

ATOMIZZAZIONE

ing. Raffaele Ragucci

Napoli 21 maggio 2012

SOMMARIO

| | |
|---|-----------|
| Parte 1 Atomizzazione: Definizioni e Principi Generali | 1 |
| Introduzione | 1 |
| Tensione Superficiale ed Energia Superficiale | 2 |
| Efficienza dell' Atomizzazione | 5 |
| Determinazione del Valore della Tensione Superficiale | 6 |
| Onde Superficiali | 8 |
| Gruppi adimensionali | 11 |
| Classificazione dei regimi di atomizzazione con la temperatura | 12 |
| | |
| Parte 2 ATOMIZZAZIONE DI GOCCE, GETTI E LAMINE | 15 |
| Introduzione | 15 |
| Meccanismi di Rottura di Gocce | 15 |
| Weber critico | 18 |
| Tempo di Rottura delle gocce | 21 |
| Regimi di atomizzazione di un getto liquido | 24 |
| Lamine coniche | 30 |
| | |
| PARTE 3 ASPETTI TECNOLOGICI | 32 |
| Distribuzione delle dimensioni delle gocce in uno spray | 32 |
| Principali funzioni di distribuzione delle dimensioni delle gocce | 34 |
| Altri parametri di uno spray | 37 |
| Classificazione degli ugelli | 37 |
| Quadro sinottico | 41 |
| Riferimenti e note | 42 |
| | |
| APPENDICI | 43 |
| Appendice A Viscosità di alcuni liquidi notevoli | 43 |
| Appendice B Propagazione di un'onda all'interfaccia liquido-gas | 43 |
| Appendice C Propagazione di perturbazioni su un getto liquido | 46 |

PARTE 1

ATOMIZZAZIONE: DEFINIZIONI E PRINCIPI GENERALI

Introduzione

In un processo di combustione la necessità di atomizzare un liquido nasce dalla opportunità di aumentare la superficie dell'interfaccia liquido-gas al fine di migliorare l'efficienza dello scambio di calore, materia e quantità di moto tra le due fasi e, dunque, dell'intero processo.

Lo studio dei processi di atomizzazione, ovvero della teoria e della tecnica di frammentazione di un liquido in particelle, può essere considerata una vera e propria disciplina a se stante.

Infatti, le applicazioni in cui si fa uso di dispositivi di atomizzazione vanno ben oltre i soli processi di combustione. Spray di liquidi sono utilizzati oltre che in tali processi (per iniettare il combustibile in bruciatori di fornaci, turbine, motori a combustione interna, razzi, ecc.) anche in agricoltura, medicina, processi di deposizione, verniciatura, sistemi di raffreddamento, ecc.

Le esigenze di tali applicazioni non sono, ovviamente, le stesse e differenti sono dunque i requisiti richiesti per una ottimizzazione dei processi e le configurazioni e le strategie impiegate per soddisfarli. La grande varietà di sistemi utilizzati nella pratica per la realizzazione di spray e la peculiare difficoltà di dare una formulazione matematica ai processi di atomizzazione in condizioni di interesse per le applicazioni rende necessario adottare un approccio largamente empirico alla trattazione dei problemi.

Nel seguito si cercherà di introdurre alcune nozioni di base e di delineare le principali problematiche che possono presentarsi nello studio o nella configurazione di un sistema di atomizzazione con particolare riguardo ai sistemi di combustione.

In questa lezione saranno introdotti alcuni concetti generali che sono utili nella comprensione generale delle problematiche legate ai processi di frammentazione di strutture liquide. Saranno inoltre definiti i parametri fisici e reologici che influenzano maggiormente lo sviluppo e l'efficacia del processo.

Nella pratica comune il processo di atomizzazione consiste nella frammentazione di strutture liquide quali getti, lamine e gocce realizzata trasformando energia (tipicamente meccanica) in energia superficiale. Il caso più semplice di un processo di atomizzazione è quello che ha luogo nella rottura di una colonna liquida all'uscita di un condotto cilindrico

o di un foro. Nella esposizione sembrerebbe dunque logico cominciare a trattare tale caso e passare poi a considerare le eventuali rotture secondarie delle strutture che vengono formate nella rottura (primaria) del getto come gocce, filamenti e lamine. In realtà è sembrato più opportuno illustrare, nella parte 2, i processi di atomizzazione seguendo un ordine crescente di complessità che parte dalle gocce sferiche e giunge fino ai sistemi complessi passando per le strutture cilindriche e le lamine piane e coniche.

Nella parte 3 si illustreranno i tipi principali di atomizzatore utilizzati nei sistemi pratici con riferimento ai loro campi di applicabilità ed ai criteri di scelta. Inoltre si definiranno i principali parametri sintetici utilizzati nella descrizione delle caratteristiche degli ugelli e degli spray.

Tensione Superficiale ed Energia Superficiale

La rottura di una struttura liquida (goccia, getto, lamina) avviene di solito per l'instaurarsi all'interfaccia tra liquido e gas di oscillazioni ondose che, in particolari condizioni, possono amplificarsi fino a portare alla disgregazione della struttura stessa o, comunque, favoriscono il distacco di porzioni di liquido da essa.

Energia cinetica, del getto liquido stesso o di una corrente gassosa che interagisce con esso, o energia meccanica, fornita per mezzo di dispositivi vibranti o in movimento, viene utilizzata al fine di promuovere tali oscillazioni e l'instaurarsi di un regime di atomizzazione.

In tale processo le forze capillari, legate alla tensione superficiale, e le forze inerziali, dovute alla velocità relativa tra le due fasi, sono la causa dell'instaurarsi delle oscillazioni mentre la viscosità agisce in maniera da ridurre le instabilità della struttura liquida ritardandone la sua disgregazione e incrementando le dimensioni delle strutture formate. In tal senso i parametri che intervengono in tale processo sono sostanzialmente la tensione superficiale (σ), la densità del mezzo (ρ) e la sua viscosità.

A causa della sua rilevanza nei processi di disgregazione di strutture liquide di introdurrà nel seguito il concetto di tensione superficiale e ne verrà data una definizione operativa.

Le forze di attrazione reciproca delle molecole (forze capillari) possono essere considerate la causa dell'insorgere della tensione superficiale. Uno schema esemplificativo di tali forze è rappresentato nella Fig. 1.

Una molecola del liquido lontana dalla superficie di discontinuità è attirata da tutte le molecole nel suo intorno. L'insieme delle forze è disposto isotropicamente per cui la sua

risultante è nulla. Al contrario una molecola sulla superficie di discontinuità viene attratta solo dalle molecole all'interno del liquido per cui la forza risultante è perpendicolare alla superficie rivolta verso il liquido. Le molecole tendono quindi ad "affondare" nel liquido e conseguentemente la superficie di discontinuità tende a ridursi. La superficie può essere pensata come una membrana elastica in cui si esercita una tensione non proporzionale all'estensione della superficie (tensione superficiale).

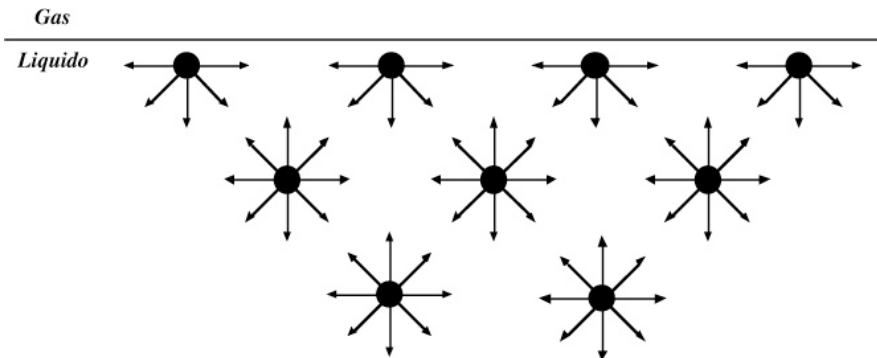


Fig. 1 Schema delle forze agenti all'interfaccia tra un liquido ed un gas che danno origine alla tensione superficiale.

Una definizione più formale della tensione superficiale è la seguente:

- La tensione superficiale è la forza per unità di lunghezza che si esercita nel piano tangente alla superficie di discontinuità liquido-gas su un arbitrario segmento della superficie.

Un semplice sistema sperimentale che permette di illustrare l'effetto della presenza della tensione superficiale (ed anche di misurarla) è costituito da una struttura rettangolare filiforme in cui un lato è scorrevole (Fig. 2).

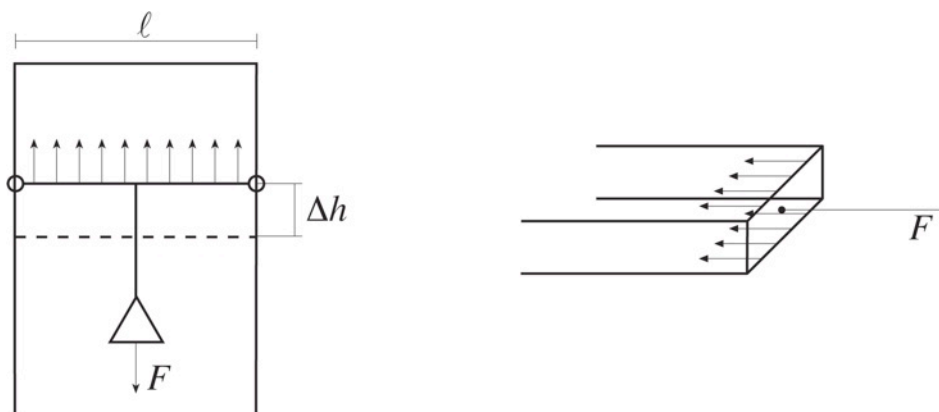


Fig. 2

Dopo l'immersione della struttura in un liquido al suo interno si forma una lamina che tende a ritrarsi. Se al lato scorrevole viene applicata una forza F , che si oppone alla riduzione della lamina e che la stabilizza, si può dimostrare che F è linearmente proporzionale alla lunghezza del lato scorrevole. La costante di proporzionalità si pone uguale a due volte la tensione superficiale (perché la forza che si oppone alla tensione superficiale agisce sulle due facce della lamina). All'equilibrio la forza F è data dall'espressione:

$$F = 2\sigma\ell \quad (1)$$

È possibile anche una interpretazione dell'azione della tensione superficiale in termini di energia superficiale. Consideriamo, infatti, una estensione, dovuta all'applicazione della forza F , che incrementa di Δh un lato del rettangolo. F compierà un lavoro:

$$F\Delta h = 2\sigma\ell\Delta h \quad (2)$$

da cui dividendo per l'incremento di area:

$$\frac{F\Delta h}{2\ell\Delta h} = \frac{\text{lavoro}}{\text{incremento di area}} = \sigma \quad (3)$$

In altri termini la tensione superficiale moltiplicata per l'area della superficie liquido-gas è l'energia di Gibbs (potenziale, libera) associata alla superficie e che, ovviamente, tenderà al minimo possibile (compatibilmente con i vincoli del sistema).

Questa relazione mostra come il lavoro di frammentazione di una struttura liquida, comportando un incremento della superficie globale, richiede la trasformazione di energia in energia superficiale in misura tanto più grande quanto maggiore è la tensione superficiale del liquido.

La reazione della tensione superficiale ad una perturbazione applicata ad una interfaccia si manifesta attraverso l'insorgere di una pressione (detta capillare) che si oppone all'azione della perturbazione. La relazione che lega tale pressione alle caratteristiche geometriche dell'interfaccia ed al valore della tensione superficiale è detta equazione di Laplace. Essa consente di calcolare la forza dovuta alla tensione superficiale. Ad esempio per una sfera di raggio R (Fig. 3) l'energia superficiale sarà $\sigma 4\pi R^2$.

Se consideriamo una riduzione del raggio della sfera di dR dovuto all'azione della tensione superficiale, la variazione di energia associata sarà $8\pi R\sigma dR$. All'equilibrio la riduzione di energia superficiale relativa alla riduzione del raggio sarà bilanciata da una variazione di pressione ΔP all'interfaccia. Il lavoro eseguito dalla tensione superficiale per bilanciare tale pressione sarà $\Delta P 4\pi R^2 dR$. Ne segue che all'equilibrio:

$$\Delta P 4\pi R^2 dR = 8\pi R \sigma dR \quad (4)$$

da cui:

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R} \quad (5)$$

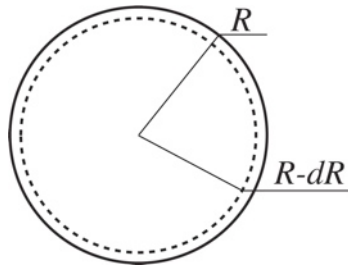


Fig. 3

Tale relazione è l'equazione di Laplace per una interfaccia sferica e rappresenta la pressione capillare che si genera a causa della tensione superficiale all'interfaccia di una goccia sferica ¹.

Nel caso di un cilindro infinito di raggio R l'equazione di Laplace sarà: $\Delta P = \frac{\sigma}{R}$ e, più in generale, la pressione capillare per una arbitraria superficie sarà data dal rapporto della tensione superficiale e del raggio di curvatura locale della superficie. Per tale motivo gli effetti della tensione superficiale saranno tanto maggiori quanto più piccole sono le dimensioni caratteristiche delle strutture liquide considerate.

Efficienza dell'Atomizzazione

Il processo di trasferimento di energia (meccanica o di altra natura) in energia superficiale, E_s , durante il processo di atomizzazione è ovviamente non completo. Una parte dell'energia, E_a , fornita per l'atomizzazione rimane sotto forma di energia cinetica, E_c , delle strutture liquide formate durante l'atomizzazione. Si ha dunque:

$$E_a = E_s + E_c \quad (6)$$

E' possibile definire un'efficienza del processo di atomizzazione come:

$$\eta_a = \frac{E_s}{E_a} \quad (7)$$

Il valore della η_a è in generale molto piccolo ed i processi di atomizzazione non sono da considerare molto efficienti dal punto di vista del trasferimento di energia alla superficie.

D'altra parte in molti processi di combustione si vuole che il liquido atomizzato abbia una certa energia cinetica al fine di favorire fenomeni di ulteriore atomizzazione e promuovere gli scambi di calore ed il miscelamento con l'aria del combustibile. Infatti, la distribuzione dello spray nello spazio e il suo accoppiamento con i flussi gassosi di comburente giocano un ruolo determinante nella ottimizzazione del processo globale di combustione.

Determinazione del Valore della Tensione Superficiale

I valori della tensione superficiale per la maggior parte dei liquidi organici (in un campo di temperature ridotte ($T_r = T/T_c$) tra 0,4 e 0,6) varia tra 2 e $4 \times 10^2 \text{ Nm}^{-1}$; per l'acqua vale $7,28 \times 10^{-2} \text{ Nm}^{-1}$.

