GEOMETRIA DELLO SPAZIO

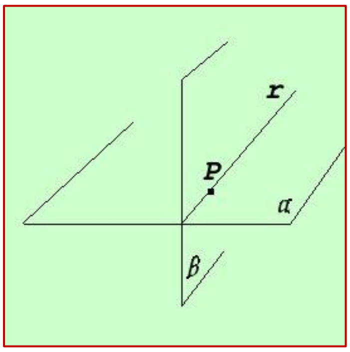
A. *Introduzione*

Si tratta ora di prendere i concetti gia' visti nel piano ed estenderli allo spazio: inizieremo dai postulati per poi riconsiderare la perpendicolarita' ed il parallelismo; costruiremo quindi i solidi nello spazio e mediante l'equivalenza passeremo a misurare sia le superfici che i volumi dei principali oggetti considerati.

B. *Nomenclatura*

Prima di procedere mettiamoci d'accordo su quali simboli usare e come rappresentare nello spazio i vari enti geometrici.
Naturalmente manterremo per gli enti gia' considerati la stessa notazione gia' adottata nel piano, ma un ripasso fa sempre bene....

- Indicheremo i punti con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino
  A, B, C, D, ...
- Indicheremo le rette con le lettere minuscole dell'alfabeto latino
  a, b, c, d, ...
- Indicheremo i piani con le lettere minuscole dell'alfabeto greco
  α, β, γ, δ, ...



Per rappresentare i piani nello spazio utilizzeremo una figura come quella qui di fianco: attenzione: un piano non ha bordi; procede all'infinito, quindi non potrei disegnare bordi, ma per dare l'idea della profondita' nel disegno devo considerare il bordo del piano.
Nella figura a fianco ho rappresentato due piani **α** e **β** con la loro retta **r** di intersezione, e sulla retta ho considerato il punto **P**

E' bene che d'ora in avanti tu cerchi di darti una rappresentazione spaziale delle varie figure che faremo, ad esempio pensando i piani come fogli di carta che possano compenetrarsi l'uno con l'altro e le rette come delle matite sottili, magari anche provando manualmente a ricostruire le figure a tre dimensioni sul tuo tavolino di studio con fogli e matite

C. *Postulati dello spazio*

Dobbiamo ora vedere quali postulati aggiungere ai postulati del piano in modo da avere un sistema di postulati da cui costruire e studiare le proprieta' dello spazio: al solito divideremo i postulati come nel piano:

- Esistenza
- Appartenenza
- Uguaglianza

Per lo spazio i postulati dell'ordine e delle parallele saranno ancora quelli del piano senza aggiunte significative.

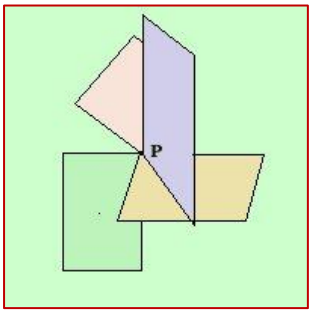
1. Esistenza

Definiscono l'esistenza degli enti geometrici:

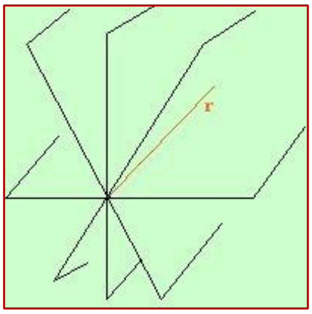
- **Esistono infiniti punti**
- **Esistono infinite rette**
- **Esistono infiniti piani**

2. Appartenenza

Definiscono i legami fra gli enti geometrici. Oltre quelli gia' validi per il piano (che ti consiglio di ripassare) valgono:

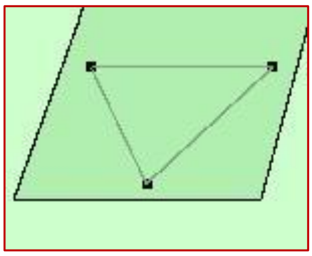


Per un punto passano infiniti piani (stella di piani).

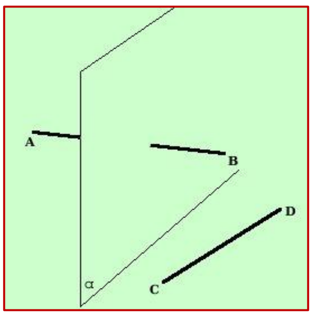


Per una retta passano infiniti piani (fascio proprio di piani).

Da notare che, anche se i piani appartenenti alla stella di piani ed al fascio di piani sono entrambi infiniti, deve esistere qualche differenza tra loro, perche' nella stella di piani ci saranno tutti quelli di un fascio proprio di piani per ciascuna retta passante per quel punto.
E' la stessa differenza che c'e' fra i punti di una retta ed i punti di un piano: sono entrambe infiniti ma fra i due tipi di infinito deve esistere qualche differenza.



Per tre punti non allineati passa un solo piano



Dato uno spazio ed un piano il piano divide lo spazio in due parti (semispazi) tali che presi due punti nello stesso semispazio il segmento che li unisce non taglia il piano mentre se prendiamo due punti in semispazi opposti il segmento che li unisce taglia il piano. In figura i punti **C** e **D** sono nello stesso semispazio, mentre **A** e **B** sono in semispazi opposti.

3. Uguaglianza

Oltre quelli gia' validi per il piano (che ti consiglio di ripassare) vale:
Tutte i piani sono fra loro congruenti.
cioe' con un movimento rigido posso spostare un piano su un qualunque altro piano in modo che i due piani coincidano punto per punto

---

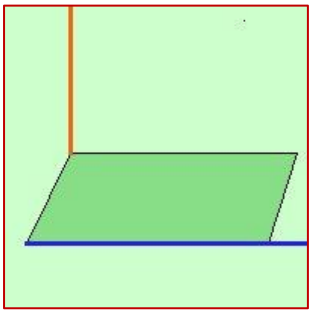
D. *Relazioni fra punti rette e piani nello spazio*

Vediamo ora alcune relazioni fra gli enti geometrici proprie dello spazio.

1. Relazioni fra rette nello spazio

Due rette nello spazio possono essere:

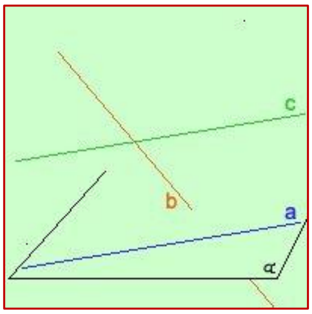
1) **Complanari:** cioe' giacciono su uno stesso piano
2) **Sghembe:** cioe' non giacciono sullo stesso piano.



Come esempio guarda la tua stanza: considera come prima retta la linea fra una parete ed il pavimento, considera poi la parete opposta e prendi una linea verticale su di essa; le due rette sono sghembe, cioe' non puoi pensare nessun piano che contenga entrambe le rette; in figura la retta rossa e la retta blu sono tra loro sghembe.

Una retta nello spazio rispetto ad un piano puo' essere:

1) **Secante:** in tal caso ha un solo punto in comune con il piano
2) **Parallela ad una retta del piano**: in tal caso non ha nessun punto in comune con il piano.
3) **Giacente sul piano**: in tal caso ha tutti i punti in comune con il piano.



La retta **a** giace sul piano
La retta **b** e' secante il piano
La retta **c** e' sopra il piano e parallela al la retta a.

---

2. Relazione fra piani nello spazio: un primo teorema

Intanto diciamo che:
Se un piano contiene due punti, allora contiene tutti i punti della retta passante per i due punti.
Due piani nello spazio possono essere:

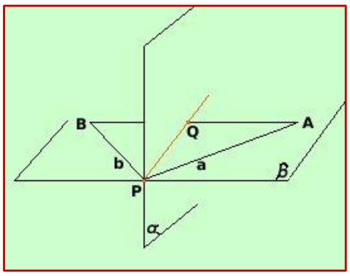
1) **Paralleli**: in tal caso non avranno nessun punto in comune
2) **Secanti** cioe' si tagliano fra loro

Possiamo enunciare, a tale proposito, un primo teorema:
Se due piani hanno in comune un punto allora hanno in comune tutti i punti di una retta.

Per dimostrarlo sara' sufficiente far vedere che i due piani hanno in comune un altro punto; per il postulato del piano sopra ricordato seguira' la tesi.

Ipotesi : $P \in \alpha$ e $P \in \beta$	**Tesi:** Esiste $Q \neq P$ tale che $Q \in \alpha$ e $Q \in \beta$

Dal punto **P** sul piano **β** traccio le semirette **a** e **b** da parti opposte rispetto al piano α, Sulla semiretta **a** scelgo un punto **A** e sulla semiretta **b** un punto **B** (con **A** e **B** diversi da **P**); il segmento **AB** sara' contenuto nel piano **β** ed essendo **A** e **B** in semispazi opposti rispetto ad **α**, per il postulato dello spazio, tale segmento taglierá il piano **α** in un punto **Q**; tale punto **Q** apparterra' anche al piano **β** perche' e' un punto del segmento **AB** contenuto nel piano **β**, come volevamo dimostrare.



E. *Perpendicolarita' fra retta e piano*

Cerchiamo di estendere allo spazio le nozioni gia' viste nel piano, precisamente cerchiamo di estendere allo spazio la nozione di perpendicolarita' gia' vista nel piano.

Ricordiamo che nel piano due rette si dicono perpendicolari quando incontrandosi formano quattro angoli uguali che chiamiamo retti; nello spazio dovremo estendere tale nozione di perpendicolarita' perche' abbiamo tre possibilita':

- perpendicolarita' fra due rette
- perpendicolarita' fra una retta ed un piano
- perpendicolarita' fra due piani

Rimandando a piu' avanti nel corso, lo studio della terza possibilita' occupiamoci ora delle prime due.

1. Perpendicolarita' fra due rette nello spazio

Va da se' che la nozione di perpendicolarita' fra due rette nello spazio sara' ripresa esattamente dalla nozione di perpendicolarita' nel piano dicendo:

Nello spazio due rette si dicono perpendicolari se giacciono nello stesso piano (sono complanari) ed incontrandosi formano quattro angoli uguali

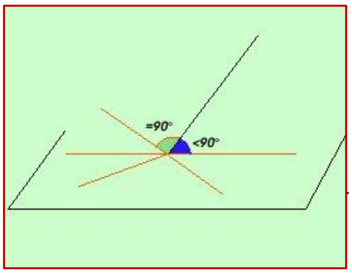
2. Perpendicolarita' fra una retta ed un piano

Resta ora da vedere come definire la perpendicolarita' fra retta e piano:

- Considerazioni generali
- Definizione
- Criterio di perpendicolarita' retta-piano
- Teorema delle tre perpendicolari

a) Considerazioni generali

Vediamo ora come definire la perpendicolarita' fra una retta e un piano.

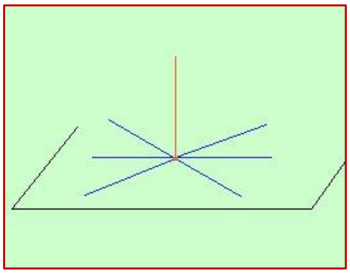


Logicamente, se noi prendiamo una retta che incida un piano, se questa e' obliqua formera' tanti angoli diversi con le rette del piano passanti per il punto di incontro e tra questi potremo distinguerne due retti come si puo' facilmente vedere prendendo una penna ed il registro di classe e provando varie inclinazioni.

In figura l'angolo in blu e' minore di 90° mentre l'angolo in verde e' di 90°.

Tra tutte le posizioni della retta pero' ve ne sara' una in cui la retta stessa sara' perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto di incontro.
Viene quindi spontaneo dare la seguente definizione.

Si dice che una retta e' perpendicolare ad un piano se e' perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il loro punto di incontro.



Naturalmente per vedere se una retta e' perpendicolare ad un piano non possiamo considerare tutte le rette passanti per il punto di incontro fra la retta ed il piano, pertanto dovremo prendere una scorciatoia cioe' trovare un criterio che ci permetta di vedere con un numero finito di passaggi se una retta e' effettivamente perpendicolare ad un piano

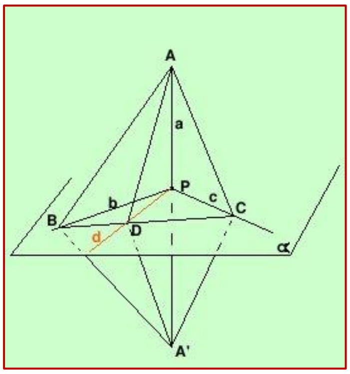
---

b) Criterio di perpendicolarita' fra una retta e un piano

Una retta e' perpendicolare ad un piano se e' perpendicolare a due rette diverse del piano passanti per il punto di incontro fra la retta ed il piano

Il criterio dice bastera' mostrare che la retta e' perpendicolare a due rette diverse del piano per essere perpendicolare a tutte le rette del piano passanti per il punto d'incontro.
Per dimostrarlo mostriamo che se la retta e' perpendicolare a due rette diverse passanti per il punto d'incontro allora e' perpendicolare anche ad una terza retta passante per il punto (e quindi a tutte le rette passanti per il punto d'incontro).

Ipotesi: $a \perp b$ $\quad a \perp c$ $\quad b \neq c$	Tesi: $\exists$ d passante per P tale che $a \perp d$



Sulla retta che taglia il piano nel punto P si considerano due punti equidistanti da P da bande opposte rispetto al piano a : A ed A'; si considerino il punto B sulla retta b ed il punto C sulla retta c, si congiungano B e C con A ed A'. Considero il triangolo BAA'; esso è isoscele perchè la sua altezza BP è anche mediana essendo PA=PA' per costruzione; pertanto AB = A'B; considerando il triangolo CAA' con la stessa dimostrazione ottengo CA = CA'. Congiungo C con B e considero ora i triangoli CAB e CA'B essi hanno: CB in comune AB = A'B perchè dimostrato AC = A'C perchè dimostrato quindi i due triangolo sono congruenti per il terzo criterio di congruenza ed in particolare avrà che l'angolo ABC è uguale all'angolo A'BC . Considero ora una retta **d** passante per P, basterà dimostrare che tale retta è perpendicolare ad **a**; la retta **d** incontrerà il segmento BC (od un suo prolungamento) nel punto D; congiungo D con A ed A' e considero i triangoli ABD ed A'BD essi hanno: AB = A'B perchè già visto prima BD in comune l'angolo ABC uguale all'angolo A'BC perchè già dimostrato quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza, in particolare avremo AD = A'D. Considero ora il triangolo ADA' , esso è isoscele prechè ha due lati AD ed A'D uguali ed essendo DP mediana per la proprietà dei triangoli isosceli sarà anche altezza cioè DP è perpendicolare alla retta a come volevamo dimostrare.

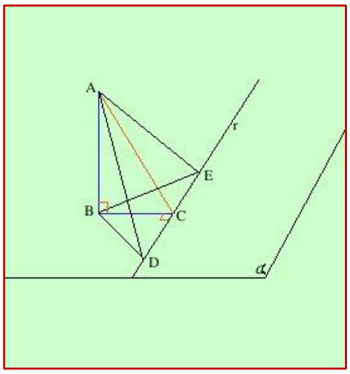
c) Teorema delle tre perpendicolari

Questo teorema ci garantisce che, in una piramide regolare, il raggio del cerchio inscritto nella base e l'apotema cadono nello stesso punto di un lato.

Se una retta e' perpendicolare ad un piano e se dal punto di incontro prendo sul piano una retta che sia perpendicolare ad un'altra retta del piano allora l'ultima retta e' perpendicolare al piano individuato dalle prime due rette.

Ipotesi: AB $\perp$ α BC $\perp$ r	**Tesi:** DE $\perp$ piano (ABC)

Per mostrare che la retta r e' perpendicolare al piano individuato dai punti ABC, essendo r per ipotesi gia' perpendicolare a BC, bastera' mostrare che e' anche perpendicolare ad un'altra retta del piano cioe' alla retta AC.



Sulla retta **r** da parti opposte rispetto a **C** considero due punti **D** ed **E** tali che **DC = CE**.
Considero il triangolo **BDE**, esso ha l'altezza **BC** che e' anche mediana e quindi e' un triangolo isoscele ed avro' **BD = BE**
Considero ora i triangoli rettangoli **ABD** ed **ABE**: sono rettangoli perche' le rette **BD** e **BE** passano per il punto d'incontro tra la perpendicolare ed il piano; essi, oltre l'angolo retto hanno:
AB in comune
BD = BE perche' appena dimostrato.
Quindi per un criterio di congruenza dei triangoli rettangoli avremo che i due triangoli sono congruenti ed in particolare avranno **AD = AE**.
Considero ora il triangolo **ADE**; esso, avendo due lati uguali **AD = AE** sara' isoscele e quindi la sua mediana **AC** sara' anche l'altezza; quindi AC e' perpendicolare a **DE** cioe' ad **r**. Essendo **r** perpendicolare a due diverse rette **AC** ed **AD** del piano individuato da **ABC** per il criterio di perpendicolarita' la retta r sara' perpendicolare al piano.
Come volevamo dimostrare.

F. Parallelismo nello spazio

Estendiamo nello spazio il concetto di parallelismo gia' visto nel piano:
- Parallelismo fra rette
- Parallelismo fra una retta ed un piano
- Parallelismo fra piani
- Teorema di Talete nello spazio

1. Parallelismo fra rette nello spazio

Due rette nello spazio si dicono **parallele** se giacciono sullo stesso piano e non hanno nessun punto in comune

Le due cose devono valere contemporaneamente perche':

- Se non giacciono sullo stesso piano e non hanno nessun punto in comune, si dicono sghembe (ad esempio lo spigolo di una parete e il bordo del pavimento non passante per lo spigolo sono un esempio di due rette sghembe).
- Se hanno un punto in comune, devono necessariamente giacere sullo stesso piano (ed essere secanti); infatti per il postulato che per tre punti passa un solo piano basta prendere su ognuna delle due rette un punto diverso da quello d'incontro per avere i tre punti che determinano il piano su cui giacciono le due rette.

In pratica le rette devono essere complanari ed allora vale la definizione gia' data nel piano

---

2. Parallelismo fra una retta ed un piano nello spazio

Parallelismo fra una retta ed un piano:

Una retta e' parallela ad un piano se non ha punti in comune col piano.

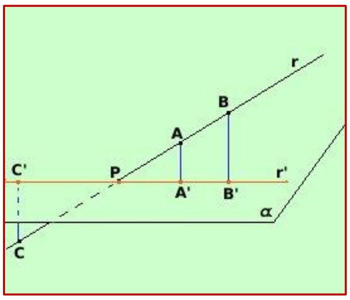
Siccome e' difficile far vedere che una retta ed un piano non hanno punti in comune (magari a 1.000.000.000 di km di distanza si incontrano!) allora abbiamo bisogno di un:

Criterio di parallelismo fra una retta ed un piano
Una retta, non giacente sul piano e' parallela al piano se e' parallela ad una retta del piano

Possiamo quindi rifarci al parallelismo fra due rette.
Adesso, prima di procedere poniamo il concetto di angolo fra una retta ed un piano:

- Proiezione di una retta su un piano
- Segmenti perpendicolari ed obliqui
- Angolo fra una retta ed un piano

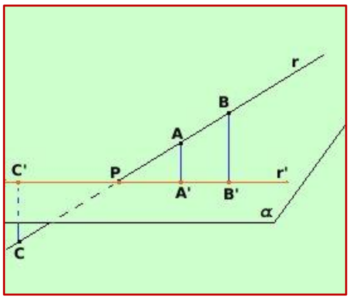
a) Proiezione di una retta su un piano



Consideriamo un piano **α** ed una retta **r** non giacente sul piano ma che lo intersechi nel punto **P**.
Consideriamo per ogni punto (**A**,**B**,**C**,...) della retta **r'** la perpendicolare condotta da tale punto al piano **α** e consideriamo quindi i piedi di tali perpendicolari (**A'**,**B'**,**C'**,...) Questi punti (piedi dei segmenti di perpendicolare condotti dai punti della retta al piano) formano una retta **r'** appartenente al piano; tale retta **r'** sara' chiamata la **proiezione della retta r sul piano α.**

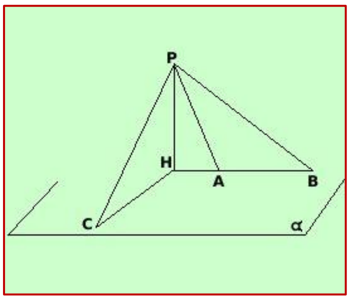
b) Segmenti perpendicolari ed obliqui

Analogamente a quanto fatto nel piano, vediamo le proprieta' dei segmenti di perpendicolare e delle oblique condotte al piano da un punto che sia esterno al piano stesso.



