Capitolo V

# TEOREMI SULL' EQUILIBRIO ELASTICO

## 30 — Il principio dei lavori virtuali.

Consideriamo il corpo elastico nello stato d'equilibrio corrispondente alle forze esplicite:

$$Y_i \quad , \quad F_i$$

e siano $R_i$ le reazioni dei vincoli, $v_i$ gli spostamenti corrispondenti.

Poichè l'equilibrio sussiste sotto l'azione delle forze esplicite e delle reazioni, potremo ritenere queste ultime sostituite ai vincoli e quindi il corpo libero nello spazio.

Volendo in tali condizioni imprimere al sistema una deformazione *ulteriore,* è noto che affinchè questa sia *possibile,* occorre e basta che i suoi parametri soddisfino alle condizioni di congruenza; non è necessario siano soddisfatte condizioni di vincolo da parte dei corrispondenti spostamenti.

Diremo *deformazioni virtuali* del sistema dato tutte quelle, dello stesso ordine di quella già da esso subita per azione delle forze, soddisfacenti alle condizioni di congruenza.

Ciò premesso, il principio dei lavori virtuali applicato ai sistemi elastici può essere così enunciato:

*se un corpo elastico si trova nella configurazione di equilibrio corrispondente all'azione di date forze esterne, la somma dei lavori da queste eseguiti per una qualunque deformazione virtuale è uguale alla variazione prima dell'energia potenziale elastica.*

Detti $v_i^*$ gli spostamenti, $\varepsilon_{ik}^*$ le componenti della deformazione corrispondenti alla deformazione virtuale considerata, il lavoro eseguito dalle forze di massa per unità di volume vale:

$$\sum_i Y_i v_i^* ,$$

quelli eseguiti dalle forze superficiali rispettivamente per le forze esplicite e per le reazioni dei vincoli:

$$\sum_i F_i v_i^* \quad , \quad \sum_i R_i v_i^* .$$

La variazione prima dell'energia potenziale unitaria $\varphi(\varepsilon_{ik})$, somma dei termini lineari dello sviluppo in serie di Taylor:

$$\varphi(\varepsilon_{ik}+\varepsilon_{ik}^*) - \varphi(\varepsilon_{ik}) = \sum_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ik}} \varepsilon_{ik}^* + \frac{1}{2} \sum_{ik,jh} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_{ik}\, \partial \varepsilon_{jh}} \varepsilon_{ik}^* \varepsilon_{jh}^* + \ldots , \tag{72}$$

ricordando le (65), può scriversi:

$$\Delta\varphi = \sum_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ik}} \varepsilon_{ik}^* = \sum_{ik} \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^* .$$

L'equazione dei lavori virtuali potremo ottenerla uguagliando gl'integrali per tutto il corpo elastico del lavoro esterno e della suddetta variazione prima:

$$\int_V (\sum_i Y_i v_i^*)\, dV + \int_S [\sum_i (F_i + R_i)\, v_i^*]\, dS = \int_V (\sum_{ik} \sigma_{ik} \varepsilon_{ik}^*)\, dV . \tag{73}$$

In essa, tanto il volume, come la superficie del corpo, dovrebbero a rigore essere considerati come variabili al variare dello stato di deformazione; tuttavia, per la supposta piccolezza della deformazione e conformemente a quanto si pratica normalmente in questa teoria, li riguarderemo entrambi come costanti ed uguali a quelli che il corpo possedeva allo stato naturale.

Si noti altresì che l'equazione si trova talvolta scritta priva del lavoro corrispondente alle reazioni; ciò è legittimo quando ci si limiti alla considerazione di deformazioni virtuali compatibili coi vincoli, e si riguardino i vincoli stessi come *perfetti*, ossia privi di attrito e rigidi, come noi li abbiamo finora supposti. In tal caso le reazioni non lavorano, perchè nella deformazione virtuale il loro punto di applicazione non si sposta o si sposta normalmente alla loro retta d'azione.

La (73) equivale alle condizioni di equilibrio indefinite ed ai limiti da noi ottenute per altra via; essa permette cioè d'individuare tra tutte le deformazioni virtuali quella effettiva, in quanto corrisponde alla reale distribuzione di tensioni in equilibrio con le forze esterne. L'uguaglianza sta per *qualsiasi sistema di forze e tensioni, purchè equilibrato,* ossia soddisfacente alle equazioni di Cauchy ed alle equazioni ai limiti, e per *qualsiasi sistema di spostamenti o deformazione, purchè possibile,* cioè congruente. Quest'ultimo potrebbe per esempio corrispondere ad una variazione di temperatura o all'azione di una distribuzione di forze esterne diverse dalle $Y_i$ ed $F_i$ che figurano al primo membro dell'equazione.