Valori tipici della tensione superficiale per una interfaccia liquido-vapore a 20°C sono riportate nella tabella seguente:

| | $\sigma \text{ (Nm}^{-1}\text{)}$ |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| Acqua | 0,07288 |
| n-eptano | 0,02014 |
| Tetradecano | 0,027 |
| Benzene | 0,02888 |
| α -metilnaftalene | 0,040 |
| Metanolo | 0,0225 |
| Olio leggero @ 40°C | 0.023 |
| Olio leggero @ 80°C | 0.021 |
| Mercurio | 0,4865 |

Tabella 1

Esistono alcune correlazioni che permettono di determinare la tensione superficiale di sostanze organiche. La più famosa è quella proposta da Macleod nel 1923:

$$\sigma^{1/4} = P(\rho_l - \rho_v) \quad (8)$$

in tale relazione la quantità P è una costante indipendente da T e P , denominata parachor, che dipende dalla struttura della molecola mentre ρ_l e ρ_v sono le densità molari del liquido e del vapore. I valori del parachor per vari gruppi funzionali sono tabellati. Vale, inoltre, una regola di additività che permette di calcolare il valore del parachor nota la struttura della molecola sommando i valori dei parachor dei singoli gruppi funzionali.

| Structural Contributions for Calculation of the Parachor | | | |
|--|-------------------|--------------------------------------|------|
| Carbon-hydrogen: | | Special groups (<i>Continued</i>): | |
| C | 9.0 | Four carbon atoms | 20.0 |
| H | 15.5 | Five carbon atoms | 18.5 |
| CH ₃ — | 55.5 | Six carbon atoms | 17.3 |
| —CH ₂ — | 40.0 [†] | —CHO | 66 |
| CH ₃ —CH(CH ₃)— | 133.3 | O (not noted above) | 20 |
| CH ₃ —CH ₂ —CH(CH ₃)— | 171.9 | N (not noted above) | 17.5 |
| CH ₃ —CH ₂ —CH ₂ —CH(CH ₃)— | 211.7 | S | 49.1 |
| CH ₃ —CH(CH ₃)—CH ₂ — | 173.3 | P | 40.5 |
| CH ₃ —CH ₂ —CH(C ₂ H ₅)— | 209.5 | F | 26.1 |
| CH ₃ —C(CH ₃) ₂ — | 170.4 | Cl | 55.2 |
| CH ₃ —CH ₂ —C(CH ₃) ₂ — | 207.5 | Br | 68.0 |
| CH ₃ —CH(CH ₃)—CH(CH ₃)— | 207.9 | I | 90.3 |
| CH ₃ —CH(CH ₃)—C(CH ₃) ₂ — | 243.5 | Ethylenic bond: | |
| C ₆ H ₅ — | 189.6 | Terminal | 19.1 |
| Special groups: | | 2,3 position | 17.7 |
| —COO— | 63.8 | 3,4 position | 16.3 |
| —COOH | 73.8 | Triple bond | 40.6 |
| —OH | 29.8 | Ring closure: | |
| —NH ₂ | 42.5 | Three-membered | 12.5 |
| —O— | 20.0 | Four-membered | 6.0 |
| —NO ₂ (nitrite) | 74 | Five-membered | 3.0 |
| —NO ₃ (nitrate) | 93 | Six-membered | 0.8 |
| —CO(NH ₂) | 91.7 | | |
| =O (ketone) | | | |
| Three carbon atoms | 22.3 | | |

[†]If $n > 12$ in (—CH₂—)_n, increase increment to 40.3.

Tabella 2 Parachor per i principali gruppi strutturali.

Può essere, inoltre, utile calcolare il valore della σ senza che sia noto il valore delle densità molari alla temperatura desiderata. Infatti poichè:

$$\rho_l - \rho_v = \rho_{lb} \left[\frac{(1 - T_r)}{(1 - T_{br})} \right]^\eta \quad (9)$$

dove η varia tra 0,25 e 0,31 (precisamente si può assumere pari a 0,25 per alcoli, 0,29 per idrocarburi e 0,31 per altri composti organici) e ρ_{lb} è la densità molale del liquido al punto di ebollizione normale.

si ricava:
$$\sigma = [P \rho_{lb}]^4 \left[\frac{(1 - T_r)}{(1 - T_{br})} \right]^{4\eta} \quad (10)$$

Per miscele vale una legge generale di Macleod-Sugden:

$$\sigma^{1/4} = \sum_i P_i \left(\rho_{l_m} X_i - \rho_{v_m} Y_i \right) \quad \text{con } X_i, Y_i \text{ frazioni molari} \quad (11)$$

In tale espressione il termine $\rho_{v_m} Y_i$ è spesso trascurabile

Una buona rassegna delle proprietà di mezzi fluidi, inclusa la tensione superficiale, è reperibile nel libro di Reid, Prausnitz e Sherwood.

Onde Superficiali

Come già detto in precedenza, il meccanismo di rottura di una goccia, o di un getto o di una lamina liquida, è legato all'instaurarsi di perturbazioni oscillatorie (onde superficiali) all'interfaccia liquido-gas.

Queste oscillazioni sono di piccola ampiezza, rimanendo confinate nello spazio di una lunghezza d'onda, ma sono dispersive, ovvero la loro velocità di propagazione dipende dalla loro lunghezza d'onda. Ciò fa sì che, in dipendenza dalla geometria del sistema e delle proprietà del liquido, alcune oscillazioni possano propagarsi amplificandosi ed altre, invece, si attenuino a causa degli effetti dissipativi (generalmente dovuti alla viscosità).

E' possibile, in prima approssimazione, ricavare informazioni sulle caratteristiche di tali oscillazioni da una semplice analisi dimensionale delle forze in gioco.

Le forze per unità di volume agenti all'interno del liquido in tale fenomeno, in assenza di forze esterne, sono:

- Forze capillari:

dovute alla tensione superficiale che, come visto precedentemente, genera una pressione capillare σ/L ed una forza capillare:

$$F_c = \frac{\sigma}{L^2} \quad (12)$$

- Forze gravitazionali:

che generano una forza:

$$F_G = \rho g \quad (13)$$

- Forze viscosive:

che tendono a smorzare le oscillazioni e generano una forza:

$$F_v \propto \frac{\mu V}{L^2} \quad (14)$$

-

Forze di inerzia:

dovute alla velocità relativa gas-liquido e che genera una forza:

$$F_I \propto \frac{\rho_l V^2}{L} \quad (15)$$

In tali espressioni, L rappresenta una dimensione caratteristica della struttura liquida considerata e V la velocità con cui si muove l'oscillazione ondosca.

Supponiamo di applicare un disturbo ondulatorio all'interfaccia liquido-gas. Le forze capillari F_C e quelle gravitazionali F_G sono le due forze che si oppongono alla propagazione dell'onda e che tendono a ristabilire le condizioni iniziali sulla superficie perturbata. Cominciamo con lo stabilire i regimi nei quali ciascuna delle due forze è predominante.

Nella condizione in cui esse sono paragonabili potremo scrivere:

$$F_G \cong F_C \Rightarrow \rho g \cong \frac{\sigma}{L^2} \quad (16)$$

ciò permette di definire una lunghezza caratteristica delle oscillazioni in tali condizioni (che è il reciproco del numero d'onda dell'oscillazione):

$$L_C = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \quad (17)$$

detta lunghezza capillare.

(In realtà la lunghezza d'onda delle oscillazioni è pari a $\lambda = 2\pi L$)

Oscillazioni con lunghezza d'onda maggiore di L_C saranno dominate dalle forze gravitazionali mentre per lunghezze d'onda minori di L_C prevarranno le forze capillari. In altre parole si può dire in maniera semplificativa che onde "lunghe" sono essenzialmente "gravitazionali" mentre onde "corte" sono "capillari".

Se supponiamo che siano presenti onde gravitazionali in condizioni sostanzialmente stazionarie dovrà essere:

$$F_G \cong F_I \Rightarrow \rho g \cong \frac{\rho V^2}{L} \Rightarrow V \cong \sqrt{Lg} \quad (18)$$

In tal caso le forze viscosse saranno trascurabili se:

$$\rho g \gg \frac{\mu V}{L^2} \quad (19)$$

da cui, sostituendo il valore di V calcolato precedentemente, si ricava che onde gravitazionali non smorzate dalla viscosità possono esistere solo se:

$$L \gg L_{DG} = \left(\frac{\mu^2}{\rho^2 g} \right)^{1/3} \quad (20)$$

L_{DG} è detta lunghezza di dissipazione delle onde gravitazionali.

Analogamente, per onde capillari si ricava che in condizioni stazionarie:

$$F_c \cong F_l \Rightarrow \frac{\sigma}{L^2} \cong \frac{\rho V^2}{L} \Rightarrow V \cong \sqrt{\frac{\sigma}{\rho L}} \quad (21)$$

e, affinché siano trascurabili le forze viscosive:

$$L \gg L_{DC} = \frac{\mu^2}{\rho \sigma} \quad (22)$$

dove L_{DC} è detta lunghezza di dissipazione delle onde capillari.

In definitiva le onde capillari saranno possibili sotto la condizione:

$$L_{DC} \ll L \ll L_C \quad (23)$$

ovvero:

$$\lambda_{DC} \ll \lambda \ll \lambda_C \quad (24)$$

Dalla tabella 3 è possibile osservare che, per tutte le sostanze considerate, le onde gravitazionali non sono mai smorzate dalla viscosità del mezzo. Per quanto riguarda, invece, le onde capillari si può osservare che esse sono possibili in tutti i casi allorché le lunghezze d'onda delle oscillazioni siano minori di 12 centimetri, ma che, mentre per l'acqua e per il tetradecano esse possono essere anche molto piccole (rendendo possibile una atomizzazione molto fine) per l'olio leggero è necessario procedere ad un preriscaldamento perché si possano eccitare onde capillari di piccola dimensione e dunque avere una buona atomizzazione (vedremo in seguito altre conferme di questo fatto).

| | λ_{DC} , m | λ_C , m | λ_{DG} , m |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| Acqua | $6.2 \cdot 10^{-8}$ | $1.7 \cdot 10^{-2}$ | $2.6 \cdot 10^{-4}$ |
| Tetradecano | $2.6 \cdot 10^{-7}$ | $1.2 \cdot 10^{-2}$ | $3.0 \cdot 10^{-4}$ |
| Olio leggero @ 40°C | $7.6 \cdot 10^{-4}$ | $1.0 \cdot 10^{-2}$ | $4.3 \cdot 10^{-3}$ |
| Olio leggero @ 80°C | $2.1 \cdot 10^{-5}$ | $9.7 \cdot 10^{-3}$ | $1.3 \cdot 10^{-3}$ |

Tabella 3

Gruppi adimensionali

Fino ad ora abbiamo considerato solo forze interne al liquido. Ciò consente di studiare i meccanismi di rottura dell'interfaccia per velocità relative tra liquido e gas molto piccole (~ 1 m/s). A velocità maggiori diventano invece importanti le forze aerodinamiche che si esercitano sull'interfaccia e che, a grandi velocità, diventano le forze dominanti dei processi di atomizzazione.

Nella Fig. 4 tali forze sono indicate come p_g e τ_g . La p_g agisce perpendicolarmente all'interfaccia e va a contrastare la pressione capillare, generata dalle forze dovute alla tensione superficiale, sostenendo ed amplificando le oscillazioni presenti sulla interfaccia. La τ_g , invece, agisce tangenzialmente alla superficie e aiuta la rimozione di particelle di liquido da essa.

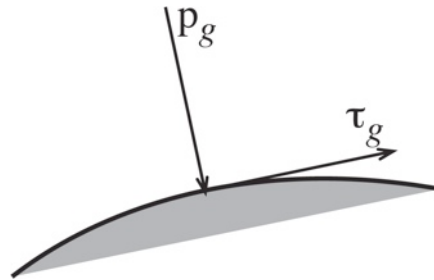


Fig. 4 Schema delle forze aerodinamiche ad un interfaccia liquido/gas.

Ambedue queste forze sono proporzionali alla pressione dinamica del gas calcolata come $\frac{1}{2}\rho_g v^2$, dove v è la velocità relativa gas-liquido.

Una misura dell'importanza relativa alla pressione dinamica rispetto a quella capillare è data dal gruppo adimensionale:

$$We_g = \frac{\rho_g v^2}{\sigma / D} = \frac{\rho_g v^2 D}{\sigma} \quad (25)$$

detto numero di Weber. Esso può essere considerato un indice della possibilità di atomizzare un liquido.

Talvolta, soprattutto nel caso dei fenomeni di rottura di un getto liquido, si fa riferimento ad un numero di Weber riferito alla colonna liquida in cui compare la densità del liquido e non quella del gas. Indicheremo tale numero come:

$$We_l = \frac{\rho_l v^2 D}{\sigma} \quad (26)$$

Tale numero da una misura del rapporto tra le forze di inerzia del getto e le forze capillari.

L'altra forza che si oppone alla atomizzazione è la presenza di forze viscosi nel liquido, in questo caso il numero adimensionale che dà una misura della possibilità di atomizzazione è:

$$Oh = Z = \frac{\mu_l}{\sqrt{\rho_l \sigma D}} \quad (27)$$

detto numero di Ohnesorge. Esso può essere considerato (solo dal punto di vista dimensionale) come il rapporto: \sqrt{We}/Re .

Tutte le quantità presenti nella espressione di Oh sono generalmente riferite al liquido per cui esso dipende solo dalle condizioni termodinamiche, proprietà fisiche e dimensioni caratteristiche della struttura liquida che deve essere atomizzata.

Classificazione dei regimi di atomizzazione con la temperatura

Il processo di atomizzazione può essere, in prima istanza, schematizzato come una variazione di pressione isoterma seguita da una variazione di temperatura isobarica. In tal modo si può considerare disgiunto l'effetto del salto di pressione che si realizza alla sezione di uscita dell'ugello e l'eventuale raffreddamento o riscaldamento cui il liquido va soggetto dopo l'iniezione.

Nel diagramma PT di Fig. 5 sono schematizzati i diversi regimi di atomizzazione in dipendenza delle condizioni di temperatura e pressione dell'ambiente in cui si immette il liquido. I diversi percorsi seguiti nei vari casi sono importanti in quanto le proprietà del mezzo liquido (tensione superficiale, viscosità e densità) che influenzano il processo di atomizzazione possono essere significativamente influenzate dalle condizioni ambientali in generale e dalla temperatura dell'ambiente, T_a , in particolare.

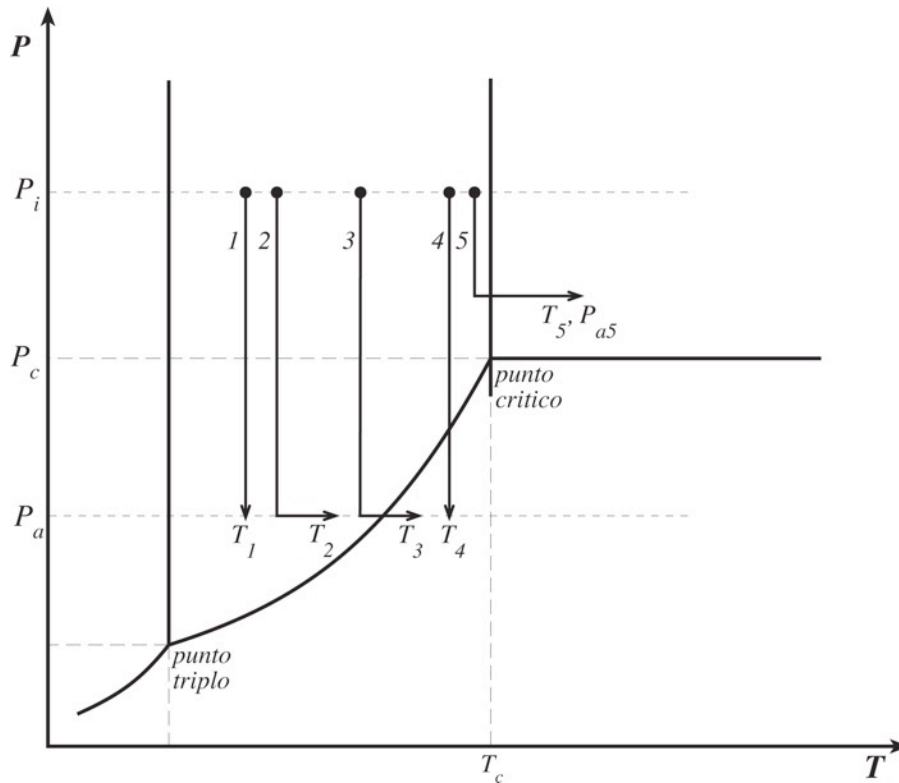


Fig. 5

Il salto di pressione e di temperatura del liquido (riscaldamento o raffreddamento) corrispondente al processo di iniezione possono, in prima istanza, essere schematizzati come una variazione di pressione isoterma seguita da un variazione di temperatura isobarica.

Per una iniezione in un ambiente a temperatura uguale o maggiore di quella iniziale del liquido (T_L) possiamo distinguere 5 casi tipici di atomizzazione a seconda della temperature T_L del liquido e T_a del gas nell'ambiente:

- | | | | | |
|----|-------------|--------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------|
| 1) | $T_a = T_1$ | iniezione fredda | $T_L = T_a$ | per cui $\sigma = \cos t$ |
| 2) | $T_a = T_2$ | iniezione quasi fredda | $T_L < T_a$ | per cui $\sigma \cong \cos t$ |
| 3) | $T_a = T_3$ | iniezione calda con ebollizione | $T_L < T_{eboll}$ | (@ $P = P_a$) |
| 4) | $T_a = T_4$ | iniez. calda con ebollizione a flash | $T_L > T_{eboll}$ | (@ $P = P_a$) |
| 5) | $T_a = T_5$ | iniezione supercritica | $T_L < T_c < T_a, P_{a5} > P_c$ | per cui $\sigma \rightarrow 0$ |

E' importante notare che:

- In molte applicazioni sono anche utilizzate tecniche di atomizzazione in ambienti che inducono raffreddamento e/o solidificazione del liquido.
- Quando la pressione e la temperatura ambiente sono basse, l'atomizzazione può considerarsi un processo "disaccoppiabile" da altri processi basati sullo scambio di calore.
- Nel caso 4 $[T_L > T_{eboll} (@ P = P_a)]$ si ottiene una condizione di atomizzazione a "flash boiling" in cui il liquido alla pressione ambiente si trova in condizioni fuori equilibrio (dovrebbe essere vapore) per cui c'è un effetto di atomizzazione aggiuntivo dovuto al passaggio di stato all'interno del liquido.

Parte 2

ATOMIZZAZIONE DI GOCCE, GETTI E LAMINE

Introduzione

I processi di atomizzazione di un liquido presentano un notevole livello di complessità a causa, soprattutto, della notevole varietà e complessità dei dispositivi utilizzati nella pratica. Trattare in dettaglio le problematiche connesse al funzionamento di tali dispositivi è ben al là degli obiettivi di queste lezioni. Ci limiteremo qui a trattare i problemi connessi con i processi di frammentazione di geometrie semplici, quali sfere (gocce), cilindri (getti) e lamine piane e coniche. Questo studio non è solo un esercizio accademico, infatti tali geometrie forniscono alcuni dei principali modelli concettuali dei processi che avvengono nei sistemi pratici. In particolare, poi, la rottura di gocce sferiche rappresenta un importante processo, denominato atomizzazione secondaria, che estremamente importante nella determinazione della qualità finale del processo di atomizzazione in presenza di campi fluidodinamici che interagiscono con il getto liquido. La rottura di un getto cilindrico ha di per se una rilevanza pratica in molti sistemi di atomizzazione largamente impiegati (ad es. iniettori per motori a combustione interna e turbine). La rottura di lamine coniche è alla base del funzionamento degli iniettori a pressione utilizzati in molti impianti di combustione per produzione di energia termica o elettrica. Per tali motivi la conoscenza dei parametri principali che intervengono nella evoluzione di tali strutture consente di costruire una metodologia di approccio alla comprensione del funzionamento anche dei sistemi reali.

Meccanismi di Rottura di Gocce

Il primo problema da affrontare è la determinazione delle modalità di rottura delle gocce inseguito alla loro interazione con l'aria circostante. Alla base del meccanismo di rottura delle gocce c'è, infatti, la creazione di distribuzione disuniformi di pressioni sulla gocce, a causa della pressione dinamica dell'aria. Appare, dunque, almeno in prima istanza utile presentare i vari meccanismi di rottura utilizzando come variabile controllante il numero di Weber (We_g) delle gocce poiché esso rappresenta il rapporto tra forze aerodinamiche che provocano la rottura e la forza stabilizzante dovuta alla tensione superficiale.

In Fig. 6 sono illustrati i cinque principali meccanismi di rottura di gocce di liquido che sono stati osservati in ambiente gas, per mezzo di tecniche ottiche (fotografia ultraveloce, "shadowgraph"). E' da notare che meccanismi simili sono stati osservati anche per sistemi liquido-liquido (olio in un altro olio, mercurio in acqua).

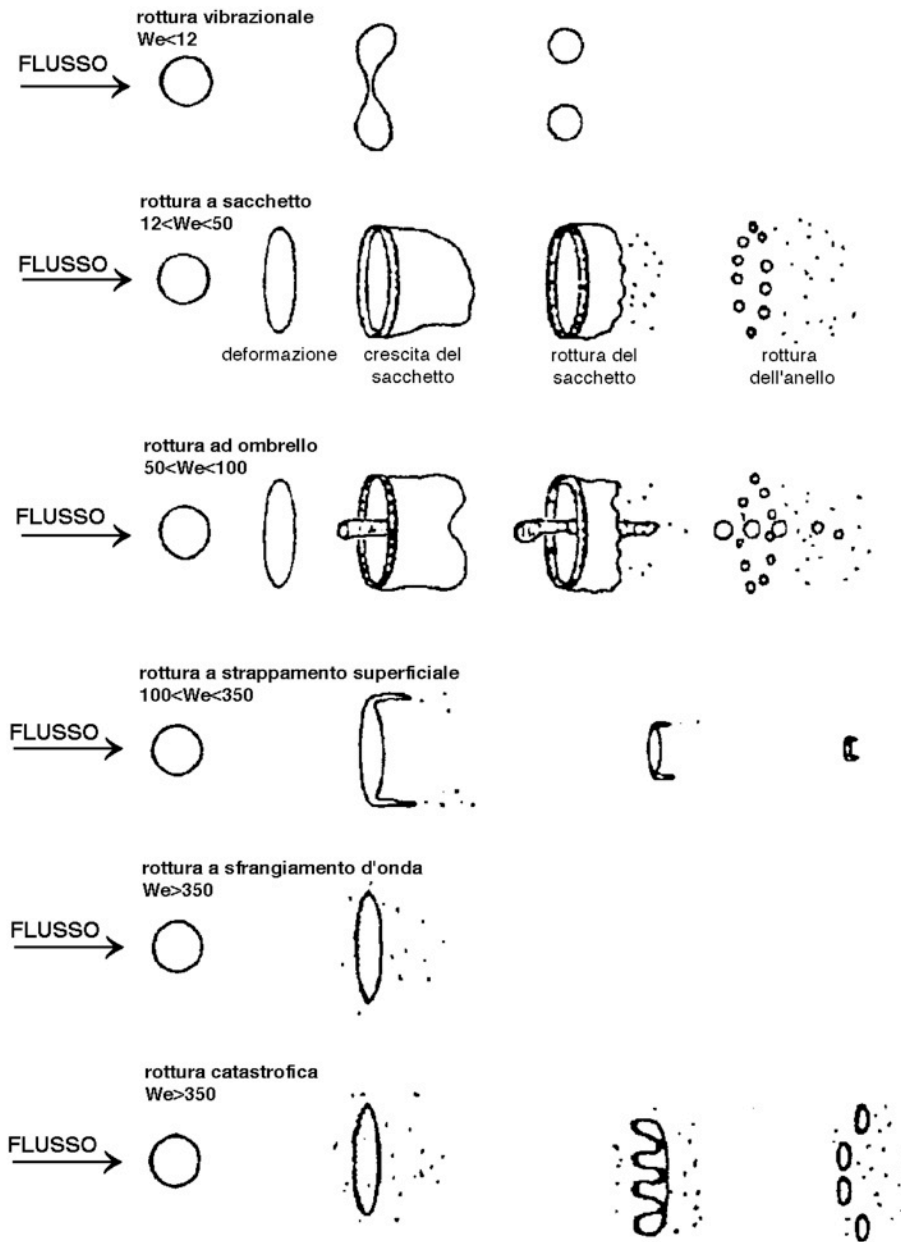


Fig. 6

Dalla Fig. 6 è possibile costruire un quadro generale della progressione dei vari meccanismi in funzione dell'incremento del numero di Weber, ovvero dello sforzo aerodinamico cui la goccia va soggetta:

1) *Rottura vibrazionale* $We_g < 12$

Questa modalità di rottura si verifica quando il numero di Weber è molto basso: sotto certe condizioni il flusso esterno interagisce con la goccia provocandone la divisione in grossi frammenti. Questo tipo di rottura produce solo pochi frammenti liquidi di grandi dimensioni, come si nota dalla Fig. 6. Per questo meccanismo il tempo di rottura è molto lungo in confronto agli altri meccanismi, per cui questo non viene preso in considerazione per lo studio della rottura delle gocce.

2) *Rottura "a sacchetto"* $12 < We_g < 50$

Il meccanismo della rottura a sacchetto è analogo alla rottura di una bolla di sapone. La parte interna della goccia diviene sottile e si rompe in un gran numero di frammenti piccoli, mentre la parte esterna, più pesante, si rompe poco dopo producendo un minor numero di frammenti più grandi.

3) *Rottura "a ombrello"* $50 < We_g < 100$

Questo tipo di rottura presenta molte caratteristiche in comune con il secondo meccanismo: Come in quest'ultimo, si forma una sorta di sacco ancorato ad un anello esterno, ma una colonna liquida è formata lungo l'asse della goccia. La rottura interessa dapprima la zona più sottile e poi la parte centrale.

4) *Rottura a "strappamento superficiale"* $100 < We_g < 350$

Il meccanismo è differente dai precedenti. Non si forma alcun sacchetto, ma si verifica un continuo consumo di un sottile strato esterno della goccia; questo strato sottile si rompe a poca distanza dietro la goccia, in piccoli frammenti. Una struttura residua di goccia permane durante l'intero processo di rottura.

5) *Rottura a "sfrangiamento d'onda" o "catastrofica"* $We_g > 350$

A numeri di Weber più alti, si formano sulla superficie della goccia delle onde molto piccole, le cui creste vengono continuamente erose dall'azione aerodinamica. Quando le onde di maggior ampiezza e lunghezza penetrano nella goccia, si verifica il fenomeno della "rottura catastrofica" che porta ad un processo multistadio in cui i primi frammenti sono soggetti ad ulteriore rottura.

Weber critico

Così come suggerito dall'osservazione dei meccanismi di rottura, è possibile individuare un numero critico di We_g al di sotto del quale la rottura della goccia non è osservabile su tempi significativi per le applicazioni pratiche. Infatti se consideriamo la condizione di equilibrio tra le forze aerodinamiche e le forze capillari potremo scrivere:

$$C_d \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho_g v^2}{2} = \pi D \sigma \quad (28)$$

da cui si ricava che in tali condizioni di equilibrio si ha:

$$We_g^c = \frac{\rho_g v^2 D}{\sigma} = \frac{8}{C_d} \quad (29)$$

Questa relazione 29 è ovviamente valida allorché sia possibile scrivere il bilancio tra le forze nella forma della 28.

Per valori del numero di Weber inferiori a quello critico, We_g^c , la rottura delle gocce non è impossibile ma, se si verifica, non è dovuta all'azione diretta della corrente d'aria bensì a fenomeni di instabilità della goccia eventualmente indotti dall'interazione con l'aria.

La determinazione del valore di We_g^c è stata oggetto di numerosi lavori sperimentali. In linea generale il valore di We_g^c è funzione delle caratteristiche del flusso gassoso e delle proprietà dei mezzi. In linea di massima per velocità nell'ordine delle decine di metri al secondo e mezzi poco viscosi il valore di We_g^c è un numero tra 10 e 20.

Dalla relazione 5.29 è possibile ricavare una espressione per il valore massimo del diametro delle gocce stabili in funzione della velocità e della tensione superficiale:

$$D_{\max} = \frac{\sigma We_g^c}{\rho_g v^2} \quad (30)$$

In Fig. 7 è riportato un diagramma dei valori di D_{\max} in funzione della velocità per due valori della tensione superficiale tipici dell'acqua e di una paraffina avendo assunto un valore di We_g^c pari a 12.

E' possibile osservare come il D_{\max} , a parità di velocità relativa tra la goccia e l'aria, sia significativamente maggiore per l'acqua. Ciò da un'idea di come la tensione superficiale sia un parametro importante nella determinazione della efficienza del processo di atomizzazione.

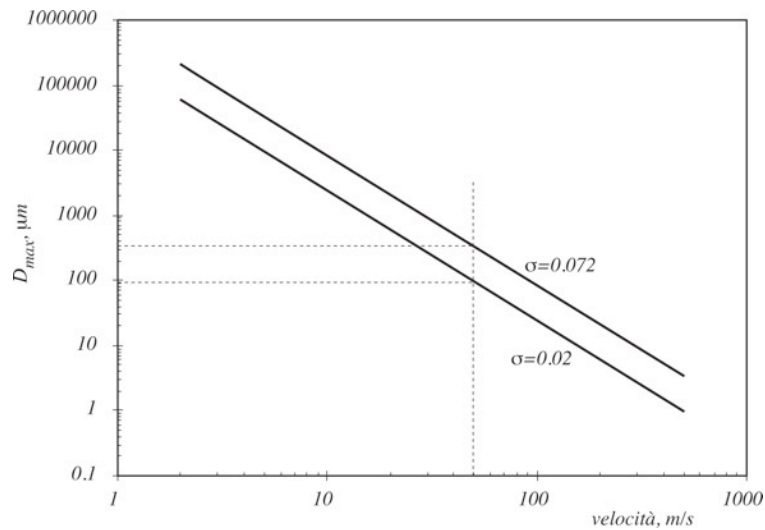


Fig. 7

In Fig. 8 è riportata una correlazione sperimentale per un sistema liquido-gas, dovuta a Brodkey, tra il valore del numero critico di Weber (We_g^c) ed il valore del numero Z di Ohnesorge $\left(Z = \frac{\mu_l}{\sqrt{\rho_l \sigma D}} \right)$.

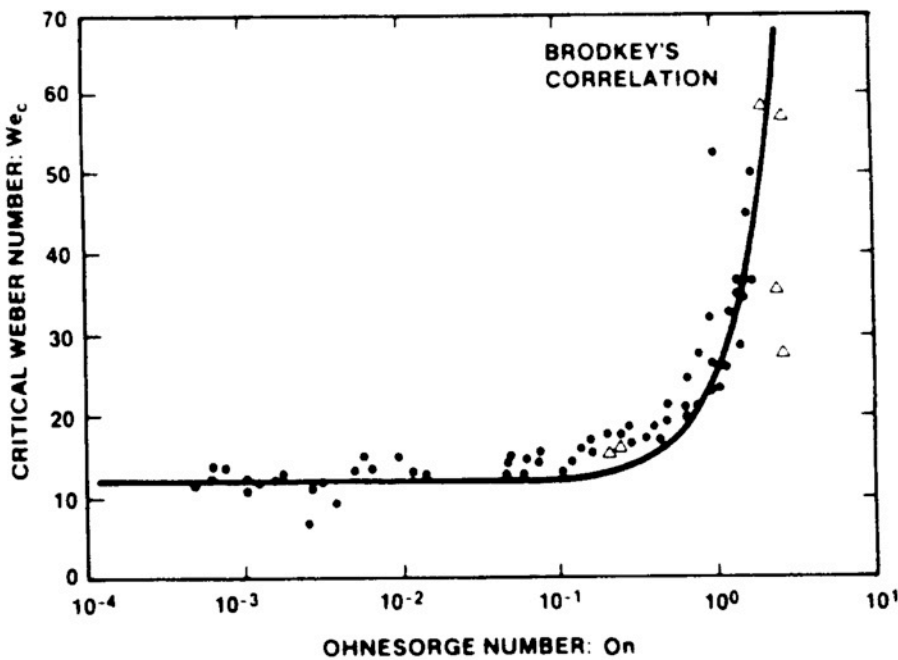


Fig. 8

Il numero di Weber critico, come risulta dal diagramma in Fig. 8, è circa 12 per numeri di Ohnesorge inferiori a 0.1. Per Z maggiori il numero di weber cresce in maniera molto rapida. In altre parole se Z è alto, ovvero se la viscosità assume valori sempre più grandi, la rottura della goccia diviene sempre più difficile ed infine è praticamente impossibile.

La correlazione di Brodkey si può esprimere in forma analitica come:

$$We_g^c = 12(1 + 1.077 \cdot Oh^{1.6}) \quad (31)$$

Può essere utile avere una idea degli ordini di grandezza del diametro delle gocce e delle loro velocità in corrispondenza dei quali si raggiunge il numero di Weber critico. In Fig. 9 sono riportati gli andamenti di We ottenuti per 4 differenti velocità delle gocce in funzione del loro diametro. La tensione superficiale del liquido è assunta pari a circa 0.02.

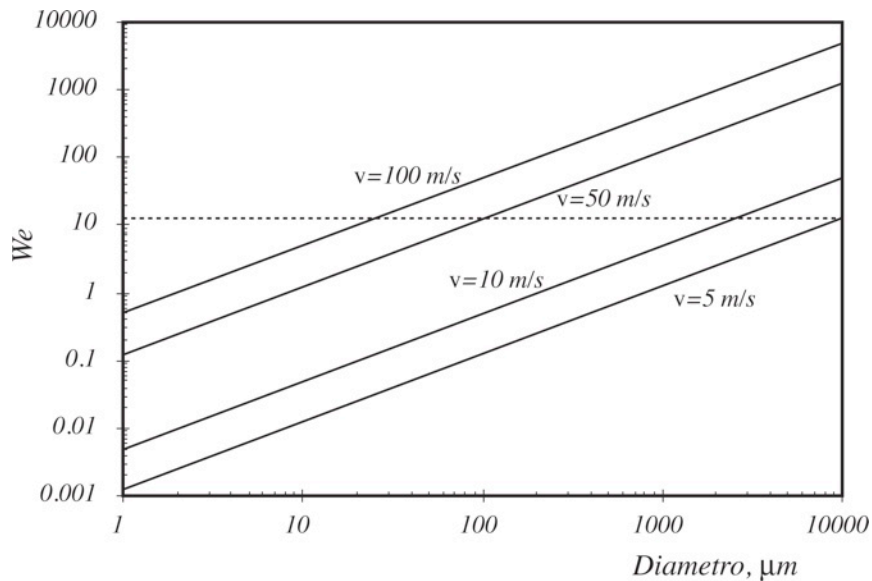


Fig. 9

E' possibile notare come per velocità maggiori di 50 m/s il numero di weber di gocce di dimensioni maggiori di 100 μm sia sempre superiore a quello critico (nell'ipotesi di viscosità trascurabile). In altre parole a tale velocità le gocce normalmente presenti all'uscita di un ugello sono sempre in condizioni instabili e hanno una alta probabilità di andare incontro ad una rottura. Viceversa per velocità di 10 m/s è necessario arrivare a diametri dell'ordine di qualche millimetro perché si superi il valore critico di We . Infine, per velocità dell'ordine di 5 m/s è necessario avere diametri di gocce maggiori di dieci millimetri perché si superi We_g^c .

Poiché le velocità tipiche all'uscita di un ugello sono dell'ordine delle decine di metri al secondo si vede come le dimensioni delle gocce prodotte sono generalmente comprese tra qualche decina e qualche centinaio di micron.

Analogamente può essere interessante calcolare il numero di Ohnesorge per alcuni liquidi in funzione del diametro delle gocce. In Fig. 10 sono riportati gli andamenti dei valori di Z per acqua, eptano e olio combustibile leggero a 40 e 80 °C. La fascia grigia indica la zona di

transizione tra il campo di piccoli valori di Z per i quali la viscosità può essere trascurata e quello, ad alti valori di Z , nel quale essa gioca un ruolo importante nel meccanismo di rottura della goccia.

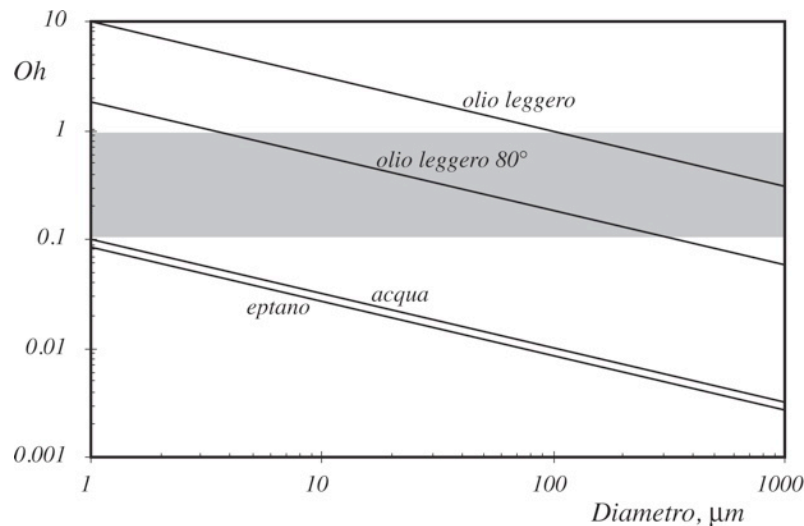


Fig. 10

Si può osservare che per gocce microniche di acqua ed eptano la viscosità si può considerare ininfluenza. Nel caso dell'olio combustibile, invece, anche un blando preriscaldamento del liquido prima dell'atomizzazione può avere un benefico influsso sul processo di atomizzazione. Tale effetto è ancora più pronunciato per oli combustibili pesanti che sono caratterizzati da viscosità maggiori di un ordine di grandezza rispetto all'olio leggero.

Tempo di Rottura delle gocce

Il tempo di rottura rappresenta una delle caratteristiche principali dei meccanismi di rottura della goccia. In letteratura esistono numerose definizioni di questo parametro, a causa della difficoltà di interpretazione dei dati sperimentali.

Si individuano tre tempi caratteristici di maggiore interesse: "tempo iniziale", tempo "di rottura primaria" e tempo "di completa rottura".

Per rappresentare tali istanti si utilizza, per comodità, un tempo adimensionalizzato definito come:

$$T = t \frac{V}{D} \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}} \quad (32)$$

dove V è la velocità della goccia, D il suo diametro, ρ_g e ρ_l rispettivamente la densità del gas e del liquido.

La definizione di istante di inizio della rottura è spesso arbitraria, variando a seconda del meccanismo di rottura considerato. Ad esempio l'inizio della formazione del "sacchetto" segna l'inizio della rottura in tale regime.

In Fig. 11 è riportato un esempio dell'andamento del tempo adimensionale di inizio della rottura in funzione del numero di Weber per diversi valori del numero Z di Ohnesorge. Da essa si può notare che a parità del numero di Weber il tempo di rottura aumenta all'aumentare di Z , dato che a questo corrisponde un aumento della viscosità del liquido e quindi della difficoltà di giungere alla rottura.

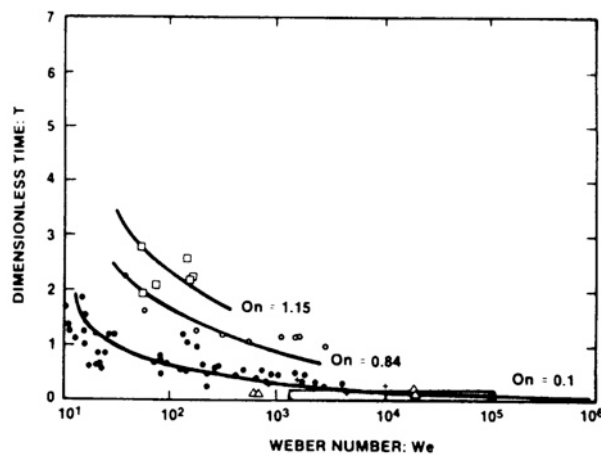


Fig. 11

Il tempo della rottura primaria è definito come quel tempo in corrispondenza del quale non appare più alcun frammento della goccia originaria. Ad esempio nel meccanismo di rottura a sacchetto tale tempo e quello di completa rottura sono equivalenti perché la parte esterna intatta viene osservata anche quando la parte centrale della goccia si è rotta. Analogamente risulta difficile stabilire il tempo di prima rottura quando il numero di Weber comincia ad assumere valori elevati. comunque per valori di $We > 350$ è stato trovato un tempo di prima rottura pari a: $T = 1.25$.

Il tempo di completa rottura è il tempo al quale la goccia è stata ridotta in frammenti tali da non potere più essere ulteriormente frammentata ($We < We^c$).

Esistono, inoltre, relazioni tra il tempo di completa rottura ed il numero di Weber, come è possibile seguire dalla Fig.5.12, date da:

$$T = 6(We - 12)^{-0.25} \quad 12 < We < 18$$

$$T = 2.45(We - 12)^{0.25} \quad 18 < We < 45$$

$$T = 14.1(We - 12)^{-0.25} \quad 45 < We < 350$$

$$T = 0.766(We - 12)^{0.25} \quad 350 < We < 2670$$

$$T = 5.5 \quad We > 2670$$

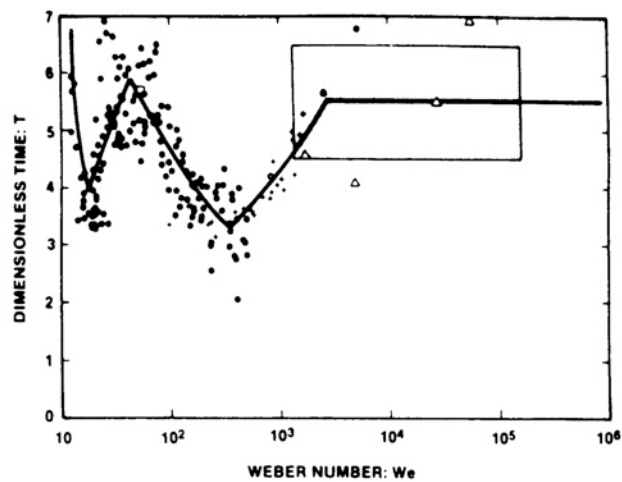


Fig. 12

Infine, è utile esaminare alcuni tempi di rottura dati in tempi reali e non adimensionali, come fatto sopra. La Fig. 13 mostra tempi di rottura calcolati per una goccia di 1 mm di UO_2 in acqua, in funzione del numero di Weber. Il tempo totale reale varia su tre ordini di grandezza. I diversi picchi visti nei diagrammi relativi al tempo adimensionale appaiono poco marcati nel tempo reale; comunque, il tempo decresce in modo continuo con il numero di Weber.

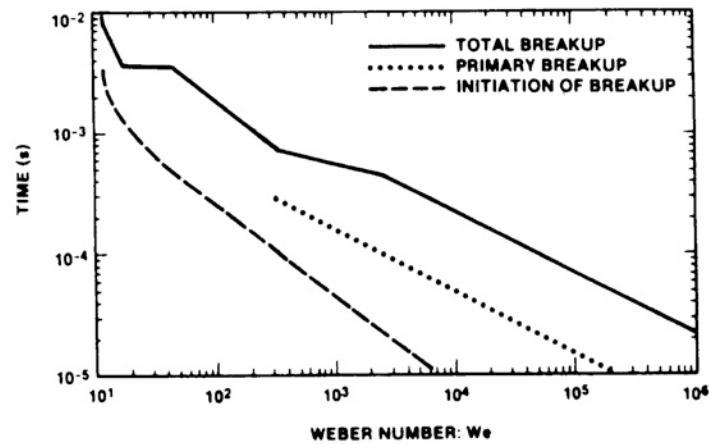


Fig. 13

Regimi di atomizzazione di un getto liquido

Un getto liquido iniettato in un ambiente gassoso è sempre soggetto a rottura, anche se non si può propriamente parlare di atomizzazione se i frammenti liquidi non sono molto più piccoli del diametro dell'ugello di iniezione.