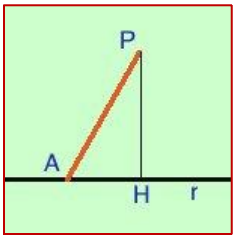
***Segmento di perpendicolare** e' il segmento compreso fra il punto sulla retta e il piede della perpendicolare condotta dal punto sul piano: ad esempio in figura sono segmenti di perpendicolare **AA'**, **BB'**, **CC'**.*
*Si dira' invece **segmento obliquo** un qualunque segmento che non sia perpendicolare cioe' un qualunque segmento che congiunga un punto esterno al piano con un punto del piano e che non appartenga alla retta perpendicolare dal punto al piano: ad esempio in figura **BP** e' un segmento obliquo.*

In pratica dobbiamo ripetere gli stessi teoremi gia' visti nel piano considerandoli sui triangoli costruiti perpendicolarmente al piano stesso, ti allego una figura per mostrartelo meglio:
Le proprieta' sono:

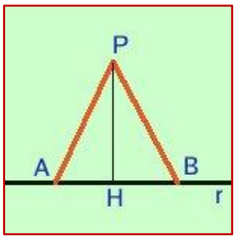


- Il segmento di perpendicolare e' minore di ogni segmento obliquo.
  Cioe' devo dimostrare **PH<PA**
- Segmento obliqui uguali hanno proiezioni uguali.
  Cioe' devo dimostrare **PB = PC**
- A proiezione maggiore corrisponde lato obliquo maggiore .
  Cioe' devo dimostrare che se **HC>HA** allora **PC>PA**

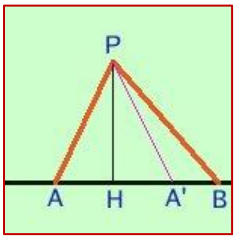
Il segmento di perpendicolare e' minore di ogni segmento obliquo
In effetti se consideri il triangolo PHA ha l'angolo in H retto e quindi maggiore degli altri angoli e ad angolo maggiore sta opposto lato maggiore.



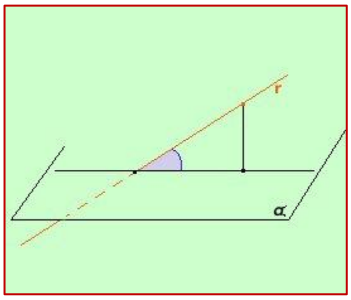
Segmento obliqui uguali hanno proiezioni uguali
Triangolo PAB: avendo due lati uguali e' isoscele e nei triangoli isosceli l'altezza taglia a meta' la base



A proiezione maggiore corrisponde lato obliquo maggiore
Ribaltando attorno ad AH il triangolo PAH ottieni il triangolo PA'H e nel triangolo che si forma A'BP l'angolo in A' e' ottuso

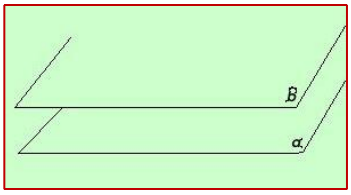


c) Angolo fra una retta ed un piano

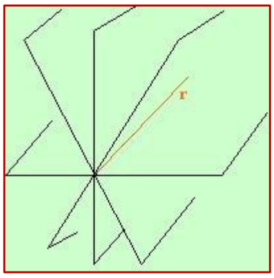


Possiamo ora definire l'**angolo fra una retta ed un piano** come l'**angolo fra la retta e la sua proiezione sul piano** .

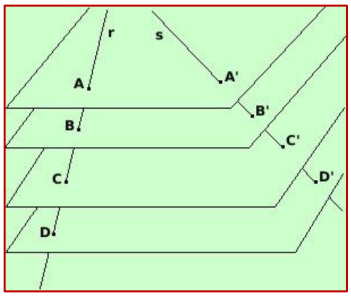
3. Parallelismo fra piani



Due piani nello spazio sono paralleli se non hanno nessun punto in comune e quindi, per la relazione fra piani nello spazio, nessuna retta, in comune.



Se nello spazio prendiamo l'insieme di tutti i piani passanti per una retta data otteniamo un fascio proprio di piani.



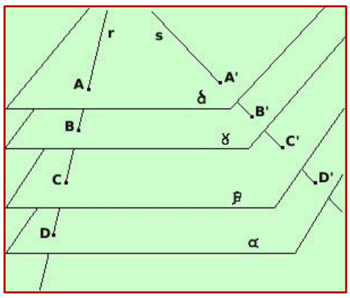
Se immaginiamo di spostare la retta all'infinito i piani del fascio diventano paralleli e noi abbiamo un fascio di piani paralleli o fascio improprio di piani .

4. Teorema di Talete nello spazio

Vediamo ora un teorema che ci sara' essenziale per trattare problemi su tronchi di cono e di piramide: l'equivalente nello spazio del teorema di Talete nel piano:

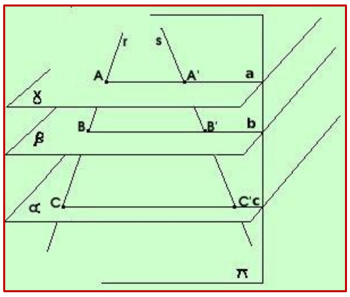
Un fascio di piani paralleli determina su due rette non appartenenti a nessun piano del fascio due insiemi di segmenti proporzionali

Ipotesi: $\alpha \,//\, \beta \,//\, \gamma \,//\, \delta$	**Tesi:** $AB : BC = A'B' : B'C'$



Dimostriamo il teorema nei seguenti casi:

- le due trasversali sono complanari
- le due trasversali non sono complanari

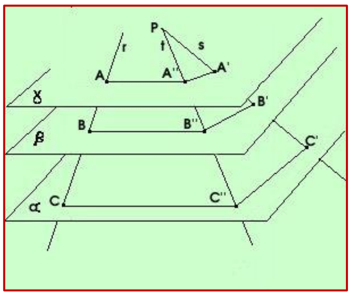


***Le due rette r ed s sono complanari*:**
in tal caso il piano π su cui giacciono le due rette taglia i piani paralleli in un fascio di rette parallele:

$$a // b // c // ....$$

ed il nostro teorema si riduce al teorema di Talete nel piano:

$$AB : BC = A'B' : B'C'$$



***Le due rette r ed s non sono complanari, cioe' sono sghembe*:**
in tal caso posso considerare sulla retta **s** un punto **P** e considerare dal punto **P** una retta **t** che sia complanare ad **r** e quindi sul piano individuato dalle rette **r** e **t** vale il teorema di Talete:

$$AB : BC = A''B'' : B''C''$$

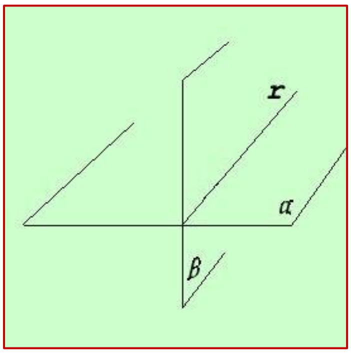
Inoltre le due rette **t** ed **s**,avendo il punto **P** in comune sono complanari e per il piano da loro individuato vale il teorema di Talete:

$$A''B'' : B''C'' = A'B' : B'C'$$

Per la proprieta' transitiva segue la tesi:

$$AB : BC = A'B' : B'C'$$

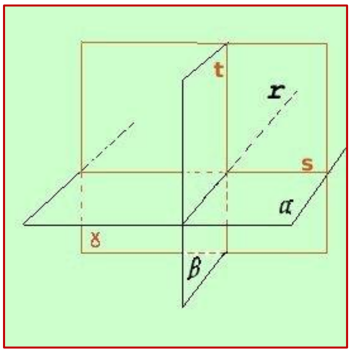
G. *Perpendicolarita' fra piani*



Vediamo ora di definire nello spazio la nozione di perpendicolarita'fra piani e di trarne le possibili proprieta' e conseguenze.

- Definizione
- Criterio di perpendicolarita' fra due piani
- Angolo diedro

1. Definizione



Vediamo come possiamo caratterizzare due piani nello spazio che siano fra loro perpendicolari.
Considero nello spazio due piani **α** e **β**.
Tali piani si taglieranno secondo una retta **r**.
Considero ora un piano **γ** che sia perpendicolare alla retta **r** in un suo punto qualunque; se tale piano individua su **α** e **β** due rette **s** e **t** tra loro perpendicolari allora i due piani **α** e **β** si diranno perpendicolari.

Naturalmente non possiamo sempre, per vedere se due piani sono perpendicolari, tracciare il piano perpendicolare alla loro retta comune, quindi dovremo prendere una **"scorciatoia"** cioe' trovare un **criterio** che ci permetta di dire in modo semplice se due piani sono o no tra loro perpendicolari; lo facciamo nella pagina successiva

La perpendicolarita' fra piani ci portera' poi ad estendere allo spazio la nozione di angolo, e quindi parleremo di angolo fra due piani (angolo diedro), ma prima dovremo fissare la nozione di angolo fra una retta ed un piano.

2. Criterio di perpendicolarita' fra due piani

Come criterio per la perpendicolarita' fra piani ci rifacciamo alla perpendicolarita' fra una retta ed un piano

Se almeno una retta del piano **α** e' perpendicolare al piano **β** allora il piano **α** e' perpendicolare al piano **β**.
Naturalmente se ce n'e' una di perpendicolari allora ce ne sono infinite.

Mostriamo che questa e' una condizione necessaria e sufficiente per la perpendicolarita' fra due piani:

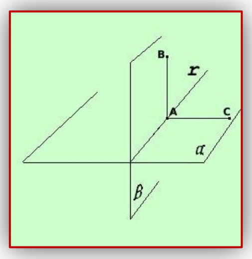
- La condizione e' necessaria
- La condizione e' sufficiente

Criterio di perpendicolarita' fra piani (condizione necessaria):

Mostriamo che la condizione e' necessaria: prendiamo una retta che giaccia sul piano β e tale retta sia perpendicolare al pianoα; mostriamo che il piano β e' perpendicolare al piano α.

Ipotesi: $AB \in \beta$, $AB \perp \alpha$	**Tesi:** $\beta \perp \alpha$

Consideriamo una retta **BA**, giacente su **β** e perpendicolare al piano α.



Il piano **β**, avendo in comune con **α** il punto **A** avra' in comune tutti i punti di una retta **r** passante per **A**.

Conduciamo per **A**, sul piano **α**, una retta perpendicolare ad **r**: sia **AC**.

Il piano individuato dai punti **ABC** taglia i due piani **α** e **β** secondo due rette **AB** e **AC** tra loro perpendicolari e quindi i due piani **α** e **β** risultano tra loro perpendicolari secondo la definizione.
Come volevamo.

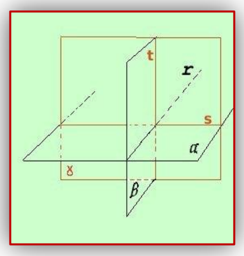
Come corollario possiamo dire che se una retta e' perpendicolare ad un piano dato allora qualunque piano passante per tale retta e' perpendicolare al piano dato

Criterio di perpendicolarita' fra piani (condizione sufficiente) :

Mostriamo che la condizione e' sufficiente: sapendo che i piani sono perpendicolari mostriamo che esiste una retta che giace sul piano **β** e tale retta e' perpendicolare al piano **α**.

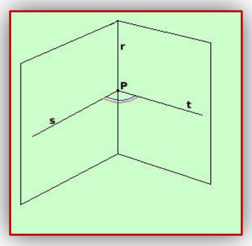
Ipotesi: $\beta \perp \alpha$	**Tesi:** $t \in \beta$, $t \perp \alpha$

Se i due piani sono tra loro perpendicolari allora esistono due rette tra loro perpendicolari **t** ed **s** intersezione dei due piani con il piano perpendicolare alla retta comune **r** come da definizione.

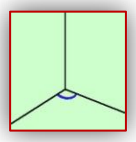


Ma allora la retta **t** appartenente al piano β e' perpendicolare a due rette diverse del piano α e precisamente a **r** e **s** e, di conseguenza, per il criterio di perpendicolarita' fra una retta ed un piano, essa e' perpendicolare al piano **α**.
Come volevamo.

3. Angolo diedro



Il concetto di perpendicolarita' fra piani ci permette ora di estendere nello spazio i concetto di angolo fra due piani che chiameremo angolo diedro.
Consideriamo due sempiani **α** e **β** aventi in comune la retta **r** e consideriamo sui due semipiani due semirette di origine **P** giacenti l'una su **α** e l'altra su **β** che siano perpendicolari alla retta **r.**
Le due rette **s** e **t** si chiameranno sezioni normali e l'angolo fra le due sezioni normali, cioe' l'angolo .
$s\hat{P}t$ viene considerato come angolo fra i due semipiani **α** e **β.**

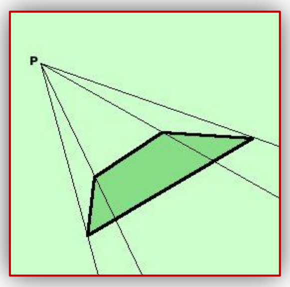


Tanto per intenderci meglio puoi considerare l'angolo diedro come l'angolo fra due pareti di case tua e considerare come sezioni normali le rette comuni fra le pareti ed il pavimento e quindi la misura dell'angolo corrisponde alla punta del pavimento come in figura.

H. *Generalita' sui poliedri*

1. Angoloidi

Dobbiamo ora passare a studiare i solidi cioe' degli oggetti che racchiudono uno spazio nel loro interno e formati da piu' facce (poliedri dal greco: piu' facce); cominciamo con il definire una figura geometrica, l'angoloide, che sara' quella che permettera' alle varie facce del solido di "convergere" in un vertice.

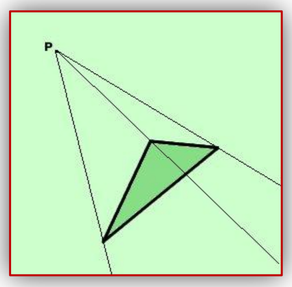


Consideriamo un poligono ed un punto esterno al piano su cui giace il poligono.
Definiremo ***angoloide*** lo spazio limitato da tutte le semirette uscenti dal punto dato e passanti per i punti della poligonale (perimetro del poligono).
Nota:
Naturalmente lo spazio viene diviso in due parti rispetto alle semirette: e' come negli angoli nel piano, perche' anche il piano viene diviso in due parti. L'angoloide e' un po' l'equivalente dell'angolo nello spazio; avremo quindi, con la nostra definizione, due angoloidi diversi: nel nostro caso (essendo il poligono generatore convesso) un angoloide e' covesso e l'altro e' non convesso.
Di solito, comunque, si intende per angoloide solamente la figura convessa.

In figura ho evidenziato in colore il poligono ed ho tracciato solamente le congiungenti il punto **P** con i vertici del poligono (quadrilatero): intuitivamente ottengo una piramide senza fine.
Il punto **P** sara' chiamato **vertice** dell'angoloide.

---

2. Triedri



Se il poligono generatore e' un triangolo otteniamo l'angoloide piu' semplice che chiameremo **Triedro**.
Quindi, definizione:
il **triedro** e' lo spazio limitato da tutte le semirette uscenti dal punto dato, non giacente sul piano di un triangolo, e passanti per i punti dei lati del triangolo .

In figura ho evidenziato in colore il triangolo ed ho tracciato solamente le congiungenti il punto **P** con i vertici del triangolo: intuitivamente ottengo una piramide triangolare senza fine .

Il punto **P** sara' chiamato **vertice** del triedro.

---

3. Alcune proprieta' importanti

Abbiamo detto che il triedro e' pressapoco come un angolo, meglio sarebbe dire che e' come un triangolo (inteso come insieme di 3 angoli) nello spazio, e quindi ha delle interessanti proprieta' comuni con la figura (triangolo classico) studiata in geometria del piano.
Naturalmente questo vale anche per gli angoloidi pensati come insiemi di piu' angoli
Esplicitiamo alcune proprieta', ricordando che un triedro e' un angoloide con 3 facce.

a) In un triedro ogni faccia e' minore della somma delle altre due

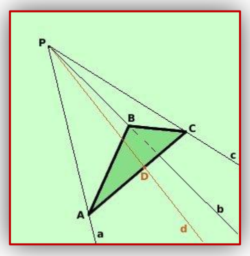
Dimostriamo il teorema:
In un triedro ogni faccia e' minore della somma delle altre due.
Come dimostrazione e' un po' laboriosa, ma ha una discreta importanza.

Intuitivamente, se penso il triedro con una faccia fissa e le altre due incernierate che possano ruotare attorno al lato della faccia fissa, il teorema mi dice che, se ruoto le due facce portandole sull'angolo fisso, allora le due facce risulteranno in parte sovrapposte: e' l'equivalente nello spazio del teorema sul triangolo: **in ogni triangolo un lato e' minore della somma degli altri due.**

Per **faccia** intendiamo l'angolo formato da due semirette uscenti dal vertice del triedro e passanti per i vertici del triangolo generatore:

Ipotesi: P(a,b,c) triedro	**Tesi:** $a\hat{P}b + b\hat{P}c > a\hat{P}c$

Supponiamo che **$a\hat{P}c$** sia la faccia maggiore (altrimenti il teorema e' evidente); su di essa prendiamo **$c\hat{P}d = c\hat{P}b$.**
Ora passiamo a costruire il triangolo di base **ABC**.
Fissiamo sulla semiretta **Pa** il punto **A** e sulla semiretta **Pc** il punto **C.**



Il segmento **AC** interseca la semiretta **Pd** nel punto **D**. Dal punto **P** riportiamo sulla semiretta **b** il segmento **PD = PB**.
In questo modo determino il punto **B** ed ho costruito il triangolo **ABC**.
Considero ora i triangoli **PBC** e **PCD**; essi hanno .
BC = CD per costruzione
$C\hat{P}D = C\hat{P}B$ sempre per costruzione
PC in comune.
Quindi i due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza dei triangoli.

Considero ora il triangolo **ABC**; per le proprieta' dei triangoli so che un lato e' maggiore della differenza degli altri due lati, cioe'

$$AB > AC - BC$$

e siccome **BC = CD** avro':

$$AB > AC - CD \quad \text{cioe'} \quad AB > AD$$

Considero ora i triangoli **PAB** e **PAD**; essi hanno:
PA in comune
PB = PD per costruzione.
Ma i due triangoli **PAB** e **PAD** non sono congruenti ed avendo disuguali i terzi lati avranno disuguali anche gli angoli opposti a tali lati, e, in particolare :

$$A\hat{P}B > A\hat{P}D$$

sommiamo ad entrambe i membri della disuguaglianza le due quantita' uguali:

$$B\hat{P}C = D\hat{P}C$$

$$A\hat{P}B + B\hat{P}C > A\hat{P}D + D\hat{P}C$$

e quindi, essendo:

$$A\hat{P}D + D\hat{P}C = A\hat{P}C$$

otteniamo :

$$A\hat{P}B + B\hat{P}C > A\hat{P}C$$

A tali angoli di triangoli corrispondono le facce del triedro:

$$a\hat{P}b + b\hat{P}c > a\hat{P}c$$

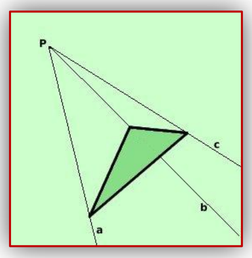
Come volevamo.

b) In un triedro ogni faccia e' maggiore della differenza delle altre due

Dimostriamo il teorema:
In un triedro ogni faccia e' maggiore della differenza delle altre due

Stavolta la dimostrazione e' quasi immediata:

Ipotesi: P(a,b,c) triedro	*Tesi:* $a\hat{P}b > a\hat{P}c - b\hat{P}c$



Partiamo dalla disuguaglianza appena dimostrata (valida per tutti i triedri):

$$a\hat{P}b + b\hat{P}c > a\hat{P}c$$

Sottraiamo da entrambe i membri dell'uguaglianza la stessa quantita' **bPc**:

$$a\hat{P}b + b\hat{P}c - b\hat{P}c > a\hat{P}c - b\hat{P}c$$

Elimino i due termini uguali con segno opposto ed ottengo:

$$a\hat{P}b > a\hat{P}c - b\hat{P}c$$

Come volevamo.

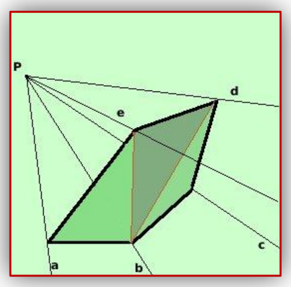
c) In un angoloide ogni faccia e' minore della somma di tutte le altre

Dimostriamo il teorema:

In un angoloide ogni faccia e' minore della somma dt tutte le altre

Anche qui la dimostrazione e' semplice: prendiamo come esempio per la dimostrazione un angolode a 5 facce.

Ipotesi: P(a,b,c,d,e) e' un angoloide	**Tesi:** $a\hat{P}e < a\hat{P}c + b\hat{P}c + c\hat{P}d + d\hat{P}e$



Suddivido opportunamente il poligono generatore in triangoli congiungendo con diagonali i vertici; in questo modo suddivido l'angoloide in triedri (ti evidenzio i triangoli dei triedri in colori diversi).

So che in ogni triedro ogni faccia e' minore della somma delle altre, quindi posso scrivere:

$$a\hat{P}e < a\hat{P}b + b\hat{P}e$$

ma vale anche:

$$b\hat{P}e < d\hat{P}e + b\hat{P}d$$

ed anche:

$$b\hat{P}d < b\hat{P}c + c\hat{P}d$$

quindi, sostituendo nelle varie disuguaglianze ottengo:

$$a\hat{P}e < a\hat{P}b + d\hat{P}e + b\hat{P}c + c\hat{P}d$$

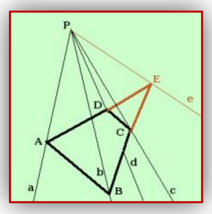
e, se metto in ordine, ottengo la tesi. Come volevamo.

d) In un angoloide la somma delle facce e' minore di un angolo giro

Dimostriamo che: **in un angoloide ogni faccia e' minore di un angolo giro.**

Intuitivamente: se fosse un angolo giro il bordo dell'angoloide si appiattirebbe diventando un piano e l'angoloide sarebbe un semispazio.

