X.

Teoria generale delle coazioni.

Noi abbiam detto a suo tempo (cfr. Capitolo IV, pag. 99) che le travature reticolari iperstatiche possono, anche in assenza di ogni qualsiasi forza esterna, pel solo fatto delle mutue connessioni delle loro aste e dei vincoli che queste reciprocamente si impongono, trovarsi in uno stato di coazione che non può in alcun modo venire eliminato se non si distruggono, in tutto o in parte, quei vincoli, intaccando la compagine stessa del sistema.

Ed abbiamo giustificata l'esistenza di questi stati di coazione indipendenti da ogni qualsiasi azione esterna, ammettendo che le lunghezze iniziali delle singole aste non siano fra loro compatibili, sicchè all'atto del montaggio le aste sovrabbondanti, presentando lunghezze sia pur di pochissimo differenti dalle distanze (già perfettamente determinate) dei nodi che esse son destinate a collegare, debbano venir costrette a deformarsi alquanto mediante il momentaneo intervento di forze opportune.

Soppresse le quali forze, a montaggio ultimato, la travatura dovrà assumere una configurazione di equilibrio nella quale le singole aste non potranno certamente più riprendere tutte la loro lunghezza iniziale: donde l'esistenza di un sistema di variazioni di lunghezza s_0, certamente non congruente, corrispondente ad un sistema di sforzi S_0 equilibrato per forze esterne tutte nulle.

Questa configurazione di equilibrio è quella che noi abbiamo designata col nome di “ stato naturale „ e che abbiamo assunta come stato di riferimento per tutte le altre configurazioni possibili della travatura, fra le quali essa risulta completamente ed univocamente individuata dal fatto che la sua energia potenziale elastica (energia vincolata) Φ_0 soddisfa alla equazione caratteristica (26)

$$\Phi = \text{minimum}.$$

Qui noi ci proponiamo di ritornar brevemente sull'argomento, nell'intento di risolvere nei confronti di questo stato naturale quel problema stesso che il teorema di Menabrea ci ha permesso di risolvere nei confronti di tutti gli altri stati di equilibrio della travatura.

Vogliamo cioè individuare direttamente il sistema degli sforzi S_0 fra tutti i sistemi di sforzi equilibrati per forze esterne tutte nulle.

A tal fine conviene che noi premettiamo alcune considerazioni di ordine generale, che ci faciliteranno d'altronde la comprensione di questi stati di coazione e più che tutto dei diversi modi con cui essi possono venir generati.

***

L'incompatibilità iniziale delle lunghezze delle varie aste di una travatura reticolare iperstatica può essere naturalmente l'effetto di difettosa costruzione.

Ma può anche derivare da altre cause.

Immaginiamo infatti che la travatura che noi vogliamo considerare sia stata costruita con aste le quali tutte possiedano l'esatta lunghezza ad esse spettante in progetto, sicchè il montaggio abbia potuto effettuarsi senza che ne nascano sforzi di sorta.

Non è detto per questo che uno stato di coazione non possa in quella travatura sorgere in seguito per le più diverse ragioni.

Basta pensare alla possibilità che, sotto l'azione di qualche particolare sistema di forze esterne, gli sforzi in certe aste abbiano momentaneamente potuto assumere valori superiori ai limiti di elasticità dei materiali, sicchè si sian prodotte in quelle aste delle deformazioni permanenti.

Più semplicemente, si può immaginare che la temperatura delle varie aste sia mutata, determinando variazioni unitarie di lunghezza differenti da asta ad asta.

Più semplicemente ancora, si può supporre che qualche asta sia munita di un apparecchio tenditore — sia per esempio formata di due parti collegate fra loro da un manicotto a vite — manovrando il quale la lunghezza dell'asta può venire alterata a piacere.

In tutti questi casi è ben evidente che un ritorno puro e semplice della travatura alla configurazione esente da sforzi non è più, generalmente, possibile.

La nuova configurazione che la travatura spontaneamente verrà ad assumere in assenza di forze esterne sarà caratterizzata in generale da uno stato di coazione che si potrà sempre considerare come generato mediante due operazioni successive e ben distinte.