Le forze che entrano in gioco nei meccanismi di rottura sono associate alla pressione capillare e statica del liquido, alla pressione statica del gas ed alle forze di trascinamento superficiale dovute alla resistenza aerodinamica di attrito. Questi sforzi superficiali sono legati alla fluidodinamica di entrambe le fasi e dipendono fortemente, oltre che dall'energia cinetica, anche dai regimi che si determinano all'interno dell'ugello. In particolare sono influenti la presenza dei campi turbolenti e di cavitazione che dipendono fortemente dalle geometrie interne dell'ugello.

La formulazione di modelli teorici che non prevedono la presenza di queste ultime componenti (turbolenza e cavitazione) permette una presentazione dei meccanismi in forma semplificata per avere dei punti di riferimento non dipendenti dalla specificità degli ugelli.

Questi modelli sono formulati sulle soluzioni dei campi fluidodinamici nel liquido e nel gas in termini di funzioni potenziali (campo irrotazionale) e di flusso (campi rotazionali) imponendo le condizioni al contorno in termini degli sforzi sopra citati.

Le soluzioni del campo sono di tipo oscillatorio e vengono date in termini di spostamento ondulatorio della superficie liquido-gas. Molte soluzioni linearizzate (e non) sono reperibili in letteratura. Quelle di maggiore interesse pratico sono le due condizioni limite (regime di Rayleigh e di Ranz-Taylor) in cui il parametro $\alpha = \pi D / \lambda$ (perimetro del getto diviso lunghezza d'onda delle oscillazioni) soddisfa una delle due condizioni:

- 1) $\alpha < 1$ Regime di Rayleigh
- 2) $\alpha \gg 1$ Regime di Ranz-Taylor o di atomizzazione

In ambedue i regimi le oscillazioni sono assialsimmetriche ma le lunghezze d'onda si riferiscono rispettivamente a soluzioni per bassi valori della velocità relativa nel regime di Rayleigh e per alti valori della velocità relativa nel regime di Ranz-Taylor (anche detto di atomizzazione).

Nel primo regime (di Rayleigh) solo onde con lunghezza d'onda maggiore del perimetro del getto si amplificano e tra queste le più instabili risultano essere quelle per cui $\alpha = 1.2$. La perturbazione che provoca l'innescio delle instabilità può essere anche molto debole (infatti la teoria linearizzata prevede questa ipotesi) come un'onda acustica o una piccola disuniformità del flusso.

L'azione aerodinamica sul valore di α per cui si ottiene la massima amplificazione α^* può essere tenuta in conto con una correzione di tipo esponenziale sul numero di Weber:

$$\alpha^* = \frac{\pi D}{\lambda} = \sqrt{\frac{e^{AWe}}{2}} \quad \text{per } Z \ll 1 \quad (33)$$

L'oscillazione si amplifica fino a quando l'ampiezza d'onda è dell'ordine di grandezza del diametro del getto, con una legge di crescita che non dipende dalla velocità del getto.

Ovviamente l'onda si amplifica sulla superficie del getto in movimento, per cui la distanza L_{jb} dall'orifizio alla quale sull'asse si rileva la discontinuità (lunghezza di rottura del getto) è linearmente dipendente dalla velocità, com'è riportato nel tratto BC della Fig. 14 e vale

$$L_{jb} = 8,46V \sqrt{\frac{\rho_l D^3}{\sigma}} \Rightarrow \frac{L_{jb}}{D} \approx 8\sqrt{We_l} \quad (34)$$

Le gocce che si vengono a formare in questo meccanismo sono prevalentemente di dimensioni maggiori del diametro del getto con alcune gocce satelliti generate da un meccanismo di rottura secondario.

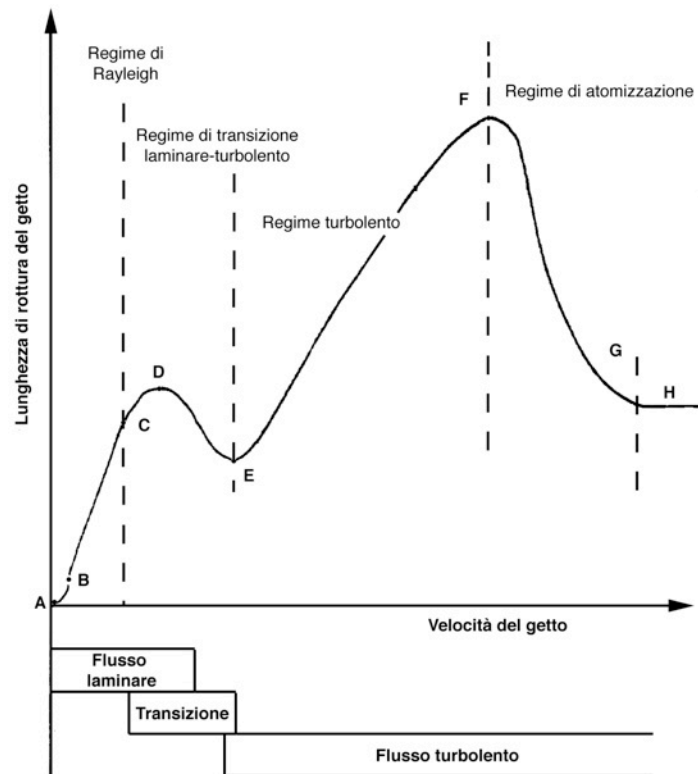


Fig. 14

Nelle condizioni limite opposte (per alte velocità del getto liquido) le onde hanno una legge di crescita così rapida per cui sono presenti a distanze minori del diametro dell'ugello (per $\alpha \leq \frac{We_l}{2}$ c'è sempre amplificazione, $\alpha_{\max} = \frac{We_l}{3}$)

In questo modello non viene descritto il meccanismo per cui l'onda genera una rottura superficiale del getto; comunque l'accordo tra l'osservazione sperimentale e la previsione teorica (l'amplificazione dell'onda è proporzionale alla densità dell'aria con la stessa legge dello spray) indica che qualunque sia l'evoluzione dell'onda è appunto questa la causa primaria dell'atomizzazione.

In questo modello la lunghezza di rottura è il luogo nel piano perpendicolare all'asse geometrico dell'ugello dove per la prima volta il mezzo liquido non è connesso col liquido fuoriuscente dall'ugello. Pertanto all'interno dello spray rimane un cuore liquido non atomizzato.

Dal punto di vista sperimentale questo cuore è stato con difficoltà rilevato per mezzo di tecniche intrusive, ma non è stato studiato in passato con mezzi ottici, perché si credeva che la densità delle nuvole di gocce periferica poteva impedire la "vista del cuore".

Solo negli ultimi tempi sono stati ripresi gli studi su spray densi anche se in condizioni troppo vicine a quelle utilizzate nei motori diesel, perché possano essere di validazione al modello teorico.

In Fig. 14 questo regime di “atomizzazione” viene riportato sulla curva lunghezza di rottura - velocità con il tratto FG. In questo caso più alte velocità favoriscono una crescita delle onde più veloce per cui si osserva una diminuzione della lunghezza di rottura. Fino al regime H in cui $L_{jb} = \sqrt{\rho_l / \rho_g} \cdot D$ (per l’aria circa $30 D$).

In un campo di velocità intermedio l’analisi è complicata dal fatto che non è possibile pensare a degli esperimenti che aumentino la velocità del getto senza aumentare il numero di Reynolds e quindi senza passaggio dal laminare al turbolento. Infatti tentare di tenere il numero di Reynolds basso con la diminuzione del diametro dell’ugello (D) o della viscosità cinematica, comporta un’alterazione di tutta la curva di Fig. 14, spostando il regime di atomizzazione a più alta velocità.

In corrispondenza della transizione laminare - turbolento si rileva sempre un decremento della lunghezza di rottura (tratto DE) per la presenza di uno spettro di perturbazioni “forti” che non sono previste dalle teorie linearizzate.

Il campo di rottura descritto dal tratto EF in Fig. 14 è quello di maggiore difficoltà interpretativa perché oltre alle oscillazioni assialsimmetriche vengono eccitate anche quelle trasversali generando onde sinuose o elicoidali.

In questo regime intermedio il parametro quantizzabile è la lunghezza di rottura superficiale (L_b), cioè la distanza dell’ugello alla quale si può rilevare una rottura sulla superficie.

In Fig. 15 è riportata una rappresentazione schematica dei vari regimi realizzabili a partire da un getto laminare e della lunghezza di rottura superficiale contro la velocità media del getto liquido, u_o .

In questo caso non c’è l’indeterminazione rappresentata dalla transizione dal laminare al turbolento nel getto liquido per cui la curva di L_b contro u_o non presenta più di un massimo.

Questo si realizza quando, come detto in precedenza, l’azione aerodinamica esterna al getto si sovrappone alle fasi iniziali del liquido ed a quelle associate alla tensione superficiale. In questo caso la lunghezza di rottura del getto liquido (L_{jb}) e la rottura superficiale sono coincidenti.

Generalmente a partire dalle velocità in cui per la prima volta l’azione aerodinamica è significativamente presente (in corrispondenza del massimo di L_b) fino alle velocità in

corrispondenza del regime di atomizzazione (o di RanzTaylor) descritto prima, viene individuato un regime definito come regime “aerodinamicamente indotto”, che a sua volta viene suddiviso in due parti in cui l’interferenza aerodinamica è di diverso tipo.

Nella prima parte l’interferenza riguarda il getto nel suo complesso, con deformazioni che fanno ridurre più significativamente la lunghezza di rottura del getto rispetto alla riduzione della lunghezza di rottura superficiale. Nella seconda parte l’azione aerodinamica sulla superficie è più intensa per cui in questo caso è la riduzione della lunghezza della rottura superficiale ad essere più significativa.

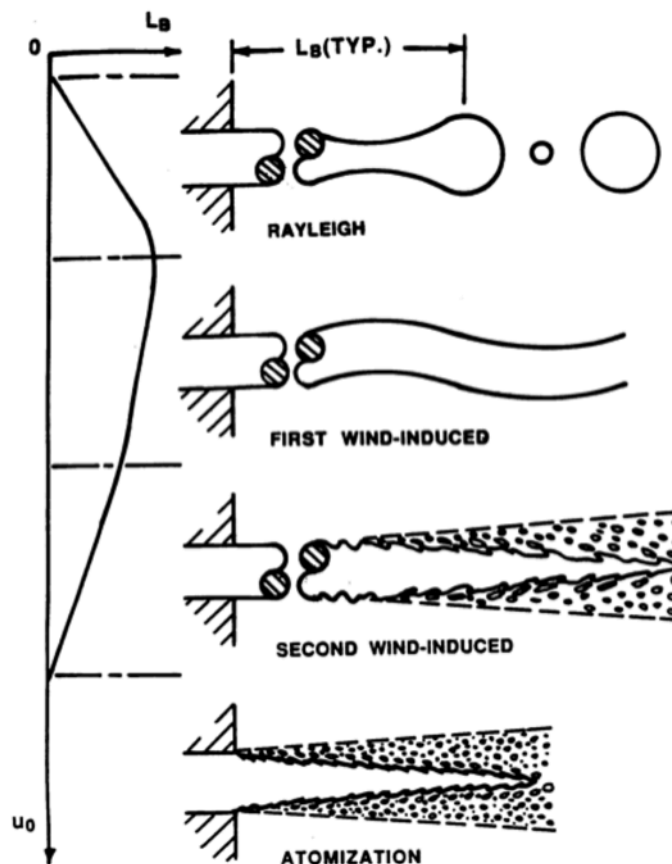


Fig. 15

In forma sinottica i campi in cui si realizzano i diversi regimi fin qui descritti per diversi valori dei numeri di Ohnesorge e di Weber sono riportati in Fig. 16 così come riportati da Faeth.

A bassi valori del numero di Ohnesorge i regimi sono identificati solo in termini del numero di Weber. In questo caso la transizione dal regime di Rayleigh a quello “aerodinamicamente indotto” è stata rilevata tra $We = 0,4 \div 1,2$, mentre la transizione dal

regime "aerodinamicamente indotto" a quello di "atomizzazione" avviene, secondo i lavori citati da Faeth, tra 13 e 40.

Per valori molto bassi del numero di Weber si realizza un regime non descritto in precedenza che prende il nome "gocciolamento". La transizione tra questo regime e quello di Rayleigh si realizza ad un numero di Weber pari a $We_g = 4 \rho_g / \rho_l$ per cui esso non è facilmente osservabile nel diagramma di Fig. 16. La zona di transizione tra i due regimi non avviene, dunque, per un ben determinato valore di We_g ma essa può variare in dipendenza del valore di ρ_l / ρ_g . Nella figura sono riportate le transizioni che si hanno per ρ_l / ρ_g pari a 10^2 e 10^3 .

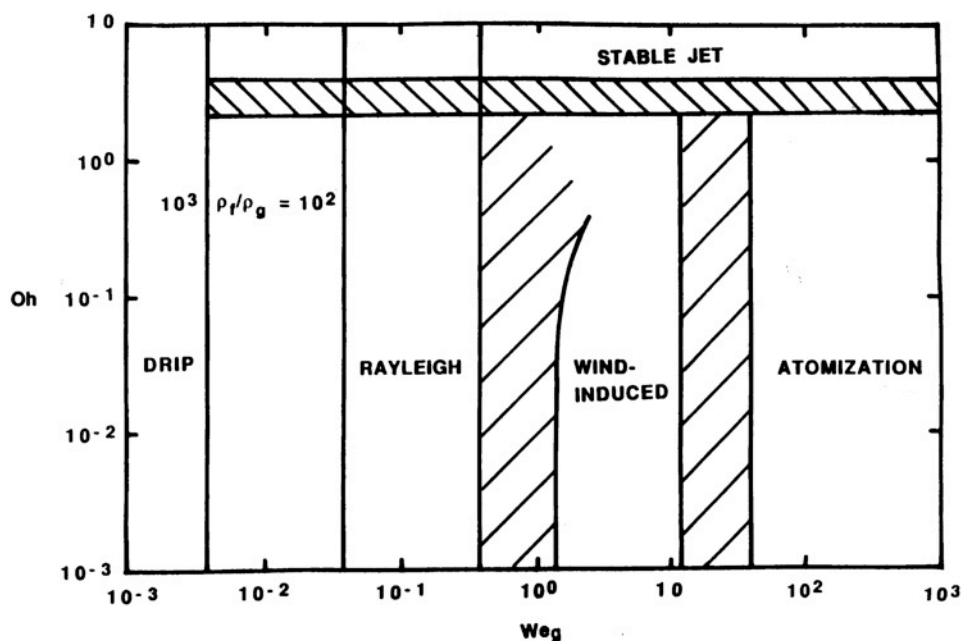


Fig. 16

Lamine coniche

Le lamine coniche possono essere facilmente ottenute per mezzo di ugelli con opportuna geometria che imprimono al flusso di liquido, oltre a quella assiale, anche una componente radiale di velocità. Una lamina conica presenta la peculiarità di andare soggetta, anche in assenza di interazioni aerodinamiche significative e/o di perturbazioni superficiali ad un progressivo assottigliamento dovuto alla sua stessa geometria. Per tale motivo oltre una certa sezione il suo spessore diviene talmente piccolo da essere sensibile ad ogni più piccola instabilità presente sulla sua superficie e di andare quindi, incontro ad una rottura in filamenti e frammenti che presentano dimensioni caratteristiche paragonabili a quelle della lamina prima della rottura. Per tale motivo può essere paradossalmente utile in tal caso mantenere la lamina il più possibile integra al fine di ottenere frammenti liquidi più piccoli al momento della sua rottura (Fig. 17). Un altro vantaggio che si ottiene attraverso l'uso di una lamina conica è rappresentato dalla notevole dispersione spaziale del liquido che con esse è possibile realizzare.