Dimostriamolo per un triedro; per un qualunque angoloide bastera' prolungare i lati di un opportuno poligono generatore fino ad ottenere un triedro e successivamente usare il teorema che una faccia e' minore della somma delle altre due; se vuoi approfondire, leggi:



Mostriamo come puoi trasformare un angoloide facendolo diventare un triedro e facendo in modo che si conservi la disuguaglianza che dice che una faccia e' minore della somma della altre: mostriamolo prima per un angoloide a 4 facce: Considera l'angoloide **Pabcd** trasformiamolo in triedro mantenendo la disuguaglianza che la faccia **Pab** e' minore di tutte le altre facce.

Prolungo i lati **BC** ed **AD** che si incontreranno in **E** .

Poiche' **Pced** e' un triedro, avro' che la faccia **Pcd** e' minore della somma delle facce **Ped** **Pce** e quindi se prima avevo:

$$Pab < Pac + Pdb + Pcd$$

ora avro':

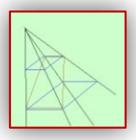
$$Pab < Pac + Pdb + Ped + Pce$$

cioe':

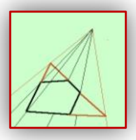
$$Pab < Pae + Pbe$$

Come volevamo.

Domanda: Se il poligono di base e' un rettangolo come posso fare il triedro? Risposta:
Il poligono di base e' una nostra costruzione; puoi benissimo farlo in modo da ottenere un quadrilatero che non sia un rettangolo: guarda la figura qui a lato: Invece di considerare le figure in blu puoi considerare la figura in rosso.

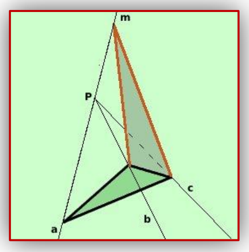


Di seguito una figura per come trasformare un angoloide a 5 facce in un triedro.



Ipotesi: P(a,b,c) e' un triedro	**Tesi:** $a\hat{P}e + a\hat{P}c + b\hat{P}c < $ Angolo giro

Consideriamo il triedro **P(a,b,c)**.
Considero la generatrice **Pa** e oltre **P** la considero come retta **m** e quindi considero il triedro **P(b,c,m)**.
Per esso vale:



$$b\hat{P}c < b\hat{P}m + c\hat{P}m$$

sommiamo ad entrambe i membri gli angoli:

$$a\hat{P}b + a\hat{P}c$$

Otteniamo :

$$b\hat{P}c + a\hat{P}b + a\hat{P}c < b\hat{P}m + c\hat{P}m + a\hat{P}b + a\hat{P}c.$$

Ordiniamo per capire meglio:

$$a\hat{P}b + b\hat{P}c + c\hat{P}a < (a\hat{P}b + b\hat{P}m) + (a\hat{P}c + c\hat{P}m).$$

Pero' sappiamo che vale (per costruzione: l'abbiamo costruito noi):

$$(a\hat{P}b + b\hat{P}m) = \text{angolo piatto}$$
$$(a\hat{P}c + c\hat{P}m) = \text{angolo piatto}$$

e quindi posso scrivere:

$$a\hat{P}b + b\hat{P}c + c\hat{P}a < \text{angolo giro .}$$

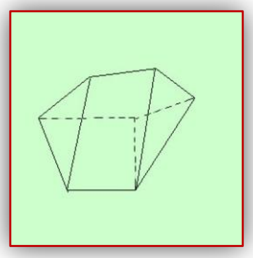
Come volevamo.

---

4. Poliedri

Intuitivamente se intersechiamo un angolide con un piano otteniamo una porzione di spazio limitata da triangoli e dal poligono di base; potremo pensare anche a porzioni di spazio limitate da poligoni diversi dai triangoli: in questo capitolo studieremo alcune proprieta' elementari di tali oggetti **(Poliedri).**

a) Definizione di Poliedro

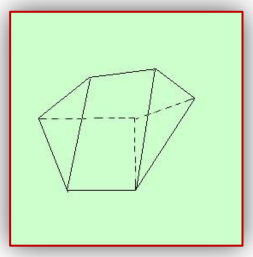


Definizione:
Poliedro e' la parte di spazio limitata da un numero finito di poligoni, giacenti su piani diversi ed aventi, due a due, un lato in

comune.
Poliedro deriva dal greco poli (piu') ed edros (facce) quindi letteralmente significa piu' facce.

Ogni poligono si chiama **Faccia**.
L'insieme delle facce si chiama **Superficie poliedrica**.
La parte di spazio limitata dalla superficie poliedrica si chiama **Volume** del poliedro.
I lati dei poligoni si chiamano **Spigoli** del poliedro.
I vertici dei poligoni si chiamano **Vertici** del poliedro.

Il tipo di poliedro e' individuato dal numero di facce della superficie poliedrica:
Tetraedro poliedro con 4 facce.
Pentaedro poliedro con 5 facce.
Esaedro poliedro con 6 facce.
....
Icosaedro poliedro con 20 facce.
....



A lato un esaedro.
I lati nascosti dietro la figura sono tratteggiati

---

b) Relazione fondamentale *(Relazione di Eulero)*

Consideriamo un qualunque poliedro; indichiamo con:
s il numero degli spigoli
f il numero delle facce
v il numero dei vertici
allora vale sempre la relazione:

$$s + 2 = f + v$$

Ad esenpio nel poliedro qui di fianco abbiamo
11 spigoli $s = 11$
6 facce $f = 6$
7 vertici $v = 7$
quindi, applicando la formula:

$$11 + 2 = 6 + 7$$

c) Poliedri regolari

Diremo che un poliedro e' regolare se ha tutte le facce formate da poligoni regolari congruenti.
Di conseguenza saranno congruenti fra loro anche tutti gli spigoli e gli angoloidi.

Siccome vale il teorema che la somma degli angoli di un angoloide deve sempre essere minore di un angolo giro, allora il numero di poligoni regolari che si possono costruire e' limitato: essendo uguali tutti gli angoloidi del poliedro avremo che, partendo da poligoni regolari, potremo costruire solo angoloidi tali che siano minori di un angolo giro.

Il triangolo equilatero ci fornira' 3 possibilita'; infatti essendo l'angolo di 60° potremo costruire i 3 angoloidi:
- triedro 60° x 3 = 180°
- angoloide a 4 facce 60° x 4 = 240°
- angoloide a 5 facce 60° x 5 = 300°

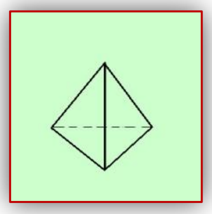
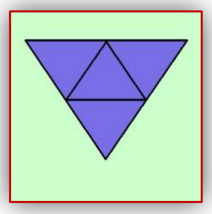
Non possiamo usare piu' facce perche' raggiungiamo e superiamo i 360°.
Il quadrato ci dara' una possibilita', infatti, avendo l'angolo di 90°, triedro 90° x 3 = 270°, con 4 facce poi raggiungo i 360°.
Anche il pentagono regolare ci dara' una possibilita': infatti un pentagono regolare ha la somma degli angoli interni di 540° e quindi l'angolo vale 108°, quindi triedro 108° x 3 = 324° con 4 facce poi supero i 360°
L'esagono regolare ha gli angoli ai vertici di 120° e quindi il solo triedro vale 360°.
Tutti gli altri poligoni regolari hanno angoli di valore superiore e quindi non e' possibile formare i triedri.

Avremo quindi le 5 possibilita' (i 5 corpi platonici)

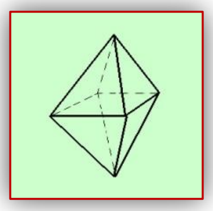
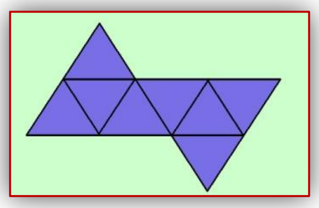
- Tetraedro regolare
- Ottaedro regolare
- Icosaedro regolare
- Cubo
- Dodecaedro regolare

I poliedri regolari sono diventati molto di moda nei giochi tipo D&D od anche nei giochi di ruolo da tavolo perche' permettono di avere casualmente varie possibilita'; scommetto che in casa hai tutta una serie di poliedri regolari (e magari non sapevi come si chiamano).
Invece, quando ero giovane io, non erano per niente comuni ed il maestro, in quinta elementare, ce li fece costruire manualmente con la carta; se vuoi puoi vedere qui come costruirli.
Stampa la pagina, ritaglia le figure e piegale lungo le linee scure
Stampa le figure su un foglio, ritaglia la parte colorata e piegala secondo le linee nere: otterrai le figure a lato.

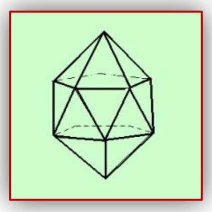
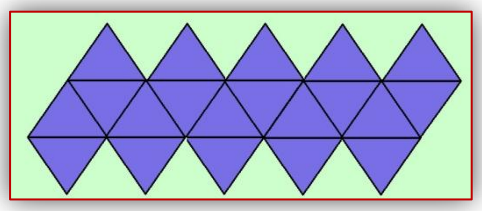
Tetraedro

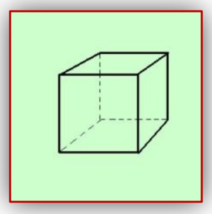
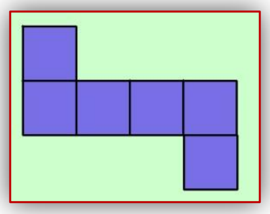
Ottaedro

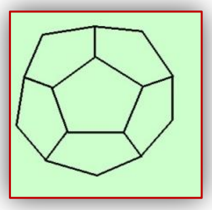
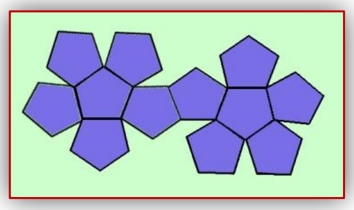
Icosaedro

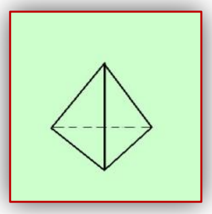
Cubo

Dodecaedro

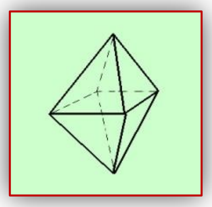
1) Tetraedro regolare



Consideriamo come figura base il triangolo equilatero e facciamo confluire, nello spazio, tre vertici di tre triangoli equilateri in un angoloide: l'angoloide misurera' quindi 180°; ripetendo la cvostruzione su un secondo vertice la figura si chiudera' ed otterremo un poliedro di 4 facce che avra' congruenti tutte le facce, i lati e gli angolidi: il **Tetraedro regolare.**

Il tetraedro regolare ha:
4 facce formate da triangoli equilateri congruenti
6 lati congruenti
4 angoloidi di 180° congruenti

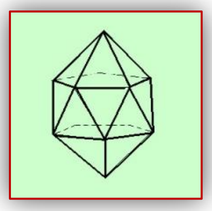
2) Ottaedro regolare



Consideriamo sempre come figura base il triangolo equilatero e facciamo confluire, nello spazio, quattro vertici di quattro triangoli equilateri in un angoloide: l'angoloide misurera' quindi 240°; i lati non in comune formeranno un poligono di 4 lati: se su ognuno di questi 4 lati poniamo un triangolo equilatero il solido si chiudera' ed otterremo un poliedro con 8 triangoli equilateri come facce e con 6 angolidi di 240° l'**Ottaedro regolare.**

L'ottaedro regolare ha:
8 facce formate da triangoli equilateri congruenti
12 lati congruenti
6 angoloidi di 240° congruenti

3) Icosaedro regolare

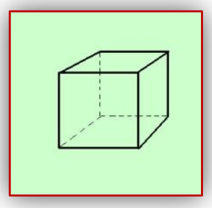


Consideriamo sempre come figura base il triangolo equilatero e facciamo confluire, nello spazio, cinque vertici di cinque triangoli equilateri in un angoloide: l'angoloide misurera' quindi 300°; i lati non in comune formeranno un poligono di 5 lati. Su ognuno di questi 5 lati poniamo un triangolo equilatero e poi, siccome negli angolidi di vertice del pentagono devono confluire 5 triangoli, poniamo un altro triangolo isoscele rovesciato accanto ad ognuno di questi triangoli. Otteniamo una specie di cintura di 10 triangoli equilateri con bordo superiore ancora un poligono di 5 lati (congruente a quello di partenza).
Ora poniamo sui lati del pentagono 5 triangoli equilateri facendo confluire le punte libere in un solo punto ed otteniamo l' **Icosaedro regolare.**

L'icosaedro regolare ha:
20 facce formate da triangoli equilateri congruenti
30 lati congruenti
12 angoloidi di 300° congruenti

---

4) Cubo



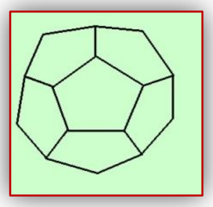
Consideriamo orae come figura base il quadrato e facciamo confluire tre vertici di tre quadrati in un angoloide: l'angoloide misurera' quindi 270°; Continuiamo la costruzione facendo in modo che in ogni vertice confluiscano i vertici di 3 quadrati.
In tal modo lo spazio viene racchiuso in un poliedro regolare: il **Cubo.**

Il cubo ha:
6 facce formate da quadrati congruenti
12 lati congruenti
8 angoloidi di 270° congruenti

---

5) Dodecaedro regolare

Consideriamo ora come figura base il pentagono regolare.



Per il teorema sulla somma degli angoli interni di un poligono avremo che la somma degli angoli interni vale:
180° x (5-2) = 180° x 3 = 540°
Essendo il pentagono regolare avra' tutti e 5 gli angoli interni congruenti, quindi uno degli angoli interni vale:
540° : 5 = 108°

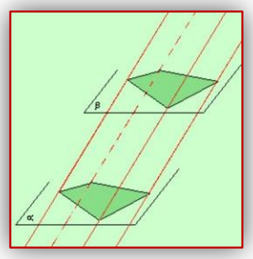
Facciamo confluire tre vertici di tre pentagoni regolari congruenti in un angoloide: l'angoloide misurera' quindi 324°; Continuiamo la costruzione facendo in modo che in ogni vertice confluiscano i vertici di 3 pentagoni.
In tal modo lo spazio viene racchiuso in un poliedro regolare: il **Dodecaedro regolare.**

Il dodecaedro regolare ha:
12 facce formate da pentagoni regolari congruenti
30 lati congruenti
20 angoloidi di 324° congruenti

I. *Prismi*

Cominciamo ora a studiare i solidi nello spazio anche dal punto di vista della loro superficie e del loro volume; iniziamo dalla famiglia dei prismi che sono un po' nello spazio l'equivalente dei poligoni nel piano.

1. Prisma indefinito



Consideriamo un poligono qualunque sul piano α e consideriamo un poligono congruente ad esso sul piano β diverso e parallelo ad α.

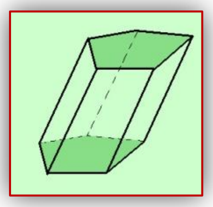
Consideriamo poi le congiungenti i punti corrispondenti dei perimetri dei due poligoni congruenti: in tal modo l'insieme di tali rette definiscono una **superficie prismatica indefinita** .

Lo spazio viene diviso in due parti da tale superficie prismatica: una parte non limitata ed una parte limitata da parti di piano che sono le facce del prisma .

Se poi consideriamo tutte le rette congiungenti punti corrispondenti dei due poligoni congruenti (perimetro compreso) allora consideriamo la parte di spazio circondata dalla superficie prismatica ed otteniamo il cosiddetto **prisma indefinito**.
Se partiamo da un poligono convesso possiamo definire come prisma la parte di spazio convessa delimitata dalla superficie prismatica chiusa (chiusa perche' cosi' comprende anche il bordo).
Quindi abbiamo la definizione:

Si definisce **prisma indefinito** la parte di spazio delimitata da tutte la rette parallele fra loro e passanti per i punti corrispondenti di due poligoni congruenti disposti su piani paralleli (e diversi).

2. Prisma



Ora per avere il prisma basta prendere la parte di prisma indefinito compreso fra due poligoni sezioni del prisma indefinito con due piani paralleli.

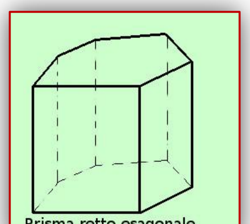
Da notare che, preso un prisma indefinito e presi due piani fra loro paralleli (e non paralleli alle rette generatrici del prisma), l'intersezione del prisma con i due piani paralleli individua due poligoni sempre congruenti fra loro che chiameremo **sezioni parallele.**

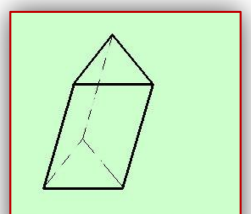
Definizione: Si dice prisma la parte di spazio racchiusa da un prisma indefinito compresa fra due sezioni parallele

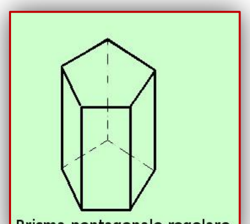
Chiameremo:
le sezioni parallele **basi del prisma**;
le altre facce diverse dalle basi **facce laterali** (sono sempre parallelogrammi) ;
i lati dei parallelogrammi non appartenenti alle basi si chiameranno **spigoli laterali del prisma** (sono tutti congruenti);
la distanza fra i piani contenenti le basi **altezza del prisma.**
Inoltre, il tipo di poligono dara' il nome al prisma: nella nostra figura abbiamo un **prisma pentagonale** mentre nella pagina precedente avevamo un **prisma quadrangolare.**

Se gli spigoli laterali sono perpendicolari alle basi avremo un **prisma retto**; il prisma in figura, invece, e' obliquo.

Se poi i poligoni di base del prisma retto sono poligoni regolari diremo che il prisma e' **regolare.**

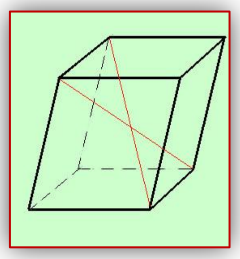

Prisma retto esagonale


Prisma triangolare non regolare


Prisma pentagonale regolare

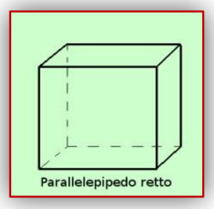
3. Parallelepipedo

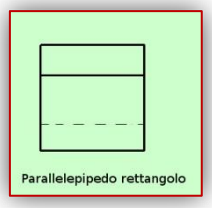
Particolare importanza fra i vari prismi avranno i prismi con base un parallelogramma.
Chiameremo un tale prisma **Parallelepipedo.**

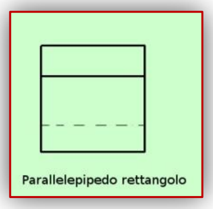


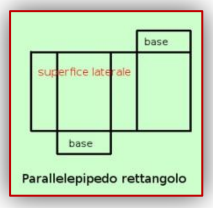
I parallelepipedi saranno, grosso modo, nello spazio l'equivalente dei parallelogrammi nel piano; da notare che tutte le facce del parallelepipedo saranno parallelogrammi e la facce opposte saranno sempre congruenti.
Come nel parallelogramma parleremo di **diagonale del parallelepipedo** considerando la congiungente due vertici opposti; tutte le diagonali saranno congruenti fra loro; inoltre, come nel parallelogramma, le diagonali si incontreranno tutte nello stesso punto che le dividera' a meta'.
In figura ho segnato solamente due diagonali (i segmenti in rosso).

Come dalla definizione delle pagine precedenti diremo che il parallelepipedo e' retto se ha gli spigoli perpendicolari alla base.
Particolare importanza fra i parallelepipedi ha il parallelepipedo rettangolo che oltre essere retto ha come base un rettangolo (e quindi tutte le facce, basi comprese, saranno rettangoli).



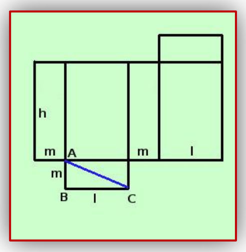


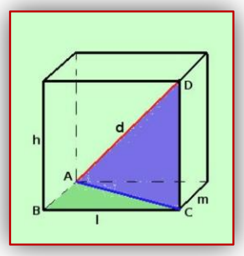




Se guardi l'ultima figura vedi che non e' molto chiara: infatti per mostrarti il rettangolo non ho potuto mettere la figura in prospettiva; per ovviare a questo inconveniente d'ora in poi, in caso di figure non chiare mostreremo le figure anche come espanse nelle facce: l'ultima figura precedente si potrebbe rappresentare come nella figura qui di fianco a destra. Per ragioni di spazio, nella figura a destra, alcune dimensioni sono state ridotte.

Come ultimo argomento dela pagina vediamo di calcolare il valore della diagonale del parallelepipedo rettangolo; Per capirci meglio stavolta metto la figura in prospettiva; a destra la figura sviluppata nelle sue superfici traccio una diagonale **d** in rosso; in blu traccio la proiezione della diagonale sulla base.