Nella prima delle quali — partendo da una configurazione della travatura esente da sforzi che, tanto per intenderci, chiameremo " primitiva " — si possono immaginare impresse alle varie aste (momentaneamente considerate come rese isolate ed indipendenti le une dalle altre) certe variazioni di lunghezza $\boldsymbol{s}$ affatto arbitrarie, e quindi, in generale, non congruenti.

Nella seconda operazione — nella quale si ricostituisce la compagine della travatura — le lunghezze delle aste ridiventano fra loro compatibili grazie al fatto che alle variazioni di lunghezza impresse vengono a sovrapporsi altre variazioni di lunghezza dipendenti dagli sforzi interni che si sviluppano nelle singole aste.

Ad equilibrio stabilito, in assenza di forze esterne, questi sforzi sono precisamente quelli che abbiamo imparato a designare con S_0; le variazioni di lunghezza corrispondenti sono le s_0.

Le quali s_0 pur costituendo, come ben sappiamo, un sistema di variazioni di lunghezza non congruente, ci si vengono qui molto opportunamente a presentare come parte di un nuovo sistema di variazioni di lunghezza che è sicuramente congruente: è il sistema delle variazioni di lunghezza totali $\boldsymbol{s} + s_0$ che corrispondono al passaggio della travatura dalla configurazione che abbiamo chiamata primitiva allo stato naturale, e che possono quindi venire utilizzate per definire questo stato naturale per rapporto alla configurazione primitiva assunta come configurazione di riferimento, dato che l'altra parte del sistema, quella costituita dalle variazioni impresse $\boldsymbol{s}$, è da considerarsi, in ciascun caso particolare, come un dato del problema.

***

Tutto ciò premesso, noi ricorreremo al solito artificio che consiste nell'immaginar conosciuta la distribuzione di sforzi interni S_0 che caratterizza lo stato naturale della travatura, e nel metterla a raffronto colle altre distribuzioni equilibrate che differiscon di pochissimo da essa.

Queste si potranno sempre immaginar generate attribuendo al sistema degli sforzi S_0 un sistema di incrementi (infinitesimi) dS_0 equilibrato come il sistema degli S_0 per forze esterne tutte nulle; perchè così facendo non v'è dubbio che anche il nuovo sistema di sforzi $S_0 + dS_0$ riuscirà equilibrato per forze esterne tutte nulle.

S'intende che, corrispondentemente agli incrementi degli sforzi, anche le variazioni di lunghezza s_0 delle singole aste subiranno certi incrementi (pure infinitesimi) che indicheremo con ds_0.

Consideriamo ora l'energia potenziale elastica propria della travatura nel nuovo stato di equilibrio che siam venuti definendo. In dipendenza degli incrementi attribuiti agli sforzi S_0 quest'energia passerà dal valore

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \sum S_0 \, . \, s_0$$

proprio dello stato naturale, al valore

$$\Phi_0 + d\Phi_0 = \frac{1}{2} \sum (S_0 + dS_0)(s_0 + ds_0)$$

subirà cioè un incremento

$$d\Phi_0 = \frac{1}{2} \sum S_0 \, . \, ds_0 + \frac{1}{2} \sum s_0 \, . \, dS_0 + \frac{1}{2} \sum dS_0 \, . \, ds_0$$

Se si tien conto che

$$s_0 = \frac{S_0 \, . \, l}{E \, . \, A}$$

e che

$$ds_0 = \frac{dS_0 \, . \, l}{E \, . \, A}$$

e che quindi

$$S_0 \,.\, ds_0 = s_0 \,.\, dS_0$$

si ha, in definitiva,

$$d\Phi_0 = \sum s_0 \,.\, dS_0 + \frac{1}{2}\sum dS_0 \,.\, ds_0$$

Ora è assai facile trasformare la prima sommatoria facendovi comparire, in luogo delle variazioni di lunghezza incognite s_0, le variazioni di lunghezza impresse $\boldsymbol{s}$. Basta incominciar collo scrivere

$$\Sigma s_0 \,.\, dS_0 = \Sigma(\boldsymbol{s} + s_0)\, dS_0 - \Sigma \boldsymbol{s} \,.\, dS_0$$

poi osservare che

$$\Sigma(\boldsymbol{s} + s_0)\, dS_0 = 0$$

Il sistema degli sforzi dS_0 è infatti per ipotesi un sistema equilibrato per forze esterne tutte nulle; quanto alle variazioni di lunghezza $\boldsymbol{s} + s_0$ che fanno passare la travatura dalla configurazione primitiva allo stato naturale, abbiamo già detto che costituiscono un sistema sicuramente congruente. Basta dunque applicare al caso attuale la solita relazione (23) ponendo nel suo secondo membro $F = 0$ ed il nostro asserto risulta senz'altro dimostrato.

Ne segue che

$$\Sigma s_0 \,.\, dS_0 = -\,\Sigma \boldsymbol{s} \,.\, dS_0$$

con che l'incremento della funzione Φ_0 viene a potersi esprimere anche sotto la forma

$$d\Phi_0 = -\sum \boldsymbol{s} \,.\, dS_0 + \frac{1}{2}\sum dS_0 \,.\, ds_0$$

Se si ha cura di raccogliere nel primo membro tutti i termini del primo ordine, si ha

$$d\Phi_0 + \sum \boldsymbol{s} \,.\, dS_0 = \frac{1}{2}\sum dS_0 \,.\, ds_0$$

od anche, tenuto conto che le $\boldsymbol{s}$ sono delle costanti date in ciascun caso particolare,

$$d\left(\Phi_0 + \sum \boldsymbol{s} \,.\, S_0\right) = \frac{1}{2}\sum dS_0 \,.\, ds_0$$

Ma il secondo membro è un infinitesimo del secondo ordine, essenzialmente positivo.

La distribuzione di sforzi interni S_0 che caratterizza lo stato naturale riesce pertanto individuata, tra tutte le altre possibili distribuzioni equilibrate per forze esterne tutte nulle, dalla duplice condizione dell'annullarsi della variazione prima della funzione

$$\Phi_0 + \Sigma \boldsymbol{s} \,.\, S_0$$

e della positività della sua variazione seconda; duplice condizione che al solito definisce un " minimo „ di quella funzione.

Siamo così condotti ad esprimere sinteticamente le condizioni che caratterizzano la distribuzione degli sforzi interni nello stato naturale della travatura, dicendo che per essa deve sempre aversi

$$\Phi_0 + \Sigma \boldsymbol{s} \,.\, S_0 = \text{minimum} \tag{37}$$

***

Naturalmente bisogna bene intendersi sulla significazione di questo minimo, e guardarsi bene dal confondere o, peggio ancora, dal vedere una contraddizione tra questo risultato e quello espresso dalla (26) che identifica in Φ_0 il minimo della funzione Φ.

Però, dopo tutto quel che si è già detto a suo tempo a proposito del teorema di Menabrea, poche parole dovrebbero bastare qui ad eliminare ogni possibilità di equivoco.

La (26) stabilisce infatti che l'energia potenziale elastica presenta, in corrispondenza dello stato naturale della travatura, un minimo per rapporto ai valori che essa assume in tutti gli altri stati possibili, e quindi non equilibrati per forze esterne nulle.

La (37) ci dice invece che lo stesso stato naturale si può ritenere caratterizzato dal fatto che si rende minima la funzione $\Phi_0 + \Sigma \boldsymbol{s} \cdot S_0$ per rapporto a tutti i valori che questa funzione può assumere quando si considerino tutte le altre distribuzioni di sforzi che sono in equilibrio per forze esterne nulle, ma che non corrispondono a configurazioni geometricamente possibili della travatura.

Nell'un caso si tratta veramente di un minimo di una grandezza fisica: l'energia potenziale elastica; il cui valore particolare relativo allo stato naturale (energia vincolata) viene paragonato a tutti gli altri valori che essa può effettivamente assumere in corrispondenza di tutte le altre possibili configurazioni della travatura.

Nell'altro caso invece i diversi stati di tensione che nel ragionamento vengono presi in considerazione, sono delle soluzioni puramente ipotetiche del problema dell'equilibrio, ma non sono nella loro generalità fisicamente realizzabili, sicchè per essi la funzione di cui si studiano le variazioni non ha, fisicamente parlando, alcun senso.

Questa funzione non è che una pura e semplice espressione analitica la quale acquista un significato fisico solo per quel valore minimo che essa assume in corrispondenza dello stato di tensione reale, e che ci serve ad individuare tale stato in mezzo a tutti gli altri.