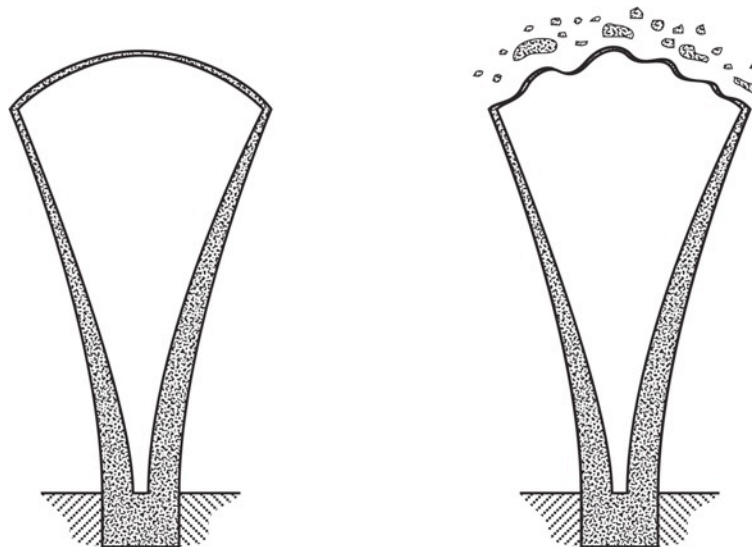


Fig. 17

Per tali motivi e per la relativa semplicità di realizzazione l'atomizzazione realizzata a partire da un getto sagomato come una lamina conica è molto comune: essa è alla base del funzionamento dei comuni ugelli denominati a pressione e che trovano largo impiego in bruciatori di piccola e media dimensione. In queste applicazioni le velocità di uscita del liquido dall'ugello sono però tali che la rottura della lamina avviene non solo attraverso il meccanismo appena descritto ma anche a causa della generazione sulla superficie della

lamina di perturbazioni ondose eccitate dall'interazione con l'aria e che accelerano il processo di disgregazione. Ciò comporta un limite essenziale degli atomizzatori a pressione: essi generano dispersioni di frammenti liquidi di dimensioni relativamente grandi. Come si può facilmente concludere sulla base di quanto detto l'effetto di pressioni di iniezione più grandi (compatibilmente con le applicazioni in cui tali ugelli trovano impiego) ottiene effetti modesti nella riduzione di tali dimensioni.

Una maniera comunemente impiegata per promuovere una atomizzazione delle lamine in frammenti più piccoli è quella di farle interagire con correnti d'aria opportunamente orientate rispetto al flusso liquido al fine di instabilizzare maggiormente la struttura liquida e forzare la sua rottura in frammenti di minori dimensioni. Si parla in tal caso di atomizzatori assistiti ad aria o a getto di aria. A tale scopo si impiegano molteplici configurazioni dei condotti di adduzione del liquido e dell'aria che saranno illustrati nel paragrafo seguente.

Essenzialmente in tal caso si cerca di ottenere la rottura della lamina appena uscita dall'ugello in piccoli filamenti che vengono fortemente accelerati dalla corrente d'aria e che vanno soggetti a fenomeni di atomizzazione simili a quelli descritti in precedenza per i getti liquidi e per le gocce. Con tali atomizzatori è inoltre possibile disperdere i frammenti liquidi con molta efficacia e imprimere ad essi componenti di velocità non solo assiali e radiali ma anche tangenziali che possono essere utili nella stabilizzazione delle fiamme da essi generate.

PARTE 3

ASPETTI TECNOLOGICI

Distribuzione delle dimensioni delle gocce in uno spray

Il processo di disintegrazione di un getto liquido è un processo stocastico che, per tale motivo, dà luogo ad un insieme di gocce che hanno dimensioni che variano in un intervallo che può essere più o meno largo in dipendenza dell'atomizzatore utilizzato. Le dimensioni delle gocce sono pertanto individuate per mezzo di una funzione densità di probabilità delle dimensioni $p(D)$. $p(D)$ è la probabilità che una goccia abbia dimensione D . A partire da tale densità è possibile definire anche una funzione di distribuzione delle dimensioni $P(D)$:

$$P(D) = \int_0^D p(x) dx \quad (23)$$

Ne segue che il numero N di gocce con dimensioni tra D e $D+\Delta D$ è dato da:

$$N(D, D + \Delta D) = N_{tot} (P(D + \Delta D) - P(D)) \quad (24)$$

ovvero se consideriamo un intervallo dD :

$$N(D, D + dD) = N_{tot} \int_D^{D+dD} p(x) dx = N_{tot} p(D) dD \quad (25)$$

Tale definizione dà, dunque, anche una maniera di misurare, ammesso che sia possibile determinare le dimensioni delle gocce isolatamente su un numero sufficiente di campioni in un intervallo dD , la $p(D)$.

Molto spesso vengono utilizzati dei diametri medi, che corrispondono a momenti statistici della $p(D)$, che consentono di caratterizzare in maniera sintetica la distribuzione delle dimensioni o di altre quantità quali area superficiale, volume o rapporti tra queste quantità.

In generale si possono definire i diametri medi $D_{i,j}$ come:

$$\left(D_{i,j} \right)^{i-j} = \frac{\int_0^{\infty} D^i p(D) dD}{\int_0^{\infty} D^j p(D) dD} \quad (26)$$

Alcuni diametri medi hanno un impiego più frequente sia perché possono essere determinati direttamente per mezzo di tecniche diagnostiche e sia perché essi hanno un particolare significato fisico.

Ad esempio D_{10} è il valore medio statistico delle dimensioni di tutte le gocce dello spray:

$$D_{10} = \frac{\int_0^{\infty} D p(D) dD}{\int_0^{\infty} p(D) dD} = \frac{\int_0^{\infty} D p(D) dD}{1} = \bar{D} \quad (27)$$

Analogamente D_{20} è il diametro di una goccia la cui area superficiale se moltiplicata per il numero di gocce dello spray dà il valore dell'area superficiale totale e D_{30} è il corrispondente diametro relativamente al volume.

Il momento D_{32} , denominato diametro medio di Sauter (*SMD*), è il diametro di una goccia per la quale il rapporto tra volume e area superficiale sia lo stesso di quello relativo all'intero spray. Esso è particolarmente utilizzato per caratterizzare il comportamento dello spray relativamente ai processi di scambio di materia e di reazione.

Ovviamente un solo parametro non descrive univocamente la distribuzione delle gocce in uno spray a meno che la forma generale della $p(D)$ non sia nota a priori. Pertanto è di solito utilizzato almeno un altro parametro che dia informazioni sul campo di variabilità delle dimensioni o sulla uniformità della distribuzione o di altre caratteristiche che possono essere utili per la applicazione considerata.

Il più comune parametro, oltre al diametro medio è la varianza della $p(D)$:

$$\sigma^2 = \int_0^{+\infty} (D - D_{10})^2 p(D) dD \quad (28)$$

Il valore σ rappresenta la deviazione standard dei valori dei diametri dal valore medio.

Si impiegano, inoltre, le quantità D_α che rappresentano i diametri tali che una frazione di volume dello spray pari ad α sia costituita da gocce con diametro inferiore a D_α . Ad esempio $D_{0,5}$ è il diametro tale che il 50% del volume totale di liquido è costituito da gocce con diametro inferiore ad esso. Numerosi altri parametri caratterizzanti la dispersione delle gocce possono essere definiti a partire da quelli introdotti.

Principali funzioni di distribuzione delle dimensioni delle gocce

La funzione di distribuzione delle dimensioni di uno spray è una funzione arbitraria e fortemente dipendente dal tipo di atomizzatore impiegato e dal suo regime di funzionamento. Nella pratica, però, si tende a ricondurre tali funzione di distribuzione a delle forme canoniche predefinite. Data la enorme varietà di possibili forme che la $p(D)$ può avere in dipendenza dell'atomizzatore utilizzato e delle caratteristiche fisiche del liquido non è possibile individuare una sola distribuzione (o una classe di distribuzioni) che possa avere un impiego generale nella caratterizzazione degli spray. Per tale motivo varie classi di funzioni di distribuzioni sono utilizzate e quella più adatta a descrivere il particolare spray considerato va di volta in volta individuata. Nel seguito riportiamo le funzioni di distribuzione più comunemente utilizzate.

Distribuzione normale

La funzione di distribuzione delle dimensioni più semplice è la distribuzione normale definita come:

$$f(D) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(D-\bar{D})^2}{2\sigma^2}} \quad (29)$$

dove σ^2 è la varianza e \bar{D} il valore medio dei diametri delle gocce. Il diagramma di questa distribuzione è riportato in Fig. 18.

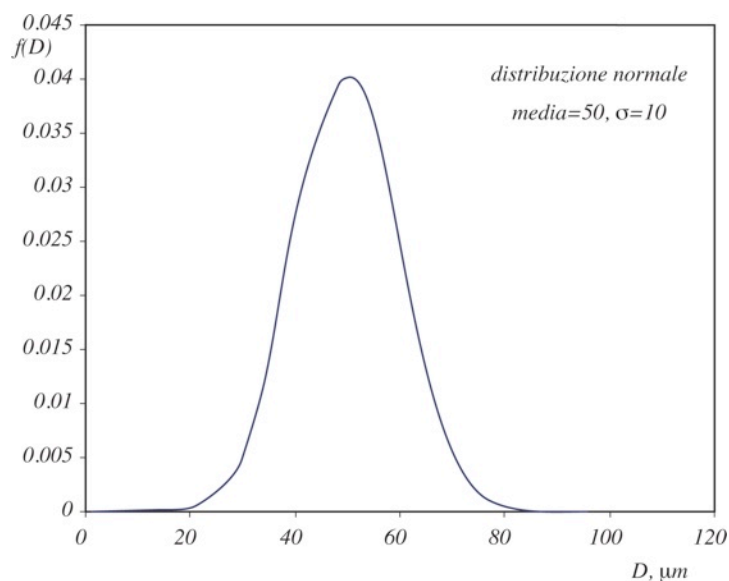


Fig. 18 Diagramma della distribuzione normale.

Distribuzione log-normale

Una variante della distribuzione normale è rappresentata dalla distribuzione log-normale:

$$f(D) = \frac{1}{D\sigma_g\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(D)-\ln(\bar{D}_{ng}))^2}{2\sigma_g^2}} \quad (30)$$

Dove σ_g è la deviazione standard geometrica mentre \bar{D}_{ng} è la media geometrica. La forma di questa distribuzione (Fig. 19) assume, se l'ascissa è riportata in scala logaritmica, un andamento simile alla distribuzione normale.

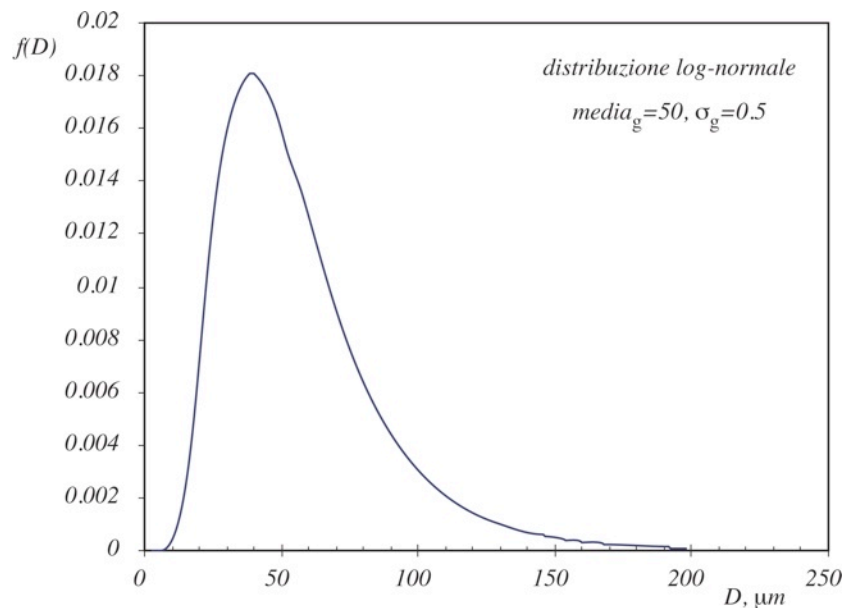


Fig. 19 Diagramma della distribuzione log-normale.

La distribuzione log-normale risulta spesso più efficiente di quella normale per rappresentare la distribuzione delle dimensioni di spray pratici.

Distribuzione di Nukiyama-Tanasawa

La distribuzione di Nukiyama-Tanasawa può essere utilizzata per rappresentare molti casi pratici. L'espressione analitica di questa distribuzione è:

$$f(D) = aD^p e^{-(bq)^q} \quad (31)$$

la costante di normalizzazione a è data da $\frac{qb^{p+1}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{q}\right)}$.

Più precisamente questa distribuzione è rappresentativa di una classe di distribuzione al variare del valore dei due parametri p e q . Nella Fig. 20 è riportata la distribuzione di Nukiyama-Tanasawa per $p=3$ e $q=2$ e due valori di b . Si può osservare come il valore di b determini il valore medio della distribuzione.