Essendo un parallelepipedo rettangolo la base e' un rettangolo e quindi per calcolare la diagonale di base **AC** possiamo applicare il teorema di Pitagora al triangolo **ABC** (quello in verde)

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = l^2 + m^2$$

Ora per calcolare il valore della diagonale **AD** del parallelogramma possiamo applicare il teorema di Pitagora sul triangolo **ACD** (quello in azzurro).

$$\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = (\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2) + \overline{CD}^2 = l^2 + m^2 + h^2$$

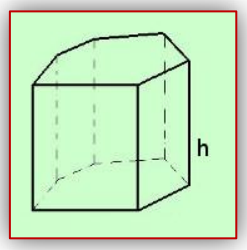
quindi possiamo concludere che la diagonale **d** di un parallelepipedo rettangolo e' uguale alla radice quadrata della somma dei quadrati delle tre dimensioni:

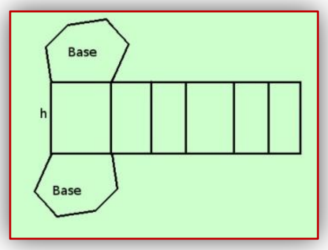
$$d = \sqrt{l^2 + m^2 + h^2}$$

---

4. Superficie laterale e totale

Cominciamo a parlare di superficie dei solidi: intenderemo intuitivamente come superficie di un solido quello che dovresti dipingere per colorare il solido stesso Distinguiamo i vari casi:





Consideriamo come primo esempio il prisma esagonale retto considerato nella pagina dei prismi e a destra sviluppiamone le superfici (cio' su cui andrebbe stesa la vernice).

Otteniamo 2 superfici di base uguali: la base inferiore e la base superiore chiamiamo l'area di una delle due basi **Asb**.
Otteniamo inoltre un insieme di rettangoli tutti con la stessa altezza **h** il cui numero dipende dal tipo di prisma retto (il nostro e' un prisma retto esagonale e quindi avremo 6 rettangoli).
Chiamiamo **2p** il perimetro di base .
Al solito usiamo **Perimetro = 2p** perche' in molte formule ci servira' la meta' del perimetro ed in questo modo potremo semplificarne parecchie.
Chiamiamo area superficie laterale **Asl** la somma delle superfici dei rettangoli Per calcolare l'area dei rettangoli possiamo considerare il rettangolo totale formato dai vari rettangoli: tale rettangolo ha come misura di base il perimetro di base **2p** e come altezza **h**, quindi possiamo scrivere.

Prisma retto

Area della superficie laterale = Asl = 2p·h

Se poi vogliamo calcolare l'area della superficie totale **Ast** dovremo sommare alla superficie laterale le aree delle due basi.

Prisma retto

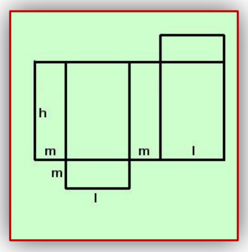
Area della superficie totale = Ast = Asl + 2Asb = 2p·h + 2Asb = 2(p·h + Asb)

Nel caso in cui il prisma retto sia regolare possiamo trovare l'area di base utilizzando il perimetro e l'apotema **a**, infatti tutti i poligoni regolari sono circoscrittibili, quindi, restando uguale la formula per la superficie laterale,avremo per la superficie totale

Prisma regolare

Area della superficie totale = Ast = Asl + 2Asb = 2p·h + 2p·a = 2p(h + a)

Essendo **a** l'apotema del poligono regolare di base avremo che l'area di una base vale **2p·a/2 = p·a** .



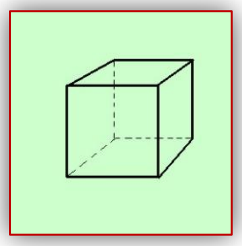
Come ultimo caso consideriamo la formula della superficie totale per il parallelepipedo rettangolo:
Chiamando
l la lunghezza
m la profondita'
h l'altezza
avremo:

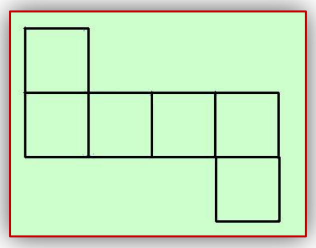
Parallelepipedo rettangolo

Area della superficie totale = Ast = Asl + 2Asb = 2(l+m)h + 2l·m = 2(l·h + m·h +l·m)

Naturalmente le formule del prisma retto valgono anche per il prisma regolare e per il parallelepipedo rettangolo: dipendentemente dai dati che hai sceglierai le formule che ti daranno la soluzione piu' semplicemente.

Consideriamo infine come caso particolare il cubo, cioe' il parallelepipedo con le 3 dimensioni uguali; a destra lo sviluppo della sua superficie .





Se chiamiamo **l** la misura dello spigolo, sostituendo **l** nella formula precedente ad **m** ed **h** avremo.

Cubo

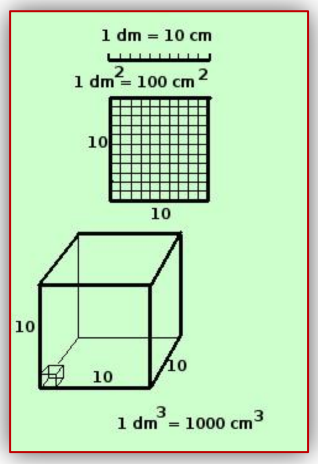
Area della superficie totale = Ast = Asl + 2Asb = $6\ l^2$

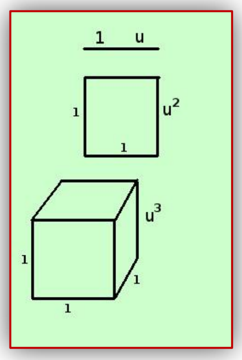
Come potevamo semplicemente trovare moltiplicando per 6 l'area di una faccia (quadrato)

5. Concetto di volume

Introduciamo ora uno dei concetti fondamentali dello spazio: il **volume** inteso come spazio racchiuso entro la superficie di un solido; intuitivamente il volume potrebbe essere la quantita' di acqua o di sabbia che mi serve per riempire completamente il solido. Siccome per misurare dobbiamo usare una unita' che sia dello stesso tipo dell'oggetto misurato useremo uno dei solidi piu' semplici: il cubo.
Intuitivamente potremmo pensare un cubo tanto piccolo da confonderlo con un granello di sabbia.

Parliamo subito di unita' di misura.





Siccome sulla retta abbiamo usato come unita' di misura il segmento unitario e nel piano abbiamo usato il quadrato unitario, qui, nello spazio useremo il cubo unitario, cioe' il cubo con lato l'unita' di misura lineare.
Qui bisogna fare molta attenzione nel trovare le misure equivalenti.
Infatti per trasformare da metro a decimetro basta moltiplicare per 10 (infatti in un metro sono compresi 10 decimetri) Pero', come vedi dalla figura a fianco, mentre in un decimetro ci sono 10 centimetri, in un decimetro quadrato ci sono 10x10 centimetri quadrati, cioe' per fare l'equivalenza devi moltiplicare per 100 per ogni unita' di misura inferiore.

Esempio:
trasformare in cm^2 il valore 12 dm^2 =
$12\ dm^2 = 12 \cdot 100\ cm^2 = 1200\ cm^2$
trasformare in cm^2 il valore 12 m^2 =
stavolta fra metri e centimetri ci sono 2 ordini di unita' di misura $12\ m^2 = 12 \cdot 100 \cdot 100 cm^2 = 120.000\ cm^2$
trasformare in m^2 il valore 12 Km^2 =
stavolta fra kilometri e metri ci sono 3 ordini di unita' di misura $12\ km^2 = 12 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100\ m^2 =$ $12.000.000\ m^2$

Nello spazio, siccome in un cubo di lato 10 volte maggiore ci stanno 10 cubetti in orizzontale, 10 in profondita' e 10 in verticale dentro il cubo ci sono 1000 cubetti, quindi dovrai moltiplicare per 1000 per ogni unita' di misura inferiore.

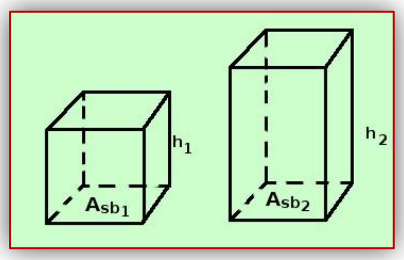
Esempio:
trasformare in cm^3 il valore 12 dm^3 =
12 dm^3 = 12 · 1000 cm^3 = 12.000 cm^3
trasformare in cm^3 il valore 12 m^3 =
stavolta fra metri e centimetri ci sono 2 ordini di unita' di misura 12 m^3 = 12 · 1000 · 1000 cm^3 = 12.000.000 cm^3
trasformare in m^3 il valore 12 Km^3 =
stavolta fra kilometri e metri ci sono 3 ordini di unita' di misura 12 km^3 = 12 · 1000 · 1000 · 1000 m^3 = 12.000.000.000 m^3

Ti ricordo che le principali unita' di misura lineari in ordine crescente sono (riferite al metro)
micron (1 milionesimo di metro)
millimetro **mm** (1 millesimo di metro)
centimetro **cm** (1 centesimo di metro)
decimetro **dm** (1 decimo di metro)
metro **m**
decametro **da** (10 metri)
ettometro **hm** (100 metri)
kilometro **km** (1000 metri)
Miriametro (10.000 metri)

---

6. Volume del parallelepipedo rettangolo

Procediamo ora a calcolare il primo volume: per questo abbiamo bisogno del teorema: **Due parallelepipedi rettangoli aventi le basi congruenti hanno i volumi proporzionali alle rispettive altezze.**
Se hai bisogno della dimostrazione, eccola:
Teorema:
Due parallelepipedi rettangoli aventi due dimensioni congruenti hanno i volumi proporzionali alla terza dimensione.
Dimostriamolo nella forma equivalente:
Due parallelepipedi rettangoli aventi le basi congruenti hanno i volumi proporzionali alle rispettive altezze.
Infatti se diversa e' una delle dimensioni di base basta rovesciare il solido facendo diventare altezza tale dimensione.



Ipotesi: $A_{sb1} = A_{sb2}$ **Tesi:** $V_1 : V_2 = h_1 : h_2$

Dimostrazione.
Per la dimostrazione usiamo il criterio generale di proporzionalita': in breve due insiemi di enti sono in proporzione se si conserva l'uguaglianza e la somma.
Consideriamo due insiemi di parallelepipedi rettangoli aventi la base congruente e come insiemi di enti in proporzione le altezze (prima classe) ed i volumi (seconda classe).
Dimostriamo che:

- Si conserva l'uguaglianza:se le altezze sono uguali allora sono uguali anche i volumi
- Si conserva la somma: se sommo due altezze allora vengono sommati anche i volumi corrispondenti
- La prima parte del criterio e' rispettato; infatti, se due parallelepipedi rettangoli con la stessa base hanno uguali anche le altezze (uguaglianza nella prima classe) allora anche i volumi corrispondenti

sono uguali (uguaglianza nella seconda classe); infatti, i due parallelepipedi avendo le stesse dimensioni avranno lo stesso volume

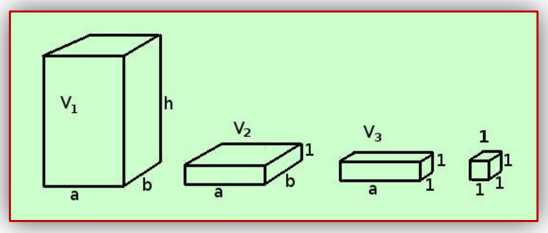
- Anche il secondo criterio e' rispettato; infatti, consideriamo nella prima classe due parallelepipedi rettangoli con la stessa base e sommiamoli; otterremo un parallelepipedo rettangolo con la stessa base e per altezza la somma delle altezze; in corrispondenza nella seconda classe otterremo un parallelepipedo rettangolo il cui volume e' la somma dei volumi dei due parallelepipedi presi prima

Essendo valido il criterio generale di proporzionalita' il teorema e' dimostrato.

Dimostriamo il teorema:

Il volume del parallelepipedo rettangolo si misura con il prodotto delle sue tre dimensioni

$V = a \cdot b \cdot h$



Consideriamo il parallelepipedo rettangolo di dimensioni **a**, **b** e **h** di volume V_1 ed anche il parallelepipedo rettangolo di dimensioni **a**, **b** e **1** di volume V_2; per il teorema di inizio pagina posso scrivere:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h}{1}$$

Consideriamo poi il parallelepipedo rettangolo di dimensioni **a**, **b** e **1** di volume V_2 ed anche il parallelepipedo rettangolo di dimensioni **a**, **1** e **1** di volume V_3; per il teorema di inizio pagina posso scrivere:

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{b}{1}$$

Consideriamo infine il parallelepipedo rettangolo di dimensioni **a**, **1** e **1** di volume V_3 ed anche il parallelepipedo rettangolo di dimensioni **1**, **1** e **1** di volume **1** (unita' di misura); per il teorema di inizio pagina posso scrivere:

$$\frac{V_3}{1} = \frac{a}{1}$$

Adesso prendiamo le tre uguaglianze e moltiplichiamo fra loro i termini prima dell'uguale e tra loro i termini dopo l'uguale:

$$\frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_2}{V_3} \cdot \frac{V_3}{1} = \frac{h}{1} \cdot \frac{b}{1} \cdot \frac{a}{1}$$

e, semplificando numeratore e denominatore otteniamo:

$$V_1 = a \cdot b \cdot h$$

e, generalizzando, per un generico volume **V.**

Parallelepipedo rettangolo
Volume $= a \cdot b \cdot h$

Come volevamo.

Siccome l'area del rettangolo di base si trova facendo

$$A_{sb} = a \cdot b$$

Avremo la formula:

Parallelepipedo rettangolo
Volume $= Asb \cdot h$

Il volume del parallelepipedo rettangolo si trova moltiplicando l'area di base per la misura dell'altezza

---

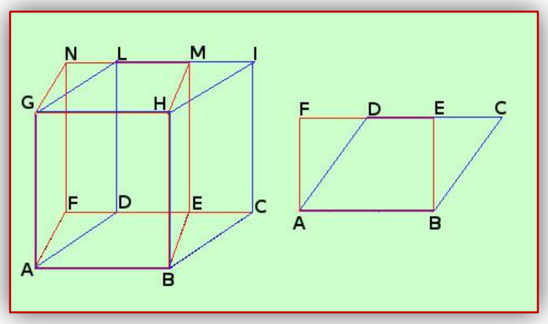
Infine vediamo il volume del cubo che possiamo considerare come un parallelepipedo rettangolo con le tre dimensioni uguali **l = a = b = c**

Cubo
Volume = $l \cdot l \cdot l = l^3$

Il volume del cubo si trova elevando alla terza la misura di un suo lato

---

7. Volume del parallelepipedo retto



Estendiamo ora le formule trovate per il parallelepipedo rettangolo al parallelepipedo retto.
Chiamiamo **equicomposti** due solidi se si possono suddividere in poliedri congruenti
Ti ricordo che abbiamo gia' visto la nozione di **equiscomponibilita'** nel piano; nello spazio l'equicomposizione ne e' l'equivalente per i solidi

Se consideriamo il parallelepipedo retto (**ABCDGHIL**) (figura in blu) , esso ha come base un parallelogramma.

Sappiamo dalla geometria del piano che un parallelogramma ha area equivalente ad un quadrato avente stessa base e stessa altezza .
A destra ti ho disegnato il parallelogramma di base ed il rettangolo equivalente che diventa la base di un parallelepipedo rettangolo (**ABEFGHMN**) (figura in rosso) .

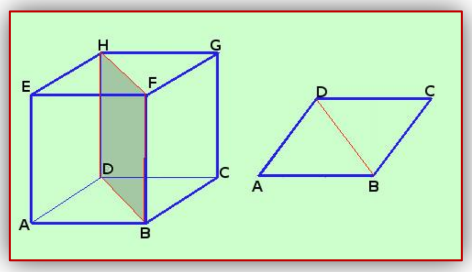
I due solidi sono equicomposti: infatti se consideri i poliedri (prismi retti triangolari) (**ADFGLN**) e (**BCEHIM**), essi hanno basi congruenti le basi **ADF = BCE** (vedi la dimostrazione fatta in geometria del piano sui parallelogrami equivalenti); hanno inoltre altezze congruenti; quindi componendo il solido (**ABEDGHM L**) con il prisma (**BCEHIM**), ottengo il parallelepipedo retto (**ABCDGHIL**), mentre componendo il solido **ABEDGHML** con il prisma **ADFGLN** ottengo il parallelepipedo rettangolo (**ABEFGHMN**
Essendo i solidi equicomposti essi hanno lo stesso volume e quindi posso dire:

Parallelepipedo retto
Volume = $A_{sb} \cdot h$

Il volume del parallelepipedo retto si trova moltiplicando l'area di base per la misura dell'altezza.

8. Volume del prisma retto

Vediamo quindi quali sono le formule per trovare il volume del prisma retto .
Partiamo dal volume del parallelepipedo retto: la sua base e' un parallelogramma.



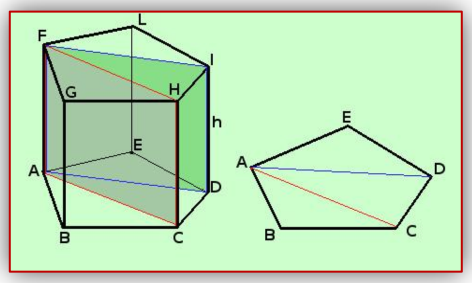
Sappiamo dalla geometria del piano che la diagonale di un parallelogramma lo divide in parti uguali.

Se quindi consideriamo il piano passante per tale diagonale e per i due spigoli laterali adiacenti, esso divide il parallelepipedo in due prismi retti congruenti (**ABDEFH**) e (**BCDFGH**).

I due prismi, essendo congruenti avranno lo stesso volume (che vale meta' del volume del parallelepipedo di partenza).
Quindi, siccome l'area di base di un prisma retto triangolare e' meta' dell'area del parallelogramma avremo anche per il suo volume:

$$V = Asb \cdot h$$

Ora, considerando un qualunque prisma retto, preso un vertice di base e congiungendo tale vertice con i restanti vertici di base dividiamo la base in triangoli.
se per ogni diagonale della base cosi' costruita consideriamo il piano formato da tale diagonale e dagli spigoli laterali adiacenti alla diagonale stessa, dividiamo il prisma in prismi retti triangolari. Allora il suo volume sara' dato dalla somma dei volumi dei prismi componenti:



$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots\dots$$

$$V = Asb_1 \cdot h + Asb_2 \cdot h + Asb_3 \cdot h + \dots.$$

e raccogliendo **h:**

$$V = (Asb_1 + Asb_2 + Asb_3 + \dots.) \cdot h$$

Ma sommando le aree dei triangoli di base otteniamo l'area della figura di base quindi:

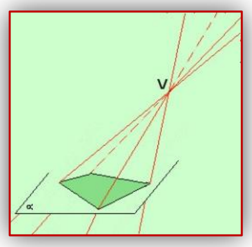
Prisma retto
Volume = Asb·h

Il volume del prisma retto si trova moltiplicando l'area del poligono di base per la misura dell'altezza.
Come esempio nella figura a lato ho preso un prisma retto pentagonale che viene suddiviso in tre prismi retti triangolari aventi la stessa altezza **h.**

J. Piramidi

Consideriamo ora i solidi a punta: le piramidi

1. Piramide indefinita



Consideriamo un poligono qualunque sul piano α e consideriamo un punto **V** fuori del piano α.

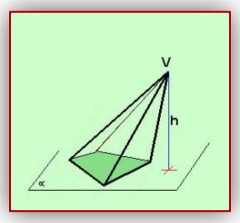
Consideriamo poi le congiungenti il punto **V** con i punti del poligono: in tal modo l'insieme di tali rette definiscono una **superficie piramidale indefinita.**
Lo spazio viene diviso in tre parti da tale superficie : una parte non limitata e due parti limitate da parti di piano, angoli di vertice **V**, che sono le facce della piramide.

Se poi consideriamo tutte le rette congiungenti il punto **V** con tutti i punti del poligono (perimetro compreso) allora otteniamo una parte di spazio che chiameremo **piramide indefinita.**
Quindi abbiamo la definizione:

Si definisce **piramide indefinita** la parte di spazio delimitata da tutte la rette congiungenti un punto **V** (vertice) con i punti di un poligono giacente su un piano che non contenga il punto **V.**
Da notare che la piramide indefinita e' simmetrica rispetto al vertice **V**

2. Piramide

Ora per avere la piramide basta prendere la parte di piramide indefinita compresa fra il vertice **V** e il poligono generatore

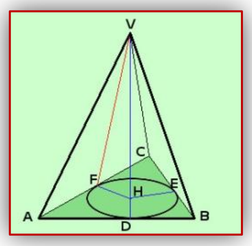


Definizione: Si definisce piramide la parte di spazio racchiusa da un angoloide ed un piano non passante per il vertice dell'angoloide e che ne intersechi tutti gli spigoli

Chiameremo:
il poligono **base della piramide**;
i triangoli dell'angoloide **facce laterali** ;
i lati dei triangoli diversi dai lati del poligono di base si chiameranno **spigoli laterali della piramide .**
L' altezza di una faccia laterale la chiameremo **apotema** la distanza fra il punto **V** ed il piano **altezza h della piramide.**
Inoltre, il numero di lati del poligono dara' il nome alla piramide: nella nostra figura abbiamo una **piramide quadrangolare**

3. Piramide retta

Per poter avere esercizi abbastanza semplici, senza dover fare un calcolo per ogni faccia della piramide abbiamo bisogno di pensare a piramidi che abbiano le facce



uguali, od almeno con le stesse altezze; diventa quindi essenziale pensare piramidi che abbiano delle particolari caratteristiche.
Intendiamoci: nulla vieta di fare esercizi con piramidi oblique e mi ricordo che in un tema d'esame della maturita' magistrale si dovevano calcolare tutti gli spigoli e le altezze delle varie facce diverse fa loro, ma nella mia carriera gli esercizi che ho visto di questo tipo si contano sulle dita di una mano.

