Esercitazioni di **Calcolo Numerico 2**

a.a. 2014/2015 – foglio n. 7 per il 06.05.2015

7.1. **Esempi di schemi di Butcher.** Determinare gli schemi di Butcher per i metodi di Heun, del punto medio implicito e dei trapezi implicito.

7.2. **Metodi di Runge-Kutta espliciti per problemi modello.** Applicare un metodo di Runge-Kutta esplicito ad s stadi a un problema autonomo lineare

$$u' = Au \qquad \text{con } A \in \mathrm{Mat}(d)$$

e verificare che esiste un polinomio $P \in \mathbb{P}_s$ di grado massimo s tale che

$$\forall (t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \qquad \Phi(t+\tau, t)z = P(\tau A)z.$$

7.3. **Metodi di Runge-Kutta e autonomizzazione.** Applicare un metodo Runge-Kutta esplicito generale (c, A, b) a s stadi sia al problema non autonomo sia a quello autonomo dell'esercizio E5.2. Verificare che le soluzioni di Runge-Kutta rispettive si corrispondono se e solo se

$$\forall i = 1, \dots, s \quad c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$$

7.4. **Consistenza globale.** Considerare

$$u' = f(\cdot, u) \text{ in } (t_0, T), \qquad u(t_0) = v$$

con secondo membro $f \in C^0(\mathbb{R}^{d+1}; \mathbb{R}^d)$ limitato e una funzione di incremento $F \in C^0(\mathbb{R}^{d+1} \times [0, \infty[; \mathbb{R}^d)$ limitata di un metodo ad un passo consistente. Mostrare che, posto

$$\tau = \frac{T - t_0}{N}, \qquad t_n = t_0 + n\tau \quad (n = 0, \dots, N),$$

vale

$$\sum_{n=0}^{N-1} \epsilon\big(t_n, u(t_n), \tau\big) = o(1)$$

per $N \to \infty$. Discutere il legame tra questo enunciato e il modello euristico dell'errore in §3.2.

Suggerimento: Introdurre i moduli di continuità

$$\omega_f(\tau) := \sup_{t_1, t_2 \in [t_0, T],\, 0 \le t_2 - t_1 \le \tau} |f(t_1, u(t_1)) - f(t_2, u(t_2))|$$

$$\omega_F(\tau) := \sup_{t_1, t_2 \in [t_0, T],\, 0 \le t_2 - t_1 \le \tau} |F(t_1, u(t_1), 0) - F(t_1, u(t_1), t_2 - t_1)|$$

e utilizzare la compattezza di $[t_0, T]$.

7.5. **Derivate di f e ordine di consistenza.** Permettendo valutazioni di derivate della funzione f che caratterizza l'equazione differenziale, proporre un metodo esplicito con ordine di consistenza $r \in \mathbb{N}_0$.

INFORMAZIONI:

Homepage del corso:
http://www.mat.unimi.it/users/veeser/calcnum2.html

Prof. A. Veeser
Studio: 2051 (nel "sottotetto")
Telefono: 02.503.16186
E-mail: andreas.veeser@unimi.it
Orario di ricevimento: Martedì 9:30 – 11:30

Dott.ssa N. Bressan
Studio: 1038
Telefono: 02.503.16138
E-mail: nicoletta.bressan@unimi.it
Orario di ricevimento: su appuntamento