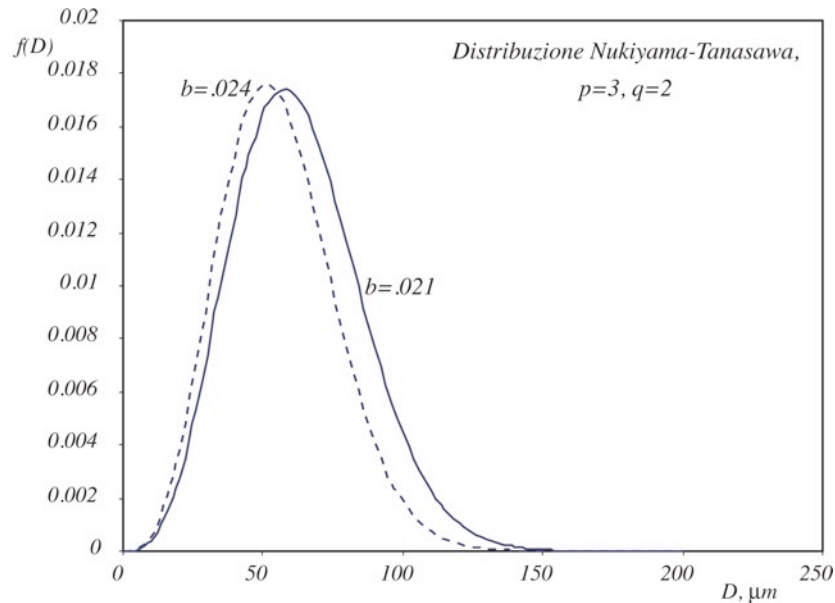


Fig. 20 Distribuzione di Nukiyama-Tanasawa per $p=3$ e $q=2$ e b pari a 0.021 e 0.024.

Distribuzione di Rosin-Rammler

Un discorso a parte merita la distribuzione di Rosin-Rammler. Questa distribuzione è comunemente definita dalla espressione:

$$Q = 1 - e^{-\left(\frac{D}{X}\right)^q} \quad (32)$$

dove Q è la frazione del volume totale di liquido contenuta nelle gocce con diametro inferiore a D . Il parametro X rappresenta il diametro (detto di Rosin-Rammler) per il quale Q è pari a 0.632. Questo diametro viene utilizzato, in alcuni casi, come diametro rappresentativo delle dimensioni delle gocce nello spray.

Talvolta viene anche utilizzata una variante della distribuzione di Rosin-Rammler definita da:

$$Q = 1 - e^{-\left(\frac{\ln D}{\ln X}\right)^q} \quad (33)$$

che risulta più efficace nel descrivere la parte alta della distribuzione delle dimensioni delle gocce.

Altri parametri di uno spray

Oltre alle dimensioni delle gocce è anche importante caratterizzare lo spray relativamente alla distribuzione spaziale di queste nel volume di interesse. A tale scopo si utilizzano parametri sintetici, quali l'angolo di spray e la sua penetrazione, o le curve di distribuzione del volume del liquido presente lungo un raggio o una circonferenza a varie distanze dall'ugello.

Classificazione degli ugelli

Nelle sezioni precedenti si è visto come l'agente promuovente principale dei processi di atomizzazione sia la velocità relativa all'interfaccia liquido-gas. Il principale problema tecnologico che è necessario affrontare nel disegno di un ugello è quello di fornire tale energia cinetica alla struttura (getto o lamina) che si vuole atomizzare. Nella pratica tecnologica ciò è stato realizzato in svariati modi ed è difficile dare una descrizione completa delle possibili configurazioni pratiche che sono state realizzate. A tale scopo esiste in letteratura un certo numero di pubblicazioni che presentano, con un approccio tecnologico, i vari tipi di atomizzatore illustrandone le principali caratteristiche. Il libro di A.H. Lefebvre presenta una buona rassegna di atomizzatori e da un ampio numero di riferimenti bibliografici sull'argomento. Nella Fig. 21 è riportata una classificazione degli atomizzatori presentata nel libro suddetto.

Prima di riassumere brevemente le caratteristiche degli ugelli riportati in figura è necessario ricordare che spesso non si utilizza un solo atomizzatore in un sistema di combustione ma che, anzi, le configurazioni più comuni per impianti di dimensioni industriali prevedono l'impiego di un gran numero di atomizzatori. Ciò consente di ottenere migliori distribuzioni del combustibile, maggiore robustezza tecnologica, maggiori efficienze di atomizzazione, modularità dei sistemi, minori problemi di "scale-up".

Gli ugelli si possono dividere, essenzialmente, in tre categorie principali (sezioni a, b e c della Fig. 21):

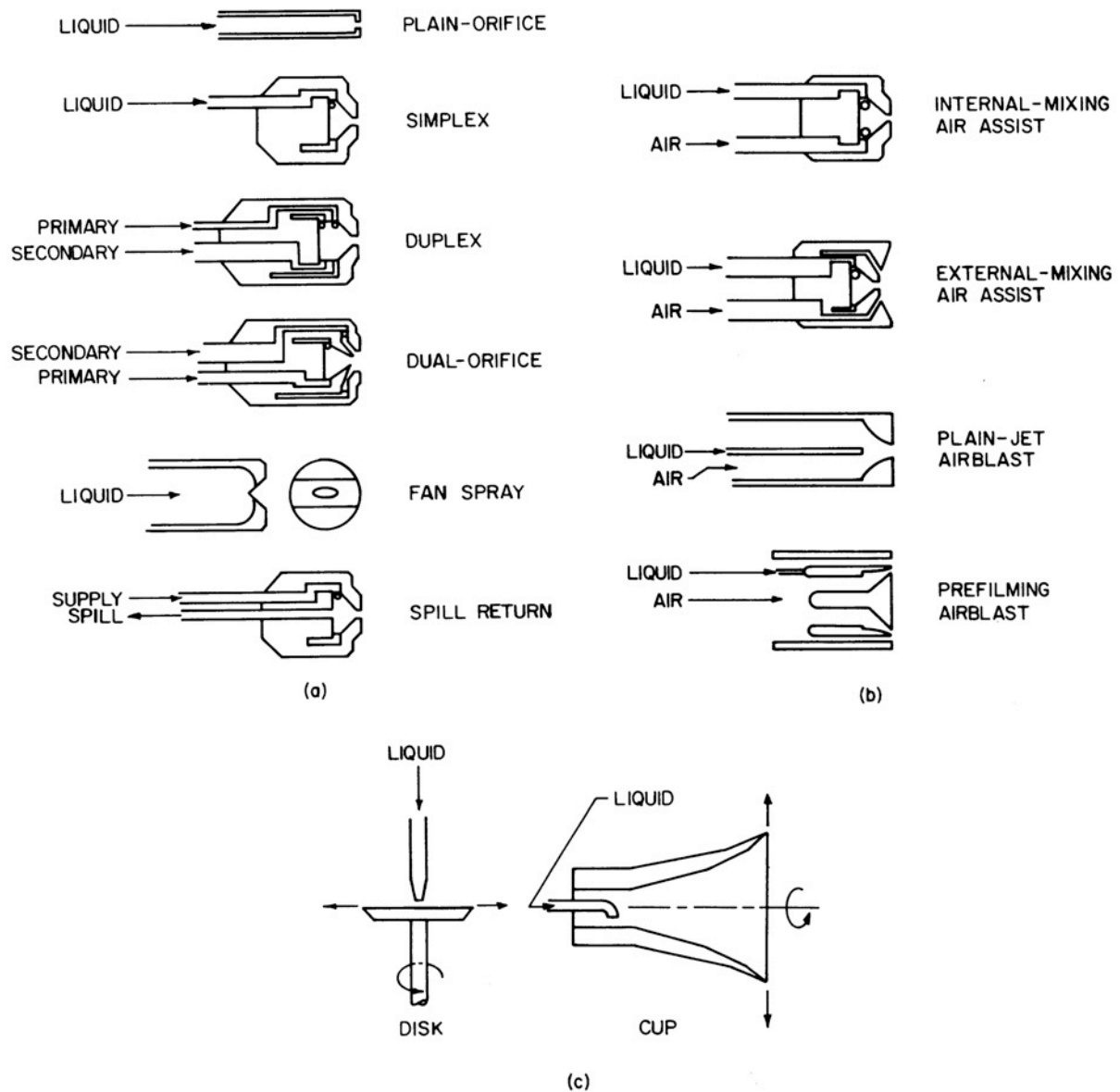


Fig. 21

a) Ugelli in cui l'energia cinetica viene trasferita direttamente al liquido per mezzo di un salto di pressione che avviene in corrispondenza della sezione di uscita dell'ugello. Il buon funzionamento di tali ugelli si ha in corrispondenza di piccole sezioni di uscita e alti salti di pressione (relativamente al diametro dell'ugello). Solitamente (ugelli "simplex") vengono impresse al liquido componenti di velocità radiale e/o tangenziale (swirl), iniettandolo per mezzo di condotti opportunamente inclinati e/o facendolo fluire lungo una superficie conica al fine di disperdere maggiormente il liquido (i coni di apertura di tali spray vanno da 30° fino a circa 180°).

In tal caso la velocità di uscita è proporzionale alla radice quadrata del salto di pressione. Ciò limita il campo di impiego di tali ugelli, nel quale la qualità dell'atomizzazione è soddisfacente, ad un intervallo di portate di circa 10:1.

Per tale motivo si utilizzano configurazioni "duplex" o "dual orifice" in cui in pratica due ugelli di dimensioni differenti sono riuniti in un solo corpo. A basse portate il liquido viene fatto fluire solo nell'ugello più piccolo, mentre ad alte portate viene utilizzato anche l'ugello più grande. In tal caso si ottengono rapporti tra portata massima e minima di 40:1 ma è possibile osservare l'esistenza di una regione di transizione, corrispondente all'inserzione del secondo ugello, nella quale la qualità dell'atomizzazione è bassa. Un'altra maniera per allargare il campo di portate di questo tipo di ugelli è quella di utilizzare una valvola regolabile di spillaggio ("spill return nozzles") che consente di regolare la portata facendo rifluire dalla camera di swirl dell'iniettore quantità opportune di liquido. In tal modo la pressione di iniezione può essere mantenuta pressochè costante intorno ad un valore ottimale fornendo una buona qualità di atomizzazione indipendentemente dalla portata.

b) ugelli nei quali l'energia cinetica di rottura viene trasferita al liquido per mezzo dell'interazione con un flusso gassoso (aria o vapore). Con tali ugelli si possono ottenere spray molto fini anche a partire da liquidi con alta viscosità. Si distingue di solito tra ugelli assistiti ad aria ("air assisted") e a corrente d'aria ("airblast"). Nei primi una piccola portata d'aria ad alta velocità (>100 m/s) viene fatta interagire con il flusso liquido o prima dell'ugello di uscita dell'atomizzatore ("internal mixing") o dopo un ugello di uscita del liquido ("external mixing"). Nei secondi una grande portata di aria a più bassa velocità (<100 m/s) viene fatta interagire con un getto ("plain jet airblast") o una lamina ("prefilming airblast") di liquido.

Entrambe queste configurazioni danno buone qualità di atomizzazione in un ampio campo di portate (maggiore di quello degli ugelli a pressione) ma esse oltre ad una maggiore complicazione, presentano alcuni inconvenienti. Ad esempio, gli ugelli assistiti ad aria richiedono una fonte supplementare di aria ad alta pressione che può, in certe applicazioni, non essere disponibile e, nel caso di configurazioni "internal mixing" e

“plain jet airblast” è necessario avere cura che non si abbiano ritorni di aria nel condotto di liquido e viceversa.

c)ugelli nei quali l'energia cinetica è trasferita direttamente al liquido per mezzo di sistemi meccanici come piatti o coppe rotanti. I vantaggi di tale tipo di configurazione sono la uniformità delle dimensioni delle gocce e gli ampi angoli di spray realizzabili. inoltre la possibilità di variare indipendentemente pressione di iniezione e velocità di rotazione del piatto (o del cono) può consentire un maggiore controllo della qualità di atomizzazione. Purtroppo l'uso di parti meccaniche in movimento rende più complicato (e dunque meno robusto) e comunque poco applicabile ai processi di combustione questo tipo di ugello.

Quadro sinottico

- Riportiamo nel seguente quadro sinottico i vari meccanismi di atomizzazione possibili in corrispondenza delle diverse geometrie delle strutture liquide e delle possibili forze agenti su di esse.












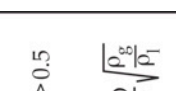

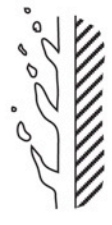

| | | | | | | | |
|---|--|---|---|---|--|---|-----------------------------------|
|  | Tensione Superficiale + forze viscosse liquido + eccitazioni interne piccole |  | $\frac{\lambda}{\pi D} = \sqrt{2}$ Rayleigh $\frac{\lambda}{\pi D} = \sqrt{2(1+3z)}$ |  | Rayleigh sul bordo $z \gg 1$ |  | riduzione geometrica della lamina |
|  | Tensione Superficiale + forze viscosse liquido + forze pressione di eccitazione + eccitazioni interne(turb, cav.) |  | Weber $\frac{\lambda}{\pi D} = \sqrt{2(1+3z)e^{-AWe}}$ |  | - Onde semicircolari - cuspidi |  | pressioni atomizer |
|  | Tensione Superficiale + (forze viscosse liquido) + forze pressione deformanti + eccitazioni interne(turb, cav.) |  | $We = \frac{\rho_g v^2 D}{\sigma} > 12$ $t_b = \sqrt{\frac{\rho_l D^3}{\sigma}}$ | turbolenza interna | $L_b = We^{-1/2}$ |  | air assisted / airblast |
|  | Tensione Superficiale + forze viscosse esterne + eccitazioni interne(turb, cav.) |  | $We \frac{\rho_g}{\sqrt{Re}} > 0.5$ $t_{rot} = \frac{D}{v} \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}}$ | - $\theta \propto \sqrt{\frac{\rho_g}{\rho_l}}$ - cavitazione - $L_{breakup} ?$ |  |  | internal mixing |

Fig. 22

Riferimenti e note

Una introduzione ai concetti legati alla nozione di tensione superficiale può essere trovata in:

Adamson A.W.: *A Textbook of Physical Chemistry*, Academic Press, New York, 1979.

Informazioni dettagliate sulle proprietà di liquidi e gas sono contenute nel volume:

Reid R.C., Prausnitz J.M. e Sherwood T.K., *The properties of Gases and Liquids*, McGraw Hill Co., New York, 1977.

La trattazione, basata sull'analisi dimensionale, dei regimi di esistenza di onde superficiali è tratta dagli appunti delle lezioni sui "fenomeni di trasporto" tenuto dal prof. G. Astarita nel marzo del 1997 a Vico Equense (NA) nell'ambito del corso di Dottorato di Ricerca in Ingegneria Chimica.