Consideriamo l'insieme dei poligoni circoscritti ad una circonferenza: se la nostra piramide ha come base uno di tali poligoni e la perpendicolare dal vertice cade esattamente nel centro del cerchio inscritto nel poligono allora diremo che tale piramide e' **retta**.

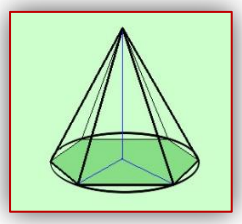
Come esempio in figura hai una piramide triangolare retta (un triangolo e' sempre circoscrivibile ad un cerchio).

Da notare che , essendo congruenti i raggi **HD**, **HE** e **HF** ed essendo comune il segmento **VH** avremo che i tre triangoli **VHD**, **VHE** e **VHF** sono congruenti, cioe' le apoteme di una piramide retta sono sempre congruenti fra loro.
In figura, per non appesantire, ho disegnato completo solo il triangolo **VHF** .

Diremo infine **regolare** una piramide retta che abbia come base un poligono regolare.

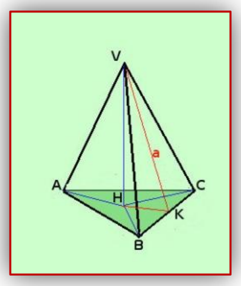
In tal caso tutte le facce laterali della piramide sono tra loro congruenti.

A destra una piramide esagonale regolare.

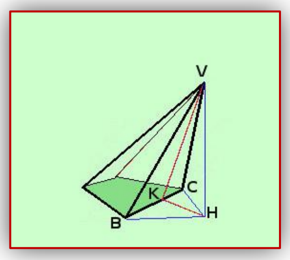


4. Nota importante

Prima di procedere al calcolo delle superfici facciamo riferimento ad un fatto fondamentale nelle piramidi.
Osserva la figura a destra: siccome **VH** e' perpendicolare ad **HK** ed **HK** e' perpendicolare a **BC** allora per il teorema delle 3 perpendicolari **BC** e' perpendicolare al piano individuato da **VHK** e quindi avremo che vale sempre :



$$BC \perp HK \quad \text{e} \quad BC \perp VK$$



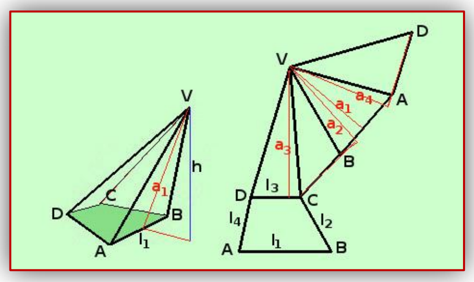
Vale a dire che, nei calcoli, potrai sempre considerare come triangoli rettangoli i triangoli :

VHK HKB HKC VKB
VKC VHB VHC

essendo l'angolo retto sempre quello centrale.

Io ho fatto come figura una piramide retta, ma questo fatto vale per tutte le piramidi, anche oblique; a sinistra la costruzione equivalente per una piramide obliqua.

5. Superficie laterale e totale della piramide



Consideriamo come primo esempio una piramide obliqua, in tal caso dobbiamo avere la pazienza di calcolare la superficie faccia per faccia, perche' le facce laterali generalmente avranno basi ed apoteme diverse una dall'altra.

Quindi dovremo dire:

Piramide non retta

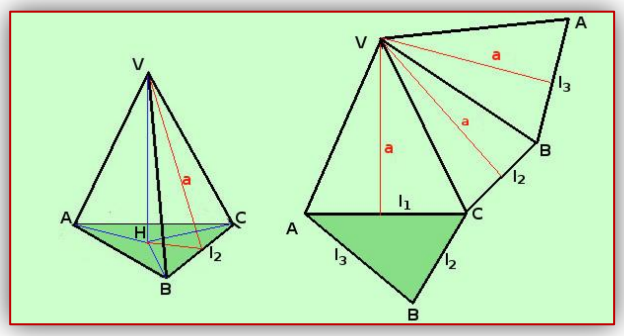
$$Asl = l_1 \cdot a_1 + l_2 \cdot a_2 + l_3 \cdot a_3 + l_4 \cdot a_4 + \ldots..$$

dove il numero dei termini da sommare dipende dal numero dei lati del poligono di base. Da notare che, nella figura considerata, l'apotema $\mathbf{a_2}$ ed $\mathbf{a_4}$ delle facce **VBC** e **VAD** cade fuori dalla base **BC** ed **AD** delle facce stesse.

Per la superficie totale sara' sufficiente aggiungere l'area di base:

Piramide non retta

$$Ast = Asb + Asl = Asb + l_1 \cdot a_1 + l_2 \cdot a_2 + l_3 \cdot a_3 + l_4 \cdot a_4 + \ldots..$$



Se la piramide e' retta la situazione cambia: qui le facce laterali e avranno apoteme uguali .

Stavolta facciamo la formula per una piramide retta triangolare.

Naturalmente il numero dei termini da sommare dipende sempre dal numero delle facce.

Piramide retta

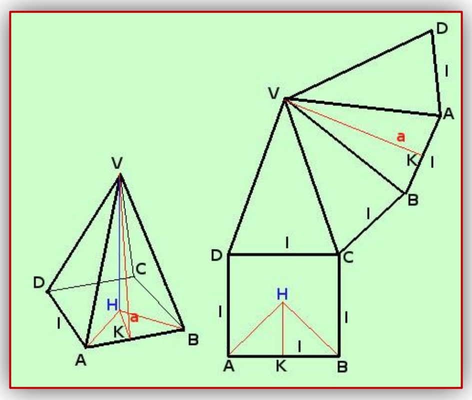
$$Asl = l_1 \cdot a + l_2 \cdot a + l_3 \cdot a = a \cdot (l_1 + l_2 + l_3)$$

Per la superficie totale sara' sufficiente aggiungere l'area di base:

Piramide retta

$$Ast = Asb + Asl = Asb + a \cdot (l_1 + l_2 + l_3)$$

Qualcosa di piu' si puo dire per la piramide regolare: infatti avremo che tutti i lati del poligono di base sono uguali e quindi saranno uguali le misure dei lati di base e delle apoteme delle facce laterali (anzi qui le stesse facce laterali saranno congruenti).



Quindi potremo scrivere:

Piramide regolare

$$Asl = 2p \cdot a/2 = p \cdot a$$

Qui devi fare molta attenzione a distinguere fra apotema del poligono di base (**HK** nella figura) ed apotema **a** della piramide **VK**: la prima e' la proiezione della seconda.

Se poi vogliamo calcolare l'area della superficie totale **Ast** dovremo sommare alla superficie laterale l'area di base.

Piramide regolare

$$Ast = Asb + Asl = Asb + p \cdot a$$

Naturalmente, puoi farti la formula specifica per ogni tipo di piramide regolare, ma, secondo me, non ne vale la pena.

6. Principio di Cavalieri

Ora dobbiamo passare a calcolare il volume di una piramide: per semplificare i calcoli premetto il principio di Cavalieri, che ci permettera' di ottenere le formule per il volume della piramide (e non solo) in modo abbastanza semplice ed intuitivo. Quando insegnavo alle magistrali preferivo sempre questo metodo a quello classico degli scaloidi (una specie di integrale spiegato ad alunni che, come programma, non avevano nemmeno le equazioni di secondo grado complete). Se a qualcuno il metodo dello scaloide interessa me lo scriva ed io lo inserisco in una nota in questa pagina.

Enunciamo il principio di Cavalieri:

Consideriamo due solidi aventi la stessa altezza **h.**
Se tali solidi, aventi le basi equivalenti (stessa area) sono tagliati da piani paralleli al piano di base secondo poligoni equivalenti allora i due solidi hanno lo stesso volume.
Se, essendo uguale l'altezza,

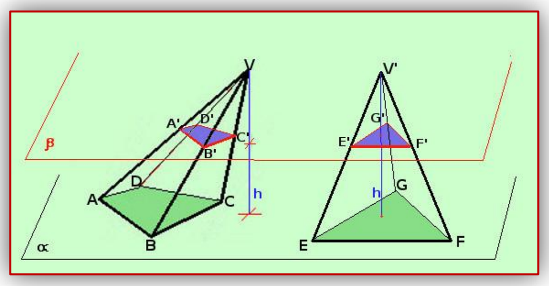
$$As(ABCD) = As(EFG)$$

e per ogni piano β parallelo ad α vale:

$$As(A'B'C'D') = As(E'F'G')$$

allora vale:

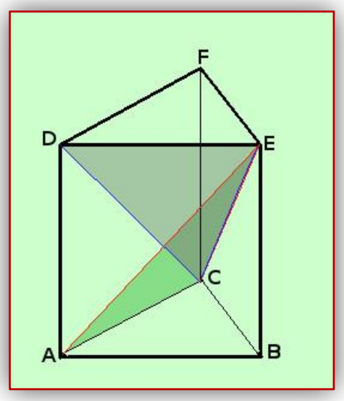
$$Vol(VABCD) = Vol(V'EFG)$$



Cioe', intuitivamente, se, tagliando i solidi, mi vengono sempre fette equivalenti allora i due solidi hanno lo stesso volume.

Come conseguenza immediata del pricipio di Cavalieri possiamo dire che due piramidi sono **equiestese** (cioe' hanno lo stesso volume) se hanno basi equivalenti e stessa altezza, come rappresentato in figura.

7. Equiestensione prisma-piramide



Teorema:

Una piramide e' equiestesa alla terza parte di un prisma avente base equivalente e stessa altezza.

Facciamo la dimostrazione per una piramide triangolare (e quindi per un prisma triangolare) per le piramidi con altra base bastera' applicare il principio di Cavalieri (vedi figura a pagina precedente).

IPOTESI: **ABCE** piramide

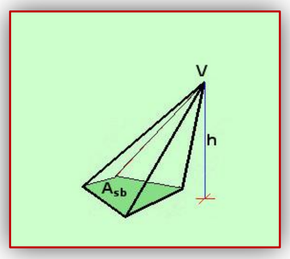
TESI: **Vol(ABCE) = 1/3 Vol(ABCDEF)**

Dividiamo il prisma in 3 tetraedri:
DCEF, **DCEA** e **ABCE**(la nostra piramide).

Consideriamo i due tetraedri **DCEF** e **DCEA**: essi hanno la stessa base **DCE** ed inoltre le altezze condotte da **F** ed **A** sul piano **DCE** sono congruenti, quindi i due tetraedri, avendo basi equivalenti ed altezze uguali hanno stesso volume .
Consideriamo poi i tetraedri **DCEA** e **ABCE**: essi hanno la stessa base **ACE** ed inoltre le altezze condotte da **D** e **B** sul piano **ACE** sono congruenti, quindi i due tetraedri, avendo basi equivalenti ed altezze uguali hanno stesso volume .

Di conseguenza i tre tetraedri sono tra loro equiestesi e quindi uno di loro e' equiesteso alla terza parte del prisma; allora la piramide **ABCE** e' equiestesa alla terza parte del prisma **ABCDEF**; come volevamo.

8. Volume di una piramide



Ormai e' facile determinare il volume di una piramide: bastera' considerare il volume di un prisma avente la stessa base e la stessa altezza e dividere il risultato per 3.

Volume di una piramide

$$Volume = \frac{As_b \cdot h}{3}$$

Esecizio: Calcolare il volume di una piramide a base quadrata avente il lato di base di valore 10 cm e l'altezza di valore 6 cm.
Dati
l = 10 cm
h = 6 cm
Svolgimento: non conosciamo il tipo di piramide (retta, regolare,...) ma questo non interferisce nel calcolo del volunme: i dati che abbiamo ci sono sufficienti.
Calcoliamo l'area della superficie della base; essendo un quadrato ne calcolo l'area:
$A_{sb} = l^2 = (10\ cm)^2 = 100\ cm^2$
Volume $= A_{sb} \cdot h\ /3 = 100\ cm^2 \cdot 6\ cm\ /3 = 200\ cm^3$

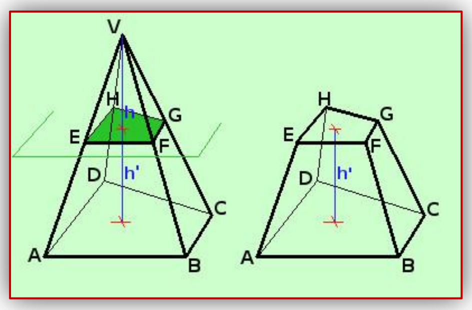
9. Tronco di piramide con basi parallele

Mai considerato un tronco di piramide a basi non parallele, quindi, quando parleremo di tronco di piramide sottointenderemo sempre che le basi sono parallele

Consideriamo una piramide, ad esempio **VABCD.**

Parallelamente alla base tagliamola con un piano secondo il poligono **EFGH**; essendo i due piani paralleli avremo che i poligoni **ABCD** ed **EFGH** sono simili.

La parte di piramide compresa fra le due basi sara' chiamata **tronco di piramide.**

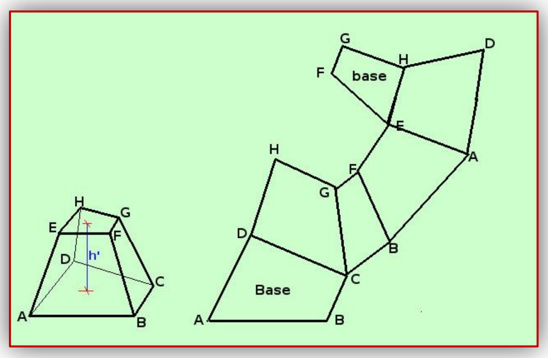


Chiameremo:
il tronco di piramide come**ABCDEFGH**
ABCD base maggiore del tronco di piramide
DEFG base minore del tronco di piramide
la distanza fra le due basi **h'** sara' l'**altezza** del tronco di piramide
le facce del tronco di piramide sono dei trapezi (hanno sempre 2 lati paralleli)

10. Superficie laterale e totale del tronco di piramide

Se il tronco di piramide deriva da una piramide **non retta** allora le facce laterali dipendono dai lati del poligono di base, ma hanno altezze diverse e quindi dovremo calcolare le aree delle facce una ad una.

Quindi possiamo scrivere:



Piramide non retta

Asl = As(faccia1) +As(faccia2) +As(faccia3) +As(faccia4) + ...

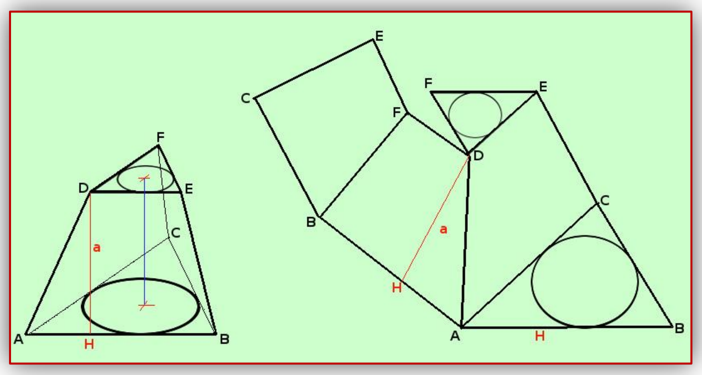
ed ogni faccia e' un trapezio, quindi, per calcolarne l'area, devi conoscere le misure della base maggiore, della base minore e dell'altezza di ogni faccia.
Per la superficie totale dovremo aggiungere le due aree di base:

Piramide non retta

$$Ast = AsB + Asb + As(faccia1) + As(faccia2) + As(faccia3) + As(faccia4) + \dots$$

dove ho indicato con **AsB** l'area della base maggiore e con **Asb** quella della base minore.

Molto di piu' si puo' dire se il tronco deriva da una piramide retta: in tal caso abbiamo che tutti i trapezi laterali hanno la stessa altezza (in figura indicata con **a**).
Pertanto potremo scrivere:



Piramide retta

$$Asl = a \cdot (pB + pb)$$

Ho indicato con **pB** il semiperimetro della base maggiore e con **pb** il semiperimetro della base minore; e, anche qui, per la superficie totale bastera' aggiungere le due aree di base.

Piramide retta

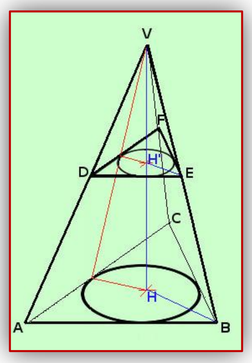
$$Ast = AsB + Asb + a \cdot (pB + pb)$$

Si potrebbero scrivere formule piu' compatte evidenziando i perimetri di base, ma perche' complicarci la vita? Secondo me e' piu' semplice fare i calcoli cosi'.

11. Volume del tronco di piramide

a) Approfondimento sulla proporzionalita'

Sappiamo gia' dalla geometria piana che nei poligoni simili le aree stanno fra loro come i quadrati dei lati, delle altezze, delle apoteme corrispondenti.



Ad esempio nel tronco di piramide considerato in figura avremo:
$As(ABC) : As(DEF) = AB^2 : DE^2 = BC^2 : EF^2 = CA^2 : FD^2$

Possiamo estendere la proprieta' nello spazio (lo facciamo pero' senza dimostrazione per ora) dicendo che nello spazio vale la proprieta':

Se due solidi sono simili allora i volumi stanno fra loro come i cubi delle relative altezze, apoteme, lati corrispondenti .

I due solidi in figura, intuitivamente, sono simili perche' i piani su cui poggiano le basi **ABC** e **DEF** sono paralleli, quindi e' valido il teorema di Talete nello spazio.
In figura ti ho tracciato alcuni triangoli simili: in rosso quelli per le apoteme ed i raggi, in blu quelli per le altezze e gli spigoli.

Cioe' ad esempio nella figura a fianco avremo:

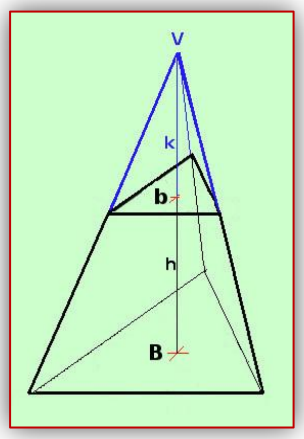
$$Vol(VABC) : Vol(VDEF) = VH^3 : VH'^3$$
$$Vol(VABC) : Vol(VDEF) = AB^3 : DE^3 = ...$$

In particolare, per calcolare il volume del tronco di piramide, utilizzeremo la proporzione fra le aree e le altezze che, utilizzando la figura a fianco, potremo scrivere nel seguente modo.

$$As(ABC) : As(DEF) = VH^2 : VH'^2$$

b) Calcolo del volume

Consideriamo il tronco di piramide di base maggiore **B**, di base minore **b** e di altezza **h**



Per semplicita' chiamiamo **B** sia la base maggiore che la misura dell'area della base stessa, lo stesso vale per **b**.
Come dati ho le misure delle aree di base e quello dell'altezza **h** quindi devo trovare la formula finale solamente con questi dati

---

Prolungo il tronco di piramide fino ad ottenere il vertice **V** e considero le due piramidi di vertice **V**:
la prima di base **B** ed altezza **h+k**;
la seconda (quella sopra) di base **b** ed altezza **k**.

Per calcolare il volume del tronco di piramide faro' la differenza fra il volume della piramide maggiore e quello della piramide minore.
Per semplicita' chiamo **VM** il volume della piamide maggiore e **Vm** il volume della piramide minore e **q** l'altezza della piramide maggiore (**q=h+k**).
Ho:

$$VM = \frac{B \cdot q}{3} \quad e \quad Vm = \frac{b \cdot k}{3}$$

$$V_{tronco} = \frac{B \cdot q}{3} - \frac{b \cdot k}{3} = \frac{Bq - bk}{3}$$

Ora, in questa formula, dobbiamo sostituire i termini non noti con un espressione data dai miei termini noti (**B**, **b** ed **h**),

Applichiamo la proporzione indicata nella pagina precedente fra le aree e le altezze: posso scrivere:

$$B : b = q^2 : k^2$$

Per la proprieta' del permutare scrivo:

$$B : q^2 = b : k^2 = d$$

Ho chiamato **d** il valore del rapporto di proporzionalita'.
Quindi posso ricavare **B** e **b:**

$$B = d\,q^2 \text{ e } b = d\,k^2$$

Sostituendo nella formula del volume, ottengo:

$$V_{tronco} = \frac{dq^2 \cdot q - dk^2 \cdot k}{3} = \frac{dq^3 - dk^3}{3}$$

evidenzio **d/3:**

$$V_{tronco} = \frac{d}{3}(q^3 - k^3)$$

scompongo: (differenza di cubi)

$$V_{tronco} = \frac{d}{3}(q - k)(q^2 + qk + k^2)$$

ed essendo **q-k = h:**

$$V_{tronco} = \frac{dh}{3}(q^2 + qk + k^2)$$

riporto **d** dentro parentesi:

$$V_{tronco} = \frac{h}{3}(dq^2 + dqk + dk^2)$$

Ma dal calcolo $B = d\,q^2$ e $b = d\,k^2$ fatto sopra so che vale :

$$dq^2 = B \text{ e } dk^2 = b$$

inoltre, moltiplicando **B·b** , ottengo $B \cdot b = d^2q^2k^2$ ed, estraendo la radice e leggendo alla rovescia:

$$dqk = \sqrt{Bb}$$

Quindi, sostituendo arriviamo alla formula finale:

$$V_{tronco} = \frac{h}{3}(B + \sqrt{Bb} + b$$

Stavolta leggere la formula non e' molto semplice: comunque, se a qualcuno interessa occorre fare riferimento alla proporzione continua (quella che ha i termini medi identici **B : x = x : b**) in modo che ricavando **x** (termine medio proporzionale) ottengo $\sqrt{Bb}$.
Il volume di un tronco di piramide di altezza data e' uguale al volume di 3 piramidi aventi la stessa altezza, la prima avente come base la base maggiore del cono, la seconda avente come base l'area di un poligono medio proporzionale fra le due basi e la terza avente come base la base minore del tronco dato.