Con queste intese il nuovo teorema si potrà enunciare dicendo che: *le tensioni interne che caratterizzano lo stato naturale sono quelle che rendono minima la funzione*

$$\Phi_0 + \Sigma \boldsymbol{s} \, . \, S_0$$

per rapporto a tutti i valori che la funzione stessa può assumere compatibilmente colle deformazioni impresse e colle leggi dell'equilibrio per forze esterne tutte nulle (1).

***

Per mettere in evidenza l'utilità pratica del teorema dimostrato, in ordine alla determinazione degli sforzi S_0 che caratterizzano lo stato naturale della travatura, basta introdurre, come del resto abbiamo sempre fatto nei casi consimili, la considerazione delle k incognite iperstatiche

$$X_1 \, , \, X_2 \, , \, \ldots \, X_k$$

in funzione delle quali si possono sempre esprimere linearmente i singoli sforzi S_0 in modo che costituiscano un sistema equilibrato per forze esterne tutte nulle.

---

(1) Questo teorema è stato da me per la prima volta enunciato (in una forma un po' particolare, e con un procedimento non esente da mende) nel 1918. L'enunciato e la dimostrazione generale sono posteriori di circa tre anni [Cfr.: Rend. della R. Accad. dei Lincei, serie 5ª, vol. XXVI ed Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. 56, 1921].

Il ricercare allora, tra le infinite configurazioni equilibrate che così si vengono a definire, quella che soddisfa al nostro teorema, equivale ad imporre che siano separatamente soddisfatte le k equazioni

$$\frac{\partial}{\partial X_1}(\Phi_0 + \Sigma \boldsymbol{s} \,.\, S_0) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial X_2}(\Phi_0 + \Sigma \boldsymbol{s} \,.\, S_0) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial X_k}(\Phi_0 + \Sigma \boldsymbol{s} \,.\, S_0) = 0$$

Tenuto conto che Φ_0 è una funzione quadratica degli sforzi S_0 e quindi anche delle incognite X, e che $\Sigma \boldsymbol{s} \cdot S_0$ è lineare negli sforzi S_0 e quindi anche nelle X, si può senz'altro concludere che quelle k equazioni sono lineari, e non omogenee, nelle k incognite, epperò sono perfettamente atte a definirne i valori in modo, generalmente, unico e ben determinato.

***

Se poi si tiene presente l'espressione generale dell'energia vincolata

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \sum \frac{S_0^2 \,.\, l}{E \,.\, A}$$

e quindi quella delle sue singole derivate prime

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial X_1} = \sum \frac{S_0 \,.\, l}{E \,.\, A} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial X_1} = \sum s_0 \cdot \frac{\partial S_0}{\partial X_1}$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial X_2} = \sum \frac{S_0 \,.\, l}{E \,.\, A} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial X_2} = \sum s_0 \cdot \frac{\partial S_0}{\partial X_2}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial X_k} = \sum \frac{S_0 \,.\, l}{E \,.\, A} \cdot \frac{\partial S_0}{\partial X_k} = \sum s_0 \cdot \frac{\partial S_0}{\partial X_k}$$

le stesse $\boldsymbol{k}$ equazioni vengono a potersi mettere sotto la forma

$$\sum (\boldsymbol{s} + s_0) \cdot \frac{\partial S_0}{\partial X_1} = 0$$

$$\sum (\boldsymbol{s} + s_0) \cdot \frac{\partial S_0}{\partial X_2} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum (\boldsymbol{s} + s_0) \cdot \frac{\partial S_0}{\partial X_k} = 0$$

In queste $\boldsymbol{k}$ equazioni — evidentemente lineari ed omogenee nelle variazioni di lunghezza delle singole aste — il lettore non tarderà a riconoscere le k equazioni normali (6) che fin dalle prime pagine di questa trattazione noi abbiamo riconosciute idonee ad esprimere le condizioni generiche di compatibilità tra le variazioni di lunghezza delle aste (cfr. pag. 23).

Così, anche sotto questo punto di vista, il problema dello stato naturale viene ad essere ricondotto a quegli stessi precisi termini nei quali noi abbiamo a suo tempo (cfr. pag. 137) trovata la soluzione del problema generale dell'equilibrio per forze esterne date.