Una presentazione dei diversi regimi di rottura di getti liquidi è reperibile nei due articoli:

Bower G., Chang S.K., Corradini M.L., El-beshbeeshy M., Martin J.K., Krueger J., *Physical mechanism for atomization of jet spray: comparison of models and experiments*, SAE paper 881318, 1988.

Faeth G.M., *Structure and atomization properties of dense turbulent sprays*, 23rd Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute, Pittsburgh, PA, 1990.

La formulazione analitica dei fenomeni di propagazione di onde superficiali nel caso piano e nel caso cilindrico, riportata in appendice, è tratta dal volume:

Probstein R.F., *Physicochemical Hydrodynamics: an Introduction*, Butterworth-Heinemann, Boston, 1989.

Una trattazione degli aspetti fondamentali ed applicati dell'atomizzazione può essere trovata nei due libri:

Lefebvre A.H., *Atomization and Sprays*, Hemisphere Publishing Co., New York, 1989.

Bayvel L., Orzechowski Z., *Liquid Atomization*, Taylor & Francis, Washington D.C., 1993.

APPENDICI

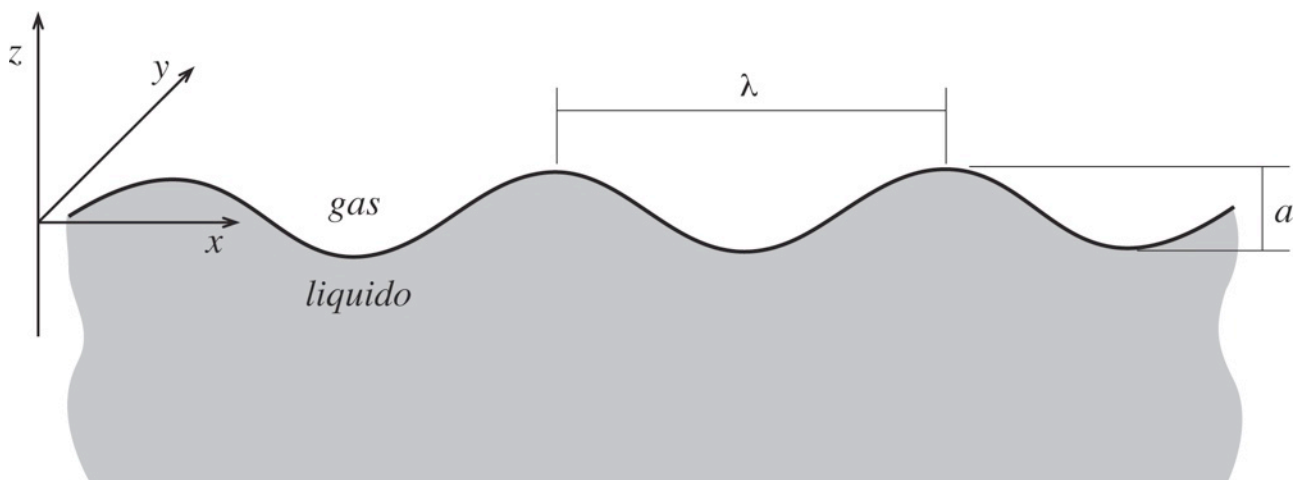
Appendice A Viscosità di alcuni liquidi notevoli

| | μ Kg s ⁻¹ m ⁻¹ |
|--------------------------|---|
| Acqua | 0,00085 |
| n-eptano | 0,00038 |
| Tetradecano | 0.00092 |
| Benzene | 0,00065 |
| α -metilnaftalene | 0.00078 |
| Metanolo | 0,00060 |
| Olio leggero @ 40°C | 0.05 |
| Olio leggero @ 80°C | 0.008 |
| Mercurio | 0,00153 |

Appendice B Propagazione di un'onda all'interfaccia liquido-gas

Consideriamo un'interfaccia tra un liquido ed un gas (ad esempio acqua ed aria). Supponiamo che essa sia infinitamente estesa nel piano x-y e che lo spessore delle due fasi sia molto grande (infinito).

Consideriamo, inoltre, che all'istante t si propaghi sull'interfaccia in direzione x una perturbazione sinusoidale (longitudinale) con lunghezza d'onda λ e ampiezza a .



La posizione verticale di un generico punto dell'interfaccia al tempo t sarà data da:

$$\zeta(x,t) = a \sin(\omega t - kx) \quad (\text{B1})$$

dove ω è la pulsazione angolare dell'onda e k il numero d'onda che sono legati alla lunghezza d'onda λ ed al periodo di oscillazione τ dalle relazioni:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{\tau} \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c} \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

dove c è la velocità di propagazione dell'onda.

Le forze che si oppongono alla propagazione dell'onda sono (nell'ipotesi di dissipazione trascurabile, ovvero basse viscosità) quelle legate all'azione della tensione superficiale e della forza di gravità. Trascuriamo in prima approssimazione l'effetto delle forze di gravità.

La pressione idrostatica presente all'interfaccia sarà uguale a:

$$P = P_a - P_e \quad (\text{B3})$$

dove P_a è la pressione ambiente e P_e la variazione di pressione dovuta alla pressione capillare generata dalla tensione superficiale. Tale pressione vale $P_e = \sigma/R$ dove R è il raggio di curvatura locale dell'interfaccia. Per piccole oscillazioni si può assumere $R = \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^{-1}$ per cui:

$$P_e = -\sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (\text{B4})$$

che per l'onda sinusoidale (B1) diventa:

$$P_e = \sigma k^2 \zeta \quad (\text{B5})$$

L'equazione di conservazione della quantità di moto si può scrivere, nell'ipotesi di piccole oscillazioni (trascurando quindi termini del secondo ordine):

$$\rho \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = -\underline{\nabla} P_e \quad (\text{B6})$$

dove \underline{u} è la velocità di propagazione dell'onda.

L'equazione di continuità per la incompressibilità del liquido è:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \quad (\text{B7})$$

e a causa della irrotazionalità del fluido ($\underline{\nabla} \times \underline{u} = 0$) segue che la velocità può essere derivata da una potenziale:

$$\underline{u} = \underline{\nabla}\Phi \quad (\text{B8})$$

Ne consegue (dalla (B7)) che il potenziale soddisfa l'equazione di Laplace:

$$\underline{\nabla}^2\Phi = 0 \quad (\text{B9})$$

Da Φ è possibile ricavare la pressione dovuta alle forze capillari integrando l'equazione di conservazione della quantità di moto (B6) ottenendo:

$$P_e = -\rho \frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad (\text{B10})$$

da cui si ricava, per mezzo della (B5) la condizione al contorno sull'interfaccia per la Φ :

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)_{z=0} = -\frac{\sigma k^2}{\rho} \zeta \quad (\text{B11})$$

$\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ è valutato a $z=0$, e non a $z=\zeta$, tenendo conto della ipotesi di piccole oscillazioni.

L'altra condizione al contorno che viene imposta è che i punti dell'interfaccia non si spostino se non verticalmente:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)_{z=0} \quad (\text{B12})$$

dove, come in precedenza, $\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ viene valutata per $z=0$

L'ultima condizione che imponiamo è che molto lontano dall'interfaccia l'oscillazione sia di trascurabile:

$$\Phi = \text{cost per } z \rightarrow -\infty \quad (\text{B13})$$

Una soluzione dell'equazione di Laplace che possa soddisfare le condizioni B11, B12 e B13 può essere scritta come:

$$\Phi = A e^{kz} \sin(\omega t - kx) \quad (\text{B14})$$

dove A è una costante generica.

Dalla (B11) e dalla (B5), si ricava che perché la (B14) possa soddisfare le condizioni al contorno (B11) e (B12) deve essere:

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\sigma k}{\rho} \Rightarrow c = \left[\frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B15})$$

che permette di esprimere la velocità di propagazione in funzione della lunghezza d'onda della oscillazione.

Dalla (B15) si può osservare come la velocità con cui la perturbazione si propaga cresce al decrescere della sua lunghezza d'onda.

Se si considera l'effetto della gravità la (B15) viene modificata in:

$$c^2 = \frac{2\pi\sigma}{\lambda\rho} + \frac{g\lambda}{2\pi} \quad (\text{B16})$$

In tal caso la velocità di propagazione non è una funzione monotona di λ ma presenta un minimo per:

$$\lambda = \lambda_c = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \quad (\text{B17})$$

per $\lambda < \lambda_c$ le onde sono essenzialmente controllate dagli effetti della tensione superficiale, mentre per $\lambda > \lambda_c$ gli effetti gravitazionali divengono predominanti.

La perturbazione ondulatoria di cui si è trattato si propaga senza amplificazioni o attenuazioni (nel caso in cui gli effetti dissipativi siano trascurabili). Ciò è, però, vero solo nel caso di una propagazione su uno strato indefinito di liquido (ad esempio per onde in mare aperto) nel caso di uno spessore finito di liquido si dovranno tenere in conto gli effetti dell'attrito sul fondo del recipiente.

Appendice C Propagazione di perturbazioni su un getto liquido

Il caso di una perturbazione che si propaga su di un getto cilindrico non differisce molto da quello ora visto. In tal caso, però, l'interazione della perturbazione ondosa con l'azione della tensione superficiale, che tende a minimizzare l'area superficiale del getto, può condurre alla rottura del getto liquido. Infatti nel caso di un getto cilindrico la presenza di una situazione di assialsimmetria, a differenza del caso piano visto in precedenza, fa sì che la rottura del getto con la formazione di gocce sufficientemente grandi (con un raggio maggiore di 1,5 volte il diametro del getto) porti ad una riduzione della superficie, con un conseguente rilascio di energia libera.

Tale fenomeno è stato descritto analiticamente per la prima volta da Rayleigh nel 1894 e viene, per tale motivo, comunemente indicato come regime di atomizzazione di Rayleigh.

Tale descrizione analitica si basa, essenzialmente, sulla determinazione delle condizioni per cui un piccolo disturbo, innescato in maniera casuale sulla superficie del getto

cilindrico, può amplificarsi in ampiezza. In tali condizioni tale perturbazione può portare alla rottura del getto.

In generale il disturbo può essere considerato una sovrapposizione lineare di onde propagantesi sulla interfaccia (ovvero come una espansione in serie di Fourier della perturbazione). Per semplicità consideriamo un'onda che si propaghi in direzione assiale del tipo:

$$\phi(x, z, t) = \Phi(z)e^{i(\omega t - kz)} \quad (C1)$$

dove, in generale, Φ e ω sono quantità complesse e k è reale. Il fatto che la pulsazione ω sia complessa ($\omega = \omega_r + i\omega_i$) introduce la possibilità che la perturbazione possa variare di ampiezza nel tempo: se $\omega_i > 0$ allora la perturbazione è stabile e la sua ampiezza decresce nel tempo; viceversa, se $\omega_i < 0$ la perturbazione è instabile e la sua ampiezza cresce nel tempo.

La trattazione matematica è molto simile a quella riportata in appendice B per la propagazione di onde su di una interfaccia piana.

In tal caso, però la pressione capillare presente all'interfaccia del getto sarà pari a:

$$P_e = \frac{\sigma}{a} \quad (C2)$$

dove a è il raggio del getto.

L'equazione di continuità è uguale a quella del caso precedente (B8) ma viene, in tal caso, scritta in coordinate cilindriche:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (C3)$$

Detto ζ lo spostamento della superficie dovuto al disturbo, la condizione al contorno, ricavata dalla (C2), sarà:

$$P_e = -\sigma \left(\frac{\zeta}{a^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right)_{r=a} \quad (C4)$$

cui si associa la condizione cinematica che ogni particella rimanga sulla superficie:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=a} \quad (C5)$$

La generica componente della perturbazione (C1) può essere scritta come:

$$\phi(r, \theta, z, t) = \Phi(r) e^{\beta t} \cos(kz + n\theta) \quad (C6)$$

dove k è il numero d'onda della componente, n è un numero intero, e β è il coefficiente di amplificazione.

L'equazione (C3) per una ϕ della forma (C6) diventa una equazione di Bessel modificata di ordine n in $\Phi(r)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \left(\frac{n^2}{r^2} + k^2 \right) \Phi = 0 \quad (C7)$$

la cui soluzione generale è: $\Phi = A I_n(kr) + B K_n(kr)$ dove A e B sono costanti arbitrarie e $I_n(kr)$ e $K_n(kr)$ sono funzioni di Bessel modificate di prima e seconda specie di ordine n poiché $K_n \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 0$, imponendo che la Φ sia finita, si ottiene:

$$\Phi = A I_n(kr) \quad (C8)$$

Dalla condizione (C5) si ottiene per lo spostamento ζ l'espressione:

$$\zeta = \frac{Ak I_n'(ka)}{\beta} e^{\beta t} \cos(kz + n\theta) \quad (C9)$$

Sostituendo tale espressione nella (C4) si ottiene una espressione per β :

$$\beta^2 = \left(\frac{\sigma}{\rho a^3} \right) \frac{\alpha I_n'(\alpha)}{I_n(\alpha)} (1 - \alpha^2 - n^2) \quad (C10)$$

dove: $\alpha = ak = \frac{2\pi a}{\lambda}$

Poiché $\alpha I_n'(\alpha)/I_n(\alpha)$ è positivo per tutti i valori reali non nulli di α , si ricava che $\beta^2 < 0$ per tutti i valori di n diversi da zero oppure, per $n=0$, per $|\alpha| > 1$. In questi casi β è un numero immaginario e la perturbazione si propaga senza attenuazione o amplificazione sulla superficie del getto. Se $n \neq 0$ la perturbazione è non-assisimmetrica mentre per $n=0$ essa è assisimmetrica: se ne deduce che nelle nostre ipotesi perturbazioni non-assisimmetriche non danno luogo a fenomeni di instabilità e che le perturbazioni instabili sono assisimmetriche.

Quindi, una perturbazione potrà andare soggetta a fenomeni di amplificazione e di instabilità, essendo $\beta^2 > 0$, se:

$$-1 < \alpha < 1 \text{ e } n = 0 \quad (C11)$$

ciò implica che una perturbazione può essere instabile se la sua lunghezza d'onda, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, è maggiore della circonferenza del getto indisturbato ($2\pi a$).

Differenziando la (C10) rispetto ad α per $n=0$ si ottiene il valore di α cui corrisponde la massima amplificazione; esso è pari a:

$$\alpha = 0,697 \text{ o } \lambda_{\max} = 9,02a \quad (\text{C12})$$

che è la lunghezza d'onda del modo che si amplifica più rapidamente degli altri e che da luogo alla rottura del getto.

Se supponiamo che la distanza tra le gocce formatesi sia pari a λ_{\max} e che, quindi, il loro volume sia pari a quello di una sezione del getto cilindrico di lunghezza λ_{\max} , si ottiene per il diametro delle gocce, d , un valore:

$$d = \sqrt[3]{6a^2 \lambda_{\max}} = 3,78 a \quad (\text{C13})$$