Facciamo un semplice esercizio:
Calcolare il volume di un tronco di piramide avente base maggiore di area 12m², base minore di 3 m², alto 2 metri
Applichiamo la formula

$$V_{tronco} = \frac{2m}{3}(12m^2 + \sqrt{12m^2 \cdot 3m^2} + 3m^2)$$

$$V_{tronco} = \frac{2m}{3}(12m^2 + \sqrt{36m^4} + 3m^2)$$

$$V_{tronco} = \frac{2m}{3}(12m^2 + 6m^2 + 3m^2) = \frac{2m}{3}36m^2 = 24m^3$$

Quindi il nostro tronco di piramide ha un volume di 24 metri cubi

---

L. *Solidi di rotazione*

Consideriamo ora i solidi di rotazione: possiamo definirli come la parte di spazio occupata da una figura piana quando essa ruota attorno ad un asse; naturalmente ci limiteremo a far ruotare figure che ci permettano di avere dei calcoli umani.

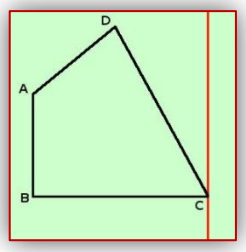
1. Come si disegna un solido di rotazione

Di solito questo argomento nei libri di testo non viene trattato, fidando nell'intuizione dell'alunno per l'esecuzione della rotazione.
Ma io penso sia importante, per la comprensione di un problema, il fare esattamente la figura, quindi, nel mio insegnamento sull'argomento dei solidi dedicavo sempre una lezione per mostrare come si disegna un solido di rotazione.

Distinguiamo fra i due casi .
- Asse di simmetria non passante all'interno del poligono
- Asse di simmetria passante all'interno del poligono

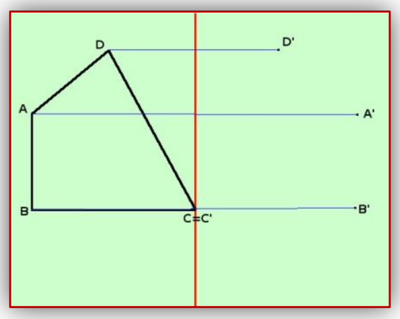
Come si disegna un solido di rotazione - Asse di rotazione non passante per l'interno del poligono
Per disegnare un solido di rotazione, avendo un poligono e un asse di rotazione devi seguire questi punti:
- Prima disegna la figura e l'asse di rotazione.
  Se il problema e' numerico, prima cerca di calcolare tutti i dati della figura che devi far ruotare
- Costruisci i punti simmetrici, rispetto all'asse di rotazione, dei vertici del poligono, cioe' vertice per vertice cosruisci il segmento di perpendicolare sull'asse di rotazione e prolungalo dall'altra parte con la medesima misura.
  Indica i punti corrispondenti con la stessa lettera ma con un apice: ad **A** corrisponde **A'**, a **B** corrisponde **B'** eccetera.
  Naturalmente se un punto si trova sull'asse di rotazione allora coincide col suo corrispondente
- Ora congiungi fra loro i punti con l'apice in modo da cotruire la figura simmetrica di quella di partenza.
  Se nella figura di partenza **A** e' collegato con **B** e con **C** allora devi collegare **A'** con **B'** e con **C'**
- Adesso traccia degli archi di circonferenza (schiacciati) in modo che punti corrispondenti siano agli estremi della circonfernza stessa: cioe' traccia una circonfernza (schiacciata) che passi per **A A'**, una che passi per **B B'** eccetera.
  Naturalmente se un punto si trova sull'asse di rotazione allora coincide col suo corrispondente e la circonferenza si riduce ad un punto
- Adesso la figura e' completa: per renderla piu' comprensibile puoi tracciare con segno piu' marcato le linee che si vedono e con segno piu' tenue le linee che restano all'interno del solido

Ti faccio un esempio: supponiamo di voler ruotare il quadrilatero **ABCD** della figura seguente attorno ad un asse di rotazione verticale passante per il vertice **C:**
- Disegno il quadrilatero e l'asse di rotazione (in rosso).-
  Potresti considerarlo come formato da un trapezio rettangolo sormontato da un triangolo con la base uguale alla base minore del trapezio:

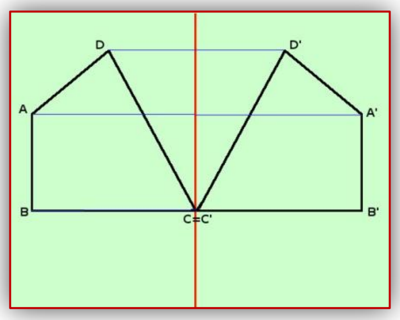


- Ora da ogni vertice mando la perpendicolare sull'asse di rotazione e prolungo tale perpendicolare dall'altra parte in modo da avere segmenti uguali da una parte e dall'altra dell'asse di rotazione.

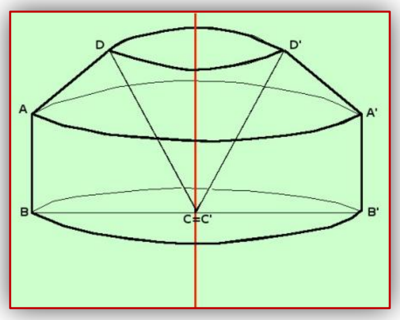
Chiamo il punto alla fine del segmento di perpendicolare con lo stesso nome ma con un apice Il punto **C** essendo sull'asse di rotazione, coincide con il punto corrispondente **C'**



- Congiungo fra loro i punti in modo da costruire la figura simmetrica rispetto all'asse di rotazione. Siccome **A** e' collegato con **B** e con **D** congiungo **A'** con con **B'** e con **D'** eccetera..



- Adesso al posto delle linee orizzontali sostituisco delle circonferenze schiacciate per dare l'idea della visione prospettica. Ho lasciato il diametro **BCB'** per capire meglio



Molto intuitivamente possiamo dire che la figura che ottengo e' data da un cilindro **ABB'A'** sormontato da un tronco di cono **DAA'D'** e con un buco a forma di cono **DCD'** .

Molto intuitivamente perche' per esattezza dovrei dire: un cilindro di altezza **AB** e raggio **BC** eccetera, ma questa pagina deve solo farti capire come costruire la figura; negli esercizi, avendo tutti i dati, potremo usare un linguaggio piu' appropriato .

Come si disegna un solido di rotazione - Asse di rotazione passante per l'interno del poligono

Intanto, se l'asse di rotazione e' interno al poligono, non puoi fare una rotazione completa, ma solamente una rotazione di 180°, quindi, prima di fare la figura rileggi attentamente il testo del problema

Comunque, per disegnare un solido di rotazione, avendo un poligono e un asse di rotazione interno puoi seguire gli stessi punti che ho fissato nella pagina precedente: il procediemnto e' identico, solamente, se vuoi che la figura ti sia facilitata, ti conviene disegnare con un colore diverso la figura simmetrica, cosi' puoi distinguere meglio i lati delle due figure.

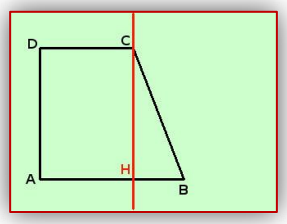
Un'ultima cosa: invece di tracciare una circonferenza fra i punti corrispondenti devi tracciare una semicirconferenza schiacciata con la concavita' messa opportunamente; un esempio ti chiarira' meglio il concetto

---

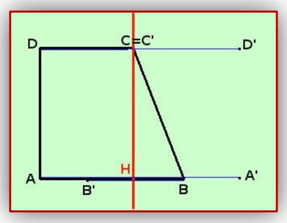
Prendiamo una figura semplice tipo un trapezio rettangolo.

Considero il trapezio rettangolo **ABCD** retto in **A** e **D**. Considerare il solido ottenuto da una rotazione di 180° del trapezio attorno ad un asse coincidente con l'altezza **CH** del trapezio stesso.

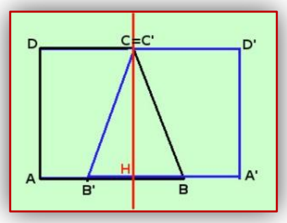
- Disegno il trapezio e l'asse di rotazione (in rosso)



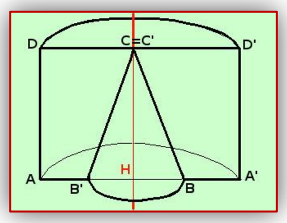
- Ora da ogni vertice mando la perpendicolare sull'asse di rotazione e prolungo tale perpendicolare dall'altra parte in modo da avere segmenti uguali da una parte e dall'altra dell'asse di rotazione.
  Per mostrartelo meglio sposto leggermente i segmenti blu in modo da evidenziarteli Chiamo il punto alla fine del segmento di perpendicolare con lo stesso nome ma con un apice Il punto **C** essendo sull'asse di rotazione, coincide con il punto corrispondente **C'** :



- Congiungo fra loro i punti in modo da costruire la figura simmetrica rispetto all'asse di rotazione utilizzando un colore blu per mostrartelo meglio (e metto i lati **BC** e **B'C'** vicini ma non sovrapposti come dovrebbero essere).
  Siccome **A** e' collegato con **B** e con **D** congiungo **A'** con con **B'** e con **D'** eccetera.



- Adesso metto delle semicirconferenze schiacciate per dare l'idea della visione prospettica Attenzione: le semicirconferenze tipo **AA'**, cioe' da sinistra a destra le faccio concave verso il basso, mente le circonferenze tipo **BB'** cioe' da destra a sinistra le faccio concave verso l'alto siccome non serve piu' evidenziare i due trapezi faccio tutte le linee nere.

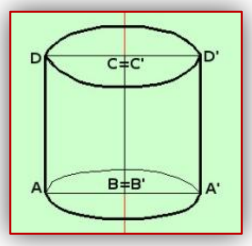


Intuitivamente possiamo dire che la figura che ottengo e' data da un semicilindro **AH'A'D'CD**cui e' appiccicato un semicono **CB'B** .

2. Cilindro

a) Definizione

Definiamo cilindro la parte di spazio percorsa da un rettangolo

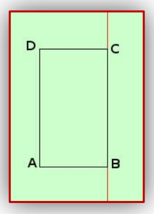


quando compie una rotazione completa attorno ad un suo lato.
In figura abbiamo fatto la rotazione attorno al lato **BC**

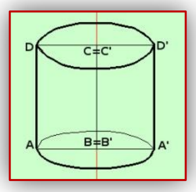
AB = CD e' il **raggio** del cilindro
BC e' l'**altezza** del cilindro

Potevamo anche definire il cilindro come la parte di spazio percorsa da un rettangolo quando ha una rotazione di 180° attorno ad un'altezza che lo tagli a meta', ma ci complichiamo troppo la vita.

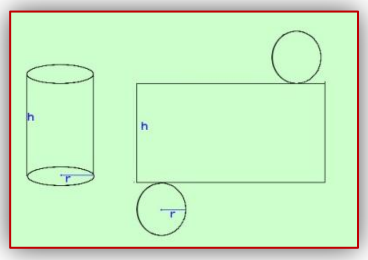
Ecco la costruzione del cilindro.
Considero il rettangolo **ABCD** e considero l'asse passante per **BC** come asse di rotazione



Costruisco la figura simmetrica di **ABCD** rispetto all'asse di rotazione: ottengo **A'B'C'D'** ora al posto delle linee orizzontali sostituisco delle circonferenze schiacciate per dare l'idea della visione prospettica.



b) Area della superficie



Sviluppando la superficie del cilindro su un piano otteniamo 2 cerchi (le basi) ed un rettangolo che e' la superficie laterale.
Essendo la base un cerchio il perimetro di base corrisponde alla lunghezza della circonferenza, quindi supponendo di conoscere il raggio di base **r** avremo che il perimetro di base vale: $2\pi r$
Quindi, se sappiamo che l'altezza vale **h** potremo scrivere

Cilindro

Area della superficie laterale $= Asl = 2\pi r h$

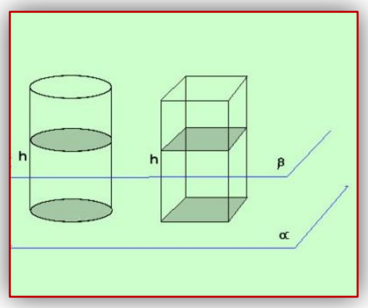
Se poi vogliamo calcolare l'area della superficie totale **Ast** dovremo sommare alla superficie laterale le aree delle due basi che corrispondono al doppio dell'area di un cerchio πr^2

Cilindro

$$A_{reaSuperficie}t_{otale} = Asl + 2Asb = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

Nell'ultimo passaggio ho raccolto $2\pi r$ ed ottenuto una formula piu' compatta

---



c) Volume

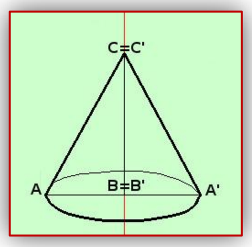
Per calcolare il volume faremo semplicemente riferimento al principio di Cavalieri.
Se considero un parallelepipedo rettangolo con la stessa altezza del cilindro e avente area di base uguale a quella del cilindro e se ogni piano β parallelo al piano di base α taglia le due figure in due sezioni con la stessa area, allora i due solidi hanno lo stesso volume.

Siccome il volume del parallelepipedo si trova moltiplicando l'area di base per l'altezza avremo

Cilindro
Volume = $A_{sb} \cdot h = \pi r^2 h$

3. Cono

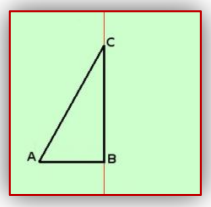
a) Definizione



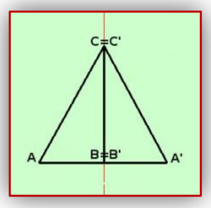
Definiamo cono la parte di spazio percorsa da un triangolo rettangolo quando compie una rotazione completa attorno ad un suo cateto.
In figura abbiamo fatto la rotazione attorno al cateto **BC.**

AB e' il **raggio = r** del cono
BC e' l'**altezza = h** del cono
AC e' l'**apotema = a** del cono

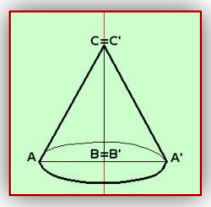
Ecco la costruzione.
Considero il triangolo **ABC** e considero l'asse passante per il cateto **BC** come asse di rotazione



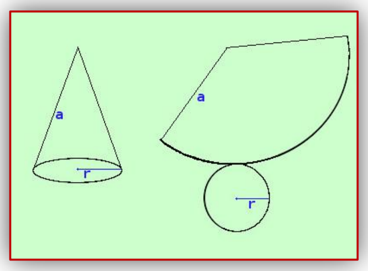
Costruisco la figura simmetrica di **ABC** rispetto all'asse di rotazione: ottengo **A'B'C'** con **B=B'** e **C=C'**



Ora al posto delle linee orizzontali sostituisco delle circonferenze schiacciate per dare l'idea della visione prospettica



b) Area della superficie



Sviluppando la superficie del cono su un piano otteniamo 1 cerchio (la base) ed un settore circolare che e' la superficie laterale.
Essendo la base un cerchio il perimetro di base corrisponde alla lunghezza della circonferenza, quindi supponendo di conoscere il raggio di base **r** avremo che il perimetro di base vale: $2 \pi r$.
Quindi, se sappiamo che l'apotema vale **a** e, anticipando che l'area del settore circolare (fare link) si ottiene moltiplicando l'arco di base per l'apotema e dividendo il risultato per due, potremo scrivere:

Cono

$$\text{Area della superficie laterale} = Asl = 2 \pi r a / 2 = \pi r a$$

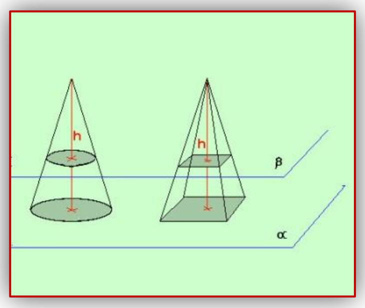
Se poi vogliamo calcolare l'area della superficie totale **Ast** dovremo sommare alla superficie laterale l' area di base che corrisponde all'area del cerchio πr^2:

Cono

$$A_{rea}S_{uperficie}t_{otale} = Asl + Asb = \pi r a + \pi r^2 = \pi r(a + r)$$

Nell'ultimo passaggio ho raccolto πr per ottenere una formula piu' compatta

c) Volume



Anche per calcolare il volume del cono faremo semplicemente riferimento al principio di Cavalieri.
Se considero una piramide con la stessa altezza del cono e avente area di base uguale a quella del cono e se ogni piano **β** parallelo al piano di base **α** taglia le due figure in due sezioni con la stessa area, allora i due solidi hanno lo stesso volume.

Siccome il volume della piramide si trova moltiplicando l'area di base per l'altezza e dividendo il risultato per 3 avremo:

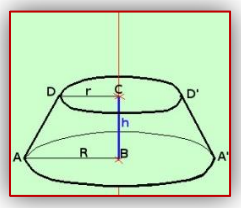
Cono

$$\mathbf{Volume} = \frac{\mathbf{Asb} \cdot \mathbf{h}}{\mathbf{3}} = \frac{\boldsymbol{\pi}\mathbf{r}^{2}\mathbf{h}}{\mathbf{3}}$$

4. Tronco di cono

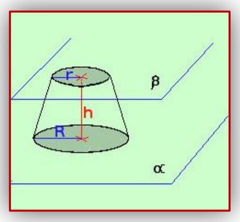
a) Definizione

Possiamo definire il tronco di cono in due modi diversi:
o come solido di rotazione:



Definiamo tronco di cono la parte di spazio percorsa da un trapezio rettangolo quando compie una rotazione completa attorno al lato adiacente agli angoli retti.

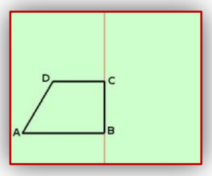
Oppure possiamo dire:



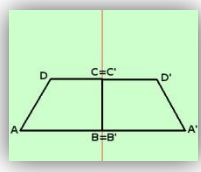
Definiamo tronco di cono la parte di cono compresa fra la base del cono stesso ed un piano parallelo alla base tracciato a distanza inferiore rispetto alla misura dell'altezza del cono.

Comunque, come vuoi definirlo, in ogni caso vale
AB e' il **raggio = R** della base maggiore
CD e' il **raggio = r** della base minore
BC e' l'**altezza = h** del tronco di cono
AD e' l'**apotema = a** del tronco di cono

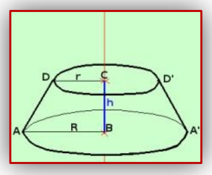
Ecco la costruzione.
Considero il trapezio **ABCD** e considero l'asse passante per l'altezza **BC** come asse di rotazione



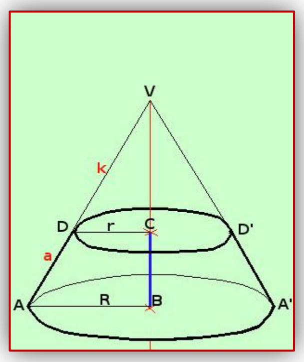
Costruisco la figura simmetrica di **ABCD** rispetto all'asse di rotazione: ottengo **A'B'C'D'** con **B=B'** e **C=C'**



Ora al posto delle linee orizzontali sostituisco delle circonferenze schiacciate per dare l'idea della visione prospettica



b) Area della superficie



Per calcolare la superficie del tronco di cono prolunghiamone la superficie fino a ricostruire il cono **VAA'** e poi calcoliamone la superficie laterale come differenza fra le superfici laterali dei coni **VAA'** e **VDD'**

$$A_{sl}(DAA'D') = A_{sl}(VAA') - A_{sl}(VDD')$$

Essendo dati **a**: apotema del tronco di cono, **R**: raggio della circonferenza di base maggiore ed **r**: raggio della circonferenza di base minore, chiamiamo **k** l'apotema del cono piccolo, quindi **a+k** e' l'apotema del cono **VAA'**:

$$A_{sl}(VAA') = \pi R\,(a+k)$$
$$A_{sl}(VDD') = \pi r\,k$$

Quindi:

$$A_{sl}(DAA'D') = \pi R\,(a+k) - \pi r\,k = \pi Ra + \pi Rk - \pi rk = \pi Ra + \pi k(R - r)$$

Ora, per trovare la formula, dovremo esprimere **k** con i dati che abbiamo, cioe' mediante **R**, **r** ed **a**; per fare questo consideriamo i triangoli simili **VAB** e **VDC** essi hanno $A\hat{V}B = D\hat{V}C$ perche' in comune $A\hat{B}V = D\hat{C}V$ perche' retti.