La variazione seconda della densità d'energia:

$$\Delta^2 \varphi = \frac{1}{2} \sum_{ik,jh} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{jk}} \varepsilon^*_{ik} \varepsilon^*_{jh} , \tag{74}$$

che può trarsi dalla (72), si riconosce uguale alla stessa funzione $\varphi$ calcolata per le componenti $\varepsilon^*_{ik}$ della deformazione virtuale. Per le (65) e (59) è infatti:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{jh}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{jh}} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{ik}} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial \varepsilon_{jh}} = a_{ik,jh} ,$$

sicchè alla (74) può darsi forma analoga alla (63):

$$\Delta^2 \varphi = \varphi (\varepsilon^*_{ik}) = \sum_{ik,jh} a_{ik,jh} \varepsilon^*_{ik} \varepsilon^*_{jh} .$$

La variazione seconda dell'energia potenziale di tutto il sistema:

$$\Delta^2 \Phi = \int_V \varphi (\varepsilon^*_{ik}) \, dV$$

essendo certamente positiva, avverte che, per forze esplicite costanti, la configurazione d'equilibrio definita dalla (73) è sicuramente stabile.

## 31 — Teorema di Clapeyron.

Per un dato corpo elastico soggetto a date forze esplicite $Y_i$, $F_i$, siano:

$$\sigma_{ik} \quad , \quad \varepsilon_{ik} \quad , \quad v_i ,$$

le tensioni, le deformazioni e gli spostamenti corrispondenti alla soluzione dell'equilibrio elastico. Scriviamo per esso l'equazione dei lavori virtuali facendovi figurare — una volta tanto — con le tensioni $\sigma_{ik}$ che fanno equilibrio alle forze date, gli spostamenti $v_i$ e le deformazioni corrispondenti. Ciò è perfettamente lecito in quanto gli spostamenti e le deformazioni reali soddisfano sicuramente alla premessa fatta di sopra.

Tenuto presente che, per le ipotesi fatte sui vincoli, le reazioni non generano lavoro, avremo:

$$\int_V (\sum_i Y_i v_i)\, dV + \int_S (\sum_i F_i v_i)\, dS = \int_V (\sum_{ik} \sigma_{ik} \varepsilon_{ik})\, dV .$$

Se non vi sono sforzi iniziali, come qui vogliamo supporre, il secondo membro di questa equazione, secondo quanto risulta dalla (62), esprime il doppio del lavoro di deformazione $\Phi_t$. Possiamo quindi scrivere la equazione stessa nella forma:

$$\Phi_t = \frac{1}{2}\left[\int_V (\sum_i Y_i v_i)\, dV + \int_S (\sum_i F_i v_i)\, dS\right], \tag{75}$$

la quale esprime il teorema di Paolo Emilio Clapeyron: *il lavoro di deformazione compiuto mentre le forze esterne crescono gradatamente dal valore zero al valore finale, è uguale alla metà del lavoro che le forze stesse produrrebbero se, mentre si compie la deformazione, esse agissero con tutta la loro intensità finale.*

### 32 — Teorema di Betti.

Consideriamo gli stati d'equilibrio d'un dato corpo elastico corrispondenti a due generici sistemi di forze esplicite:

$$Y_i' \quad , \quad F_i' \quad ; \quad Y_i'' \quad , \quad F_i'' \; ;$$

e siano ordinatamente:

$$\sigma_{ik}' \quad , \quad \varepsilon_{ik}' \quad , \quad v_i' \quad ; \quad \sigma_{ik}'' \quad , \quad \varepsilon_{ik}'' \quad , \quad v_i'' \; ,$$

le componenti di tensione, quelle di deformazione e le componenti di spostamento relative rispettivamente al primo e al secondo stato.

L'equazione dei lavori virtuali può essere scritta:

per il sistema di forze e tensioni relativo al primo stato e per il sistema di spostamenti e deformazioni corrispondenti al secondo:

$$\int_V (\sum_i Y_i' v_i'')\, dV + \int_S (\sum_i F_i' v_i'')\, dS = \int_V (\sum_{ik} \sigma_{ik}' \varepsilon_{ik}'')\, dV \; ;$$

per il sistema di forze e tensioni relativo al secondo stato e per il sistema di spostamenti e deformazioni corrispondenti al primo:

$$\int_V (\sum_i Y_i'' v_i') \, dV + \int_S (\sum_i F_i'' v_i') \, dS = