispetto al tempo della densità in un punto dello spazio e la variazione rispetto al tempo della densità di una particella di fluido. [$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -x_2$, $\frac{D\rho}{Dt} = 0$]
- 7) In un campo fluidodinamico bidimensionale le componenti della velocità sono $u = 2x - y + t$; $v = 4x + 1$. Calcolare il valore della componente a_x dell'accelerazione di una particella che si trova nel punto $x = 3, y = 1$ all'istante $t = 2$. [$a_x = 2 \text{ m/s}^2$]
- 8) In un campo fluidodinamico bidimensionale le componenti della velocità sono $u = 2x + 1$; $v = y + 2$. Calcolare l'inclinazione rispetto all'asse x della linea di corrente passante per il punto $x = 2, y = 1$. [0.54 rad]
- 9) In un campo fluidodinamico bidimensionale le componenti della velocità sono $u = 2x + 1$; $v = x - y$; $w = 3x + 2y$. Calcolare la velocità di dilatazione volumetrica. [1 s⁻¹]
- 10) Nello stesso caso dell'esercizio precedente ricavare la componente secondo z della vorticità e la componente secondo x della velocità angolare. [1 rad/s ; 1 rad/s]