Quindi, avendo due angoli congruenti, per il primo criterio di similitudine i due triangoli sono simili e posso scrivere:

$$AV : DV = AB : DC$$
$$(a+k) : k = R : r$$

applico la proprieta' dello scomporre per poter avere una sola **k** nell'espressione:

$$(a+k-k) : k = (R-r) : r$$
$$a : k = (R-r) : r$$

ricavo **k**: essendo k un medio devo fare il prodotto degli estremi fratto l'altro medio:

$$k = \frac{a\,r}{(R-r)}$$

Sostituisco questo valore nella formula della superficie laterale ed ottengo:

$$A_{sl}(DAA'D') = \pi\,Ra + \pi(R - r)\cdot\frac{a\,r}{(R-r)} = \pi\,Ra + \pi\,ar = \pi\,a(R + r)$$

Tronco di cono

Area della superficie laterale = $\pi\,a\,(R + r)$

Da notare che, se sostituiamo le circonferenze con i perimetri abbiamo che la formula e' la stessa che valeva per il tronco di piramide: infatti alla stessa formula potevamo arrivare considerando un tronco di piramide regolare ed aumentandone il numero dei lati: man mano che i lati aumentano la misura del perimetro di base si avvicina alla misura della lunghezza della circonferenza

---

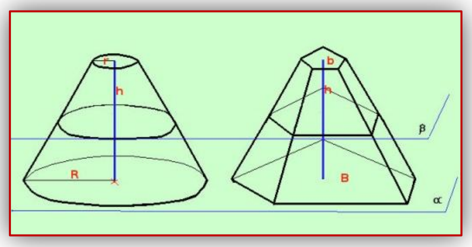
Per avere la superficie totale bastera' aggiungere le due aree di base:

Tronco di cono

Area della superficie totale = $\pi a(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi\,[R^2 + a(R + r) + r^2\,]$

c) Volume

Anche per il tronco di cono possiamo usare il principio di Cavalieri.
Consideriamo un tronco di piramide avente le stesse areee di base e la stessa altezza del tronco di cono: se ogni piano **β** parallelo al piano di base **α** taglia i due solidi in sezioni parallele aventi la stessa area allora i due solidi saranno equivalenti.



Essendo il volume del tronco di piramide:

$$\mathbf{V_{tronco}} = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{3}}(\mathbf{B} + \sqrt{\mathbf{Bb}} + \mathbf{b})$$

questo sara' anche il volume del tronco di cono .
Quindi, per ottenere la formula specifica per il tronco di cono bastera' operare le seguenti sostituzioni:
a **B** area della base maggiore del tronco di piramide sostituiamo l'area della base maggiore del cono $\boldsymbol{\pi}\,\mathbf{R^2}$;
a **b** area della base minore del tronco di piramide sostituiamo l'area della base minore del cono $\boldsymbol{\pi}\,\mathbf{r^2}$.
Quindi abbiamo:

$$\mathbf{V_{tronco}} = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{3}}\left(\pi\mathbf{R^2} + \sqrt{\pi\mathbf{R^2}\cdot\pi\mathbf{r^2}} + \pi\mathbf{r^2}\right)$$

$$\mathbf{V_{tronco}} = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{3}}\left(\pi\mathbf{R^2} + \sqrt{\pi^2\mathbf{R^2 r^2}} + \pi\mathbf{r^2}\right)$$

Posso estrarre di radice ed ottengo:

$$\mathbf{V_{tronco}} = \frac{\mathbf{h}}{\mathbf{3}}(\pi\mathbf{R^2} + \sqrt{\pi\mathbf{Rr}} + \pi\mathbf{r^2})$$

Metto in evidenza anche il **π** ed ottengo la formula finale:

$$\mathbf{V_{tronco}} = \frac{\pi\mathbf{h}}{\mathbf{3}}(\mathbf{R^2} + \mathbf{Rr} + \mathbf{r^2})$$

Tronco di Cono

$$\mathbf{V_{tronco}} = \frac{\pi\mathbf{h}}{\mathbf{3}}(\mathbf{R^2} + \mathbf{Rr} + \mathbf{r^2})$$

Esempio:
Calcolare il volume di un tronco di cono di altezza 3 metri, di raggio di base maggiore 4 metri e raggio di base minore 2 metri
Dati:
h = 3
R = 4 m
r = 2 m
applico la formula
Volume = $\underline{\pi h}$ $(R^2 + Rr + r^2)$ = $\underline{\pi\,3\,m}$ $(4^2m^2 + 2m\cdot 4m + 2^2m^2) = \pi\, m(16 + 8 + 4)m^2 = 28\pi\, m^3$

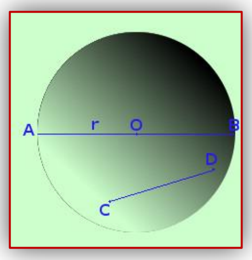
3 3

Il volume del solido e' di $28\pi\ m^3$

---

5. Sfera e superficie sferica

In alcuni testi con **sfera** si intende sia il solido sia la superficie sferica; e' purtroppo un uso piuttosto comune e, dal contesto del libro, dovrai capire di cosa si tratti. Qui invece cerchiamo di distinguere chiamando il solido (volume) **sfera** e la superficie (area) **superficie sferica.**



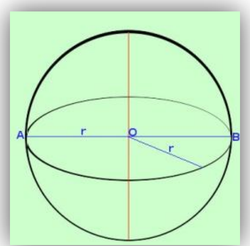
a) Definizioni

Definiamo:

Superficie sferica: zona dei punti dello spazio equidistanti da un punto fisso detto centro .

Quindi possiamo dire:

Si definisce sfera lo spazio limitato da una superficie sferica .



Potremmo anche definire la sfera come solido di rotazione: **Spazio percorso da un semicerchio in una rotazione completa attorno ad un suo diametro.**
Quindi la superficie sferica sarebbe: **area spazzata da una semicirconferenza in una rotazione completa attorno ad un suo diametro.**

O e' il **centro** della sfera
AO e' un **raggio = r** della sfera
AB e' un **diametro = 2r** della sfera
Diametro: congiungente due punti sulla superficie sferica,passante per il centro O della sfera
CD e' una corda della superficie sferica
Corda: congiungente due punti sulla superficie sferica.
Quindi un diametro e' anche una corda mentre una corda e' un diametro solamente se passa per il centro.
Si parla di centro, corde, diametri e raggi come appartenenti indifferentemente alla sfera ed alla superficie sferica.

---

b) Area della superficie sferica

Per trovare la formula per la misura dell'area della superficie sferica occorre sviluppare un ragionamento piuttosto complicato:

- Teorema sulla superficie di rotazione di un segmento
- Teorema sulla rotazione di una poligonale regolare
- Applicazione alla superficie di una sfera

Se ti e' sufficiente la formula, senza tutto il ragionamento, te la scrivo qui sotto

Sfera

Area della superficie sferica = $4 \pi r^2$

L'area della superficie di una sfera equivale a 4 volte l'area del suo cerchio massimo
(cerchio massimo = uno dei cerchi della superficie sferica con centro il centro della sfera)

1) Teorema sulla superficie di rotazione di un segmento

Mostriamo che vale sempre il teorema:

La misura dell'area di una superficie data dalla rotazione completa di un segmento AB attorno ad un asse CD del suo piano che non lo attraversi ne' sia perpendicolare al segmento AB e' uguale alla misura della circonferenza di raggio la parte di asse di AB compreso fra il punto medio del segmento AB e l'asse di rotazione, moltiplicata per la proiezione del segmento AB sull'asse di rotazione.

Per la dimostrazione distinguiamo i tre casi:

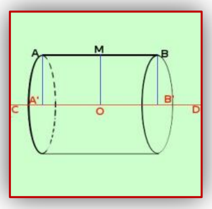
- Segmento **AB** parallelo all'asse di rotazione
- Segmento **AB** con un estremo sull'asse di rotazione
- Segmento **AB** esterno all'asse di rotazione

Quindi, comunque considero il segmento **AB**, purche' sia non attraversante e non perpendicolare all'asse di rotazione otteniamo sempre che, chiamata **OM** la parte dell'asse del segmento **AB** considerata ed **A'B'** la proiezione del segmento **AB** sull'asse di rotazione l'area della superficie del solido di rotazione vale

$$\text{Area} = 2\pi\, OM \cdot A'B'$$

Ecco i tre casi per la dimostrazione:

Superficie di rotazione di un segmento parallelo all'asse

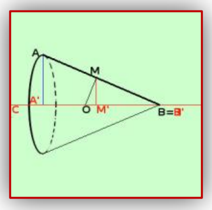


M e' il punto medio di **AB**.
O e' il punto di intersezione dell'asse del segmento **AB** con l'asse di rotazione **CD**
In pratica in questo caso si tratta di un cilindro di altezza **AB=A'B'**, in cui il raggio di rotazione corrisponde ad **OM** parte dell' asse del segmento **AB** compresa fra il segmento stesso e l'asse di rotazione **CD**, quindi abbiamo che vale la formula

$$\text{Area} = 2\pi\, OM \cdot A'B'$$

Superficie di rotazione di un segmento con un estremo sull'asse di rotazione

M e' il punto medio di **AB**
O e' il punto di intersezione dell'asse del segmento **AB** con l'asse di rotazione **CD**
In pratica in questo caso si tratta di un cono di altezza **A'B'**, apotema **AB** e raggio **AA'** quindi abbiamo, per la superficie di rotazione .



$$\text{Area} = \pi\, AA' \cdot AB$$

essendo **MM'** la perpendicolare condotta dal punto medio **M** del segmento **AB** essa vale la meta' di **AA'**, cioe' **AA' = 2MM'** quindi ho:

$$\text{Area} = 2\, \pi\, MM' \cdot AB$$

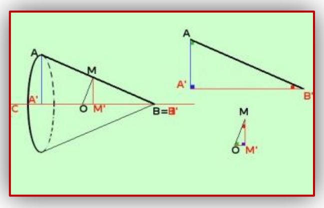
Ora considero i triangoli **AA'B'**, **MM'B'**; essi hanno:
AA'//MM' perche' segmenti di perpendicolare condotti alla stessa retta **CD**
A$\widehat{B}$A'=M$\widehat{B}$'M' perche' in comune.
Siamo nelle condizioni del teorema di Talete, quindi i due triangoli sono simili; potevo anche dire che, essendo retti,hanno i tre angoli uguali e quindi sono simili.
Considero ora i triangoli **MM'B'** e **MOB'**; essi hanno:
M$\widehat{M}$'O = M$\widehat{M}$'B' perche' retti
M$\widehat{O}$M' = M'$\widehat{M}$B' perche' complementari dello stesso angolo **M'$\widehat{M}$O**
Cioe' sommati con lo stesso angolo valgono 90° (stessa dimostrazione fatta nel secondo teorema di Euclide)

quindi i due triangoli hanno congruenti gli angoli e quindi sono simili.

Allora, essendo **AA'B'** simile a **MM'B'** ed essendo **MM'B'** simile a **MOM'** avremo che (proprieta' transitiva) **AA'B'** e' simile a **MOM'**
Posso quindi scrivere la proporzione:

AB:MO= A'B':MM'

Ecco un aiuto per capire la proporzione:



I triangoli considerati sono
AA'B'** e' simile a **MOM'
Li stacco per farteli vedere meglio e metto dentro gli angoli congruenti un quadratino con lo stesso colore
Seguendo il metodo indicato negli esercizi sulla similitudine scriviamo
A A' B'
O M' M
quindi posso scrivere la proporzione completa
AA' : OM' = A'B' : M'M = AB' : OM
e scegliere poi quella che mi interessa
AB:MO= A'B':MM'
*ti ricordo che **B** e **B'** sono lo stesso punto*

Applico la proprieta' fondamentale (prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi):

AB·MM' = MO·A'B'

sostituiamo nell'espressione dell'area trovata prima:

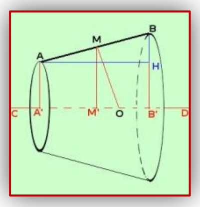
Area = 2 π MM' · AB = 2π OM · A'B'

cioe':

Area = 2π OM · A'B' =

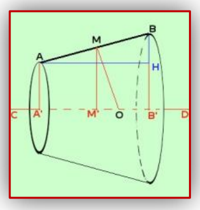
Come volevamo.

Superficie di rotazione di un segmento esterno all'asse di rotazione



M e' il punto medio di **AB**.
O e' il punto di intersezione dell'asse del segmento **AB** con l'asse di rotazione **CD**.
In pratica in questo caso si tratta di un tronco di cono di altezza **A'B'**, apotema **AB** e raggi **AA'** e **BB'** quindi abbiamo, per la superficie di rotazione :
Area laterale = π AB · (AA' + BB')
Considero il trapezio **AA'B'B**, traccio per **M** la parallela a **BB'**, ottengo **MM'**; essendo **M** il punto medio di **AB** ne deriva che **M'** e' il punto medio di **A'B'** e che **MM' = (AA'+BB')/2**
E' una dimostrazione piuttosto semplice che potresti fare come esercizio; se vuoi puoi vedere qui la dimostrazione :

Prima dimostriamo che se **M** e' il punto medio di **AB** ne deriva che **M'** e' il punto medio di **A'B'**:



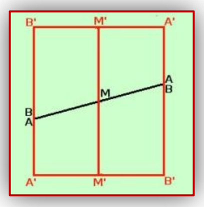
Il fatto deriva dal teorema di Talete; infatti considerato il fascio di rette parallele individuato dalle rette **AA'** e **BB'** abbiamo che **MM'** e' una retta che appartiene al fascio e, facendo la proporzione abbiamo:

AM : MB = A'M' : M'B'

ed essendo **AM = MB** segue che **A'M' = M'B'**

Dimostriamo ora che:

MM' = (AA'+BB')/2



Per fare questo basta prima duplicare la figura **ABA'B'**, eseguire poi un ribaltamento attorno ad **A'B'** della figura duplicata ed infine sovrapporre **AB** su **BA** come vedi qui a fianco.
Ottieni
2MM' = (AA'+BB')
da cui la tesi.

Nella formula di partenza moltiplico e divido per 2 (tanto non cambia niente) per poter operare la sostituzione:

Area laterale = 2 π AB · (AA' + BB')/2 = 2 π AB · MM'

Ora considero i triangoli **MM'O** e **AHB**
Essi hanno:
$\mathbf{M\hat{M}'O = A\hat{H}B}$ perche' retti

$M\hat{M}'O = H\hat{A}B$ perche'angoli con lati fra loro perpendicolari $M'M \perp AH$ e $MO \perp AB$
Allora i tre angoli sono uguali ed essendo **MOM'** simile a **AHB**, per il primo criterio di similitudine, posso scrivere la proporzione:

$$MM' : AH = OM : AB$$

so che $AH = A'B'$

$$MM' : A'B' = OM : AB$$

Applico la proprieta' fondamentale (prodotto dei medi uguale al prodotto degli estremi):

$$AB \cdot MM' = MO \cdot A'B'$$

Sostituiamo nell'espressione dell'area trovata prima:

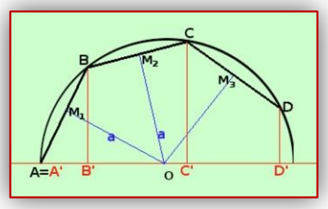
$$\text{Area laterale} = 2\pi\, AB \cdot MM' = 2\pi\, MO \cdot A'B'$$

cioe':

$$\text{Area laterale} = 2\pi\, OM \cdot A'B'$$

Come volevamo.

2) Teorema sulla rotazione di una poligonale regolare



Chiamiamo **poligonale regolare** parte del perimetro di un poligono regolare.
Dimostriamo che vale il teorema:
L'area della superficie generata dalla rotazione completa di una poligonale regolare attorno ad un asse passante per il centro del poligono e non tagliante la poligonale vale il prodotto della circonferenza di raggio l'apotema della poligonale per la proiezione della poligonale sull'asse .
Dimostrazione:
Notiamo che **M** e' il punto medio di ogni segmento ed **MO** e' l'asse del segmento stesso, inoltre le apoteme, essendo la poligonale regolare, sono tutte uguali:

$$OM_1 = OM_2 = OM_3 = a.$$

Per il teorema dimostrato nella pagina precedente abbiamo che:

- la superficie di rotazione generata da **AB** vale:
  $\text{Area} = 2\pi\, OM_1 \cdot A'B' = 2\pi a \cdot A'B'$
- la superficie di rotazione generata da **BC** vale:
  $\text{Area} = 2\pi\, OM_2 \cdot B'C' = 2\pi a \cdot B'C'$
- la superficie di rotazione generata da **AB** vale:
  $\text{Area} = 2\pi\, OM_3 \cdot C'D' = 2\pi a \cdot C'D'$

Quindi la superficie di rotazione della poligonale regolare vale la somma delle varie superfici

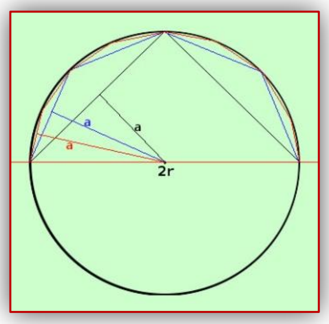
$$\text{Area} = 2\pi a\, A'B' + 2\pi a\, B'C' + 2\pi a \cdot C'D' = 2a\pi\,(A'B'+B'C'+C'D') = 2a\pi\,(A'D')$$

cioe':

$$\text{Area} = 2a\pi\,(A'D')$$

Come volevamo.

3) Applicazione alla superficie di una sfera



Applichiamo ora quanto visto alla superficie di una sfera Consideriamo per semplicita' il quadrato inscritto nella circonferenza (la dimostrazione si potrebbe fare comunque partendo da un qualunque poligono regolare).
Allora nella semicirconferenza superiore posso inscrivere mezzo quadrato con due vertici sul diametro e la sua area di rotazione sara' data da:

$$\text{Area} = 2a\pi\,(2r)$$

Consideriamo ora i punti medi sugli archi che congiungono i

vertici del quadrato e consideriamo quindi il mezzo ottagono regolare inscritto nella semicirconferenza (in blu); anche per la sua superficie di rotazione abbiamo:
Area = 2a π (2r)
Consideriamo ora i punti medi sugli archi che congiungono i vertici dell'ottagono regolare e consideriamo quindi il mezzo poligono regolare a 16 lati (in rosso); anche per esso abbiamo che la la superficie di rotazione vale:
Area = 2a π (2r)
Notiamo che ogni volta che prendiamo i punti medi la poligonale si avvicina alla semicirconferenza e il valore dell'apotema si avvicina al valore del raggio.
Quindi, considerando la semicirconferenza come la poligonale derivante dal mezzo poligono regolare con infiniti lati avremo che, essendo **apotema=r** vale la formula:

$$\text{Area} = 2\, r\, \pi\, (2r) = 4\, \pi\, r^2$$

Quindi:

Sfera
Area della superficie sferica = $4\, \pi\, r^2$

L'area della superficie di una sfera equivale a 4 volte l'area del suo cerchio massimo.
(cerchio massimo = uno dei cerchi della sfera contenenti il centro)

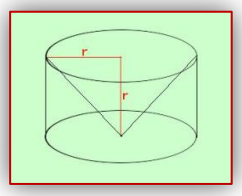
---

c) Volume della sfera

Ora passiamo a dimostrare la formula per trovare il volume di una sfera di raggio **r.**

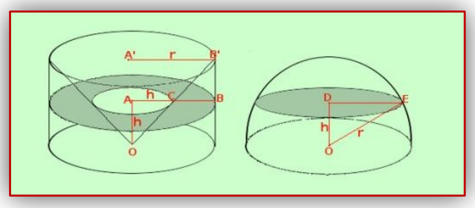
1) Definizione di anticlessidra

Come prima cosa definiamo il solido chiamato **anticlessidra**: e' un cilindro di raggio uguale alla sua altezza con un buco centrale a forma di cono (sempre di raggio uguale all'altezza).
Somiglia a mezza clessidra: la sabbia va dentro il cono.



2) Equiestensione sfera-anticlessidra

Mostriamo ora che vale sempre il teorema:
Se prendo una semisfera ed un' anticlessidra di altezza pari al raggio r della semisfera giacenti sullo stesso piano e le taglio con un piano parallelo alla base hanno sempre la stessa area.



In parole povere se taglio due fette tipo mortadella allora le due fette hanno la stessa area
Per mostrarlo bastera' calcolare le due aree per un generico piano ad altezza **h**

- Area della sezione di anticlessidra; si tratta di una corona circolare di raggio maggiore **r** e raggio minore **h** (uguale all'altezza) quindi bastera' fare la differenza fra il cerchio maggiore ed il cerchio minore:
  Area corona circolare = Area cerchio maggiore - Area cerchio minore =
  $= \pi\, r^2 - \pi\, h^2 = \pi\, (r^2 - h^2)$

- Area della sezione della semisfera; si tratta di un cerchio di raggio il segmento **DE**
  Quindi:

$$\text{Area} = \pi\, \overline{DE}^2$$

Devo trovare il valore di $\overline{\mathbf{DE}}^2$; so che:

$\overline{\mathbf{OD}} = \mathbf{h}$, $\overline{\mathbf{OE}} = \mathbf{r}$. Posso calcolarne il valore applicando il teorema di Pitagora al triangolo **ODE:**

$$\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{OE}^2$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{DO}^2 = r^2 - h^2$$

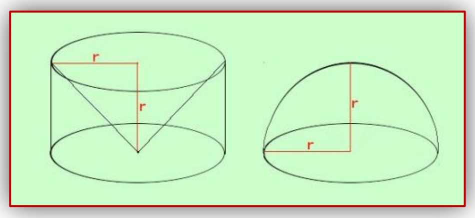
in definitiva ottengo:

$$\text{Area} = \pi\, \overline{DE}^2 = \pi\,(r^2 - h^2)$$

che e' identico al valore trovato per la corona circolare.
Come volevamo.

---

3) Volume della sfera



Quindi, visti i risultati della pagina precedente, per il principio di Cavalieri per calcolare il volume della sfera sara' sufficiente calcolare il volume dell'anticlessidra, cioe':

Volume semisfera = volume anticlessidra = volume cilindro - volume cono

Questi sono tutti volumi che sappiamo calcolare:

$$\text{Volume cilindro} = \pi\, r^2 \cdot r = \pi\, r^3$$

$$\text{Volume cono} = \tfrac{1}{3}\pi\, r^2 \cdot r = \tfrac{1}{3}\pi\, r^3$$

quindi abbiamo:

$$\textbf{Volume semisfera} = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{3\pi r^3 - \pi r^3}{3} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

quindi, per ottenere il volume della sfera dovremo moltiplicare questo risultato per due:

Sfera
$\textbf{Volume sfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

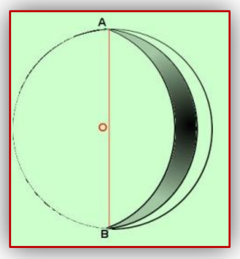
Una volta, piu' di un secolo fa, esisteva un metodo mnemonico per ricordare la formula: bastava ricordare la filastrocca:
Per la patria, l'Italia ed il re
quattro terzi pigreco erre tre
Quando si affermo' il fascismo (dopo il 1923) la filastrocca fu cambiata in
Per la patria, il duce ed il re
quattro terzi pigreco erre tre
Dopo la nascita della repubblica qualcuno provo' a proporre
Per la patria, l'Italia e per me
quattro terzi pigreco erre tre
Ma come filastrocca non ebbe molta fortuna ed oggi e' quasi dimenticata

d) Parti della superficie sferica e della sfera

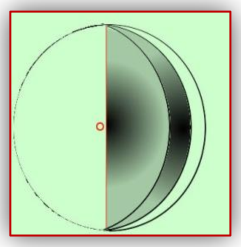
Passiamo a considerare parti della superficie sferica e della sfera: per le varie parti daremo, ove abbastanza semplice, la formula per la superficie e per il volume, ma, se troppo complicata, senza farne la dimostrazione.

1) Fuso sferico e spicchio sferico

(a) Definizioni



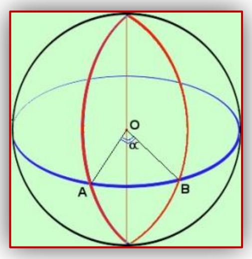
Chiamiamo **fuso sferico** la parte di superficie sferica compresa fra due semicerchi aventi lo stesso diametro **AB**.
Siccome i due semicerchi giacciono su piani concorrenti nel diametro avremo che fra i due semicerchi si puo' considerare un angolo diedro e quindi suddividere la sfera in fusi.
Il fuso piu' famoso e' il fuso orario, ottenuto dividendo la superficie sferica terrestre in 24 fusi.
Importante e' pure il fuso di ampiezza un grado che permette di suddividere la sfera in 360 parti e quindi poter misurare la longitudine prendendo come unita' di misura appunto il fuso di 1 grado.



Invece, per lo spicchio sferico (di cui un buon esempio e' lo spicchio di un'arancia) potremo dire:
Definiamo **spicchio sferico** la parte di sfera compresa fra due semicerchi aventi lo stesso diametro

---

(b) Area del fuso sferico



Per calcolare l'area della superficie del fuso sferico ci riferiamo allo stesso ragionamento fatto in geometria piana per calcolare l'area di un settore circolare.

Prendiamo come unita' di misura un fuso di un grado: sappiamo che la superficie sferica e' composta di 360 fusi di questo genere, quindi, conoscendo l'area della superficie della sfera $\mathbf{A_{sup\ sfera}}$ e l'angolo $\boldsymbol{\alpha}$ che ci da' l'ampiezza in gradi del fuso sferico (angolo diedro formato dai due semicerchi generatori) potremo impostare la proporzione:

$$A_{sup\ sfera} : 360° = A_{sup\ fuso} : \alpha$$

e quindi, risolvendo la proporzione, posso ricavare la formula:

$$A_{sup\ fuso} = \frac{A_{sup\ sfera} \cdot \alpha°}{360°}$$

quindi, ricordando che l'area della superficie di una sfera e' $\mathbf{4\,\pi\,r^2}$, posso scrivere:

$$A_{sup\ fuso} = \frac{4\,\pi\,r^2 \cdot \alpha°}{360°}$$

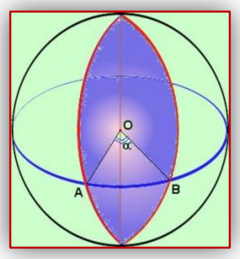
e, semplificando numeratore e denominatore, ottengo:

Area della superficie del fuso sferico
$\dfrac{\pi\, r^2 \cdot \alpha°}{90°}$

Come esercizio calcoliamo la superficie di un fuso orario terrestre (supponendo la terra sferica) sapendo che il raggio medio della terra **vale 6371 Km** e che un fuso orario ha ampiezza di **15°**
Calcolo prima la superficie della terra
$A_{sup\ terra} = 4\pi r^2 = 4\pi (6371\ Km)^2 = 162.358.564\ \pi\ Km^2 \cong 509.805.891\ Km^2$
imposto la proporzione
$A_{sup\ terra} : 360° = A_{sup\ fuso} : \alpha$
$509.805.891\ Km^2 : 360° = A_{sup\ fuso} : 15°$

$$A_{sup\ fuso} = \frac{509.805.891\ Km^2 \cdot 15°}{360°} \cong 21.241.912\ Km^2$$

(c) *Volume dello spicchio sferico*



Anche per calcolare il volume dello spicchio sferico ci riferiamo al ragionamento fatto in geometria piana per calcolare l'area di un settore circolare
Prendiamo come unita' di misura il volume di uno spicchio di un grado: sappiamo che la sfera e' composta di 360 spicchii di questo genere, quindi, conoscendo il volume della sfera V_{sfera} e l'angolo α che ci da' l'ampiezza in gradi dello spicchio (angolo diedro formato dai due semicerchi generatori) potremo impostare la proporzione:

$$V_{sfera} : 360° = V_{spicchio} : \alpha$$

e quindi, risolvendo la proporzione, posso ricavare la formula:

$$V_{spicchio} = \frac{V_{sfera} \cdot \alpha°}{360°}$$

quindi ricordando che il volume della sfera vale:

$$V_{sfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ottengo:

$$V_{spicchio} = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{\alpha°}{360°}$$

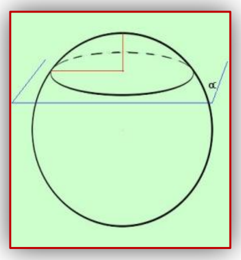
e, semplificando numeratore e denominatore, posso scrivere

Volume dello spicchio sferico
$\frac{\pi r^3 \alpha°}{270°}$

---

2) Calotta sferica e segmento sferico ad una base

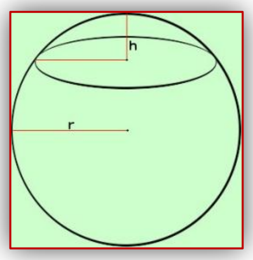
a) *Definizioni*



Chiamiamo **calotta sferica** ognuna delle due parti in cui una superficie sferica viene divisa da un piano secante **α**.
La circonferenza, sezione del piano con la superficie sferica si chiama **base della calotta .**
Similmente possiamo dire dire.
Definiamo **segmento sferico ad una base** ognuna delle due parti in cui

una sfera viene divisa da un piano secante **α** .
Il cerchio sezione della sfera con il piano sara' chiamato **cerchio di base** o **base** della calotta.

b) *Area della calotta sferica*



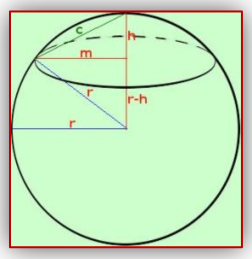
La formula e' molto semplice.
Invece per la dimostrazione bisogna scomodare il calcolo integrale e qui non la facciamo:

$$A_{\text{calotta sferica}} = 2 \pi r h$$

Area della calotta sferica
$2 \pi r h$

Da notare che nella formula compare solamente il raggio **r** della sfera e non il raggio della circonferenza di base della calotta.

Da notare anche che, utilizzando il teorema di Pitagora, e' possibile scrivere una relazione fra:
h altezza della calotta, o meglio, del segmento sferico ad una base
r raggio della sfera
m raggio della circonferenza di base della calotta:



$$r^2 = m^2 + (r-h)^2$$

Sviluppando ottengo:

$$r^2 = m^2 + r^2 - 2rh + h^2$$

Porto **2rh** prima dell'uguale e tutti gli altri termini dopo l'uguale:

$$2rh = -r^2 + m^2 + r^2 + h^2$$
$$2rh = m^2 + h^2$$

e quindi, sostituendo nella formula dell'area ho la formula equivalente:

$$A_{\text{calotta sferica}} = \pi (m^2 + h^2)$$

Inoltre in qualche testo ho visto, introducendo il valore **c** corda dell'arco generatore la formula:

$$A_{\text{calotta sferica}} = \pi c^2$$

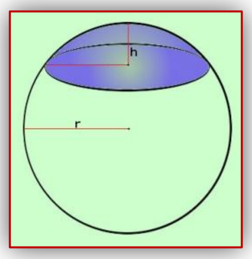
Infatti per il teorema di Pitagora:

$$c^2 = m^2 + h^2$$

L'arco con corda **c** e' l'arco generatore perche' facendogli fare un giro completo attorno ad **h** ottengo la calotta sferica.

---

c) *Volume del segmento sferico ad una base*



Volume segmento sferico ad una base
$\pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right)$

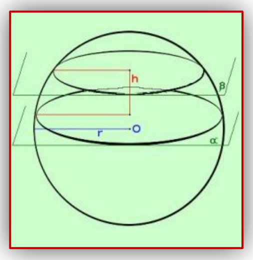
Da notare che nella formula compare solamente il raggio **r** della sfera e l'altezza **h** della calotta ma non il raggio della circonferenza di base della calotta.

La dimostrazione e' piuttosto complicata e la saltiamo.

3) Zona sferica e segmento sferico a due basi

a) *Definizioni*

Chiamiamo **zona sferica** la parte di superficie sferica compresa fra due piani paralleli **α** e **β** che taglino la sfera .
La circonferenze, sezioni dei piani con la superficie sferica si chiamano **basi della zona.**
L'**altezza h** sara' il segmento congiungente i centri delle due basi della zona sferica (si puo' anche definire come la distanza fra i piani: **α** e **β**)



Similmente possiamo dire dire:

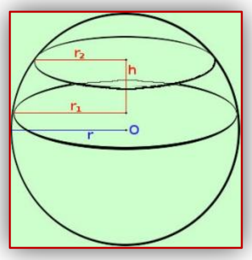
Definiamo **segmento sferico a due basi** la parte di sfera compresa fra due piani paralleli **α** e **β** secanti la sfera stessa .
I cerchi sezione della sfera con i piani saranno chiamati **cerchi di base** o **basi** del segmento sferico.
L'**altezza** del segmento sferico a due basi e' il segmento **h** congiungente i centri dei due cerchi di base (o anche distanza fra i piani **α** e **β**).

b) *Area della zona sferica*

Anche qui la formula e' molto semplice: e' la stessa che vale per la calotta sferica:

$$A_{\text{zona sferica}} = 2\,\pi\,r\,h$$

Area della zona sferica
$2\,\pi\,r\,h$



Da notare anche qua che nella formula compare solamente il raggio **r** della sfera e non intervengono i raggi $\mathbf{r_1}$ ed $\mathbf{r_2}$ delle circonferenze di base della zona

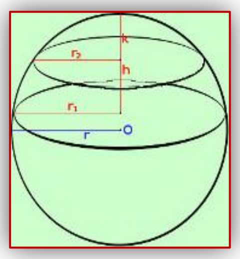
Questa formula e' facile da dimostrare se consideriamo valida la formula della calotta: pensa alla zona sferica come differenza fra due calotte sferiche; allora basta fare la differenza fra le superfici delle calotte di base $\mathbf{r_1}$ ed $\mathbf{r_2}$.
Chiamato **k** il segmento prolungamento da **h** fino alla superficie sferica avremo

$$\text{Area calotta con base raggio } r_1 = 2\,\pi\,r\,(h+k)$$
$$\text{Area calotta con base raggio } r_2 = 2\,\pi\,r\,k$$

Faccio la differenza:

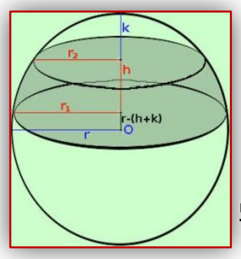
$$\text{Area zona sferica} = 2\,\pi\,r(h+k) - 2\,\pi\,rk = 2\,\pi\,rh + 2\pi\,rk - 2\,\pi\,rk = 2\,\pi\,rh$$

Come volevamo.



c) *Volume del segmento sferico a due basi*

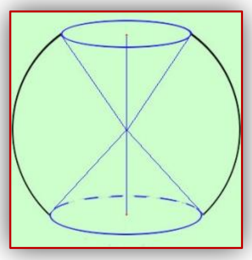
Volume segmento sferico a due basi
$V = \dfrac{1}{2}\pi h\left(r_1^2 + r_2^2\right) + \dfrac{1}{6}\pi h^3$



Anche qui la dimostrazione e' piuttosto complicata come calcoli e quindi la saltiamo.
Concettualmente potresti fare la differenza fra i volumi dei segmenti sferici ad una base di cui il segmento sferico a due basi e' il risultato.
Notare le possibilita' di applicare il teorema di Pitagora fra il raggio **r** della sfera, i raggi di base r_1 ed r_2 e i segmenti e **h** ed **r-(h+k).**

4) Settore sferico

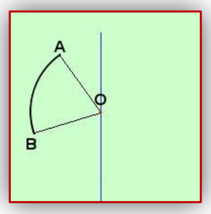
a) Definizione



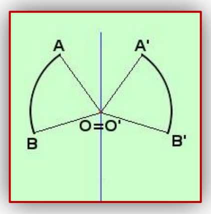
Definiamo il settore sferico come solido di rotazione.

Definiamo settore sferico la parte di spazio percorsa da un settore circolare quando compie una rotazione completa attorno ad un asse passante per il vertice e non avente altri punti comuni con il settore.

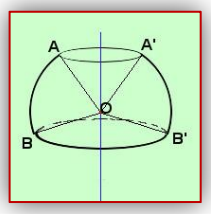
Ecco la costruzione.
Considero il settore circolare **ABO** e considero l'asse passante per il centro **O** della circonferenza come asse di rotazione



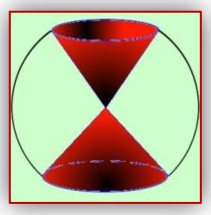
Costruisco la figura simmetrica di **ABO** rispetto all'asse di rotazione: ottengo **A'B'O'** con **O=O'**



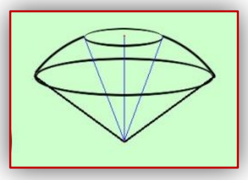
Ora al posto delle linee orizzontali sostituisco delle circonferenze schiacciate per dare l'idea della visione prospettica



Ottengo un segmento sferico a due basi **ABB'A'** con due buchi a forma di cono **AOA'** e **BOB'**
nella figura seguente evidenzio i due coni in colore considerando un altro settore sferico dove i coni siano piu' visibili



In pratica otteniamo una segmento sferico a due basi e due coni che possono essere entrambe vuoti oppure uno solamente vuoto.

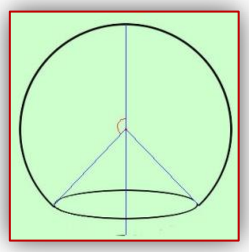


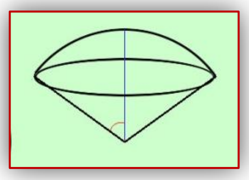
Nella prima figura vedi la zona sferica con 2 buchi evidenziati in blu a forma di cono.

Nella seconda vedi invece la zona sferica con un buco a forma di cono piu' un altro cono.

Questo dipende sia dalla misura dell'angolo al centro del settore che dalla posizione dell'asse di rotazione.

Evidenziamo ancora che, se l'asse di rotazione coincide con un lato del settore circolare otteniamo un segmento sferico ad una base con un buco a forma di cono oppure, se tale settore ha angolo al centro superiore a 90°, con aggiunto un cono:





Sulla sinistra un esempio con angolo al centro superiore ad un angolo retto, sulla destra, invece, con angolo inferiore.

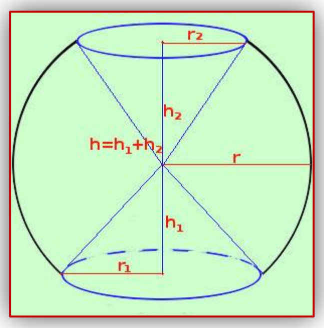
b) *Area della superficie del settore sferico*

Premesso che come settore sferico intendiamo sempre un solido possiamo comunque parlare della sua superficie.
Intanto osserviamo che, per la superficie, dobbiamo distinguere i due casi:

1) Asse di rotazione non passante per un lato del settore circolare
2) Asse di rotazione passante per un lato del settore circolare

Ecco i due casi:

Asse di rotazione non passante per un lato del settore circolare



Occorre per prima cosa, per i solidi, aver sempre bene chiara la rappresentazione spaziale della figura.
Consideriamo il caso a fianco
In questo caso l'area e' data dalla superficie della zona sferica piu' le aree delle superfici dei due coni, quindi:

$$A_s \text{ settore sferico} = A_s \text{ fascia} + A_s \text{ cono 1} + A_s \text{ cono 2}$$

$$A_s \text{ settore sferico} = \pi\, r\, (h_1+h_2) + \pi\, r_1 \text{ apotema}_1 + + \pi\, r_2 \text{ apotema}_2$$

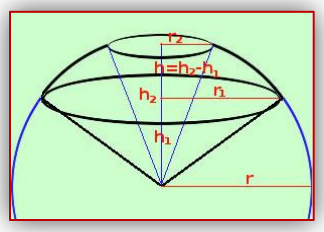
e siccome l'apotema dei coni vale **r** avremo:

$$A_s \text{ settore sferico} = \pi\, r\, (h_1+h_2) + \pi\, r_1\, r + + \pi\, r_2\, r = \pi\, r\, (h_1+h_2 + r_1 + r_2)$$

e poiche' vale $\mathbf{h = h_1 + h_2}$:

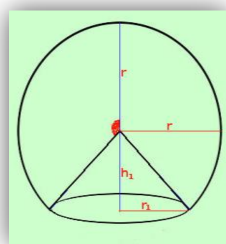
$$A_s \text{ settore sferico} = \pi\, r\, (h + r_1 + r_2)$$

Tale formula vale in generale, ricordando pero' che, nei casi come quello qui a fianco raffigurato, si tratta sempre della somma delle aree di una zona e di due coni, ma devi fare $\mathbf{h = h_2 - h_1}$ poiche' **h** e' l'altezza del



segmento sferico a due basi cioe' della zona sferica (in figura **h** e' il segmento compreso fra $\mathbf{r_1}$ ed $\mathbf{r_2}$)

Come vedi e' essenziale avere ben chiara la figura per poter decidere se fare la somma o la differenza

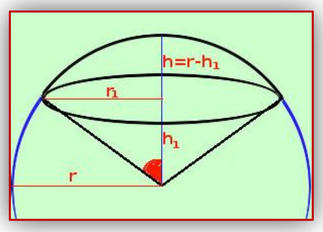


<u>Asse di rotazione passante per un lato del settore circolare</u>
Anche qui occorre avere ben chiara la rappresentazione spaziale della figura.
Consideriamo il caso a fianco.
In questo caso l'area e' data dalla superficie della calotta sferica piu' l'area della superficie del buco a forma di cono, quindi:

$$A_s \text{ settore sferico} = A_s \text{ calotta} + A_s \text{ cono}$$
$$A_s \text{ settore sferico} = \pi\, r\, h + \pi\, r_1 \text{ apotema}$$

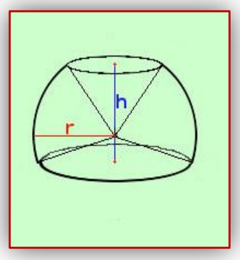
essendo **h** dato dalla somma di **r** e $\mathbf{h_1}$
e siccome l'apotema del cono vale **r**

$$A_s \text{ settore sferico} = \pi\, r\, h + \pi\, r_1\, r = \pi\, r\, (h + r_1)$$



Tale formula vale in generale, ricordando pero' che, nei casi come quello qui a fianco raffigurato, si tratta sempre della somma delle aree di una zona e di due coni, ma devi fare $\mathbf{h = r - h_1}$ poiche' **h** e' l'altezza della calotta sferica e stavolta il cono non e' un buco

Come vedi anche qui e' essenziale avere ben chiara la figura per poter decidere se fare la somma o la differenza



c) <u>Volume del settore sferico</u>

Volume settore sferico

$$V = \frac{2}{3}\pi\ \ r\, h$$

con **h** altezza della zona sferica oppure oppure della calotta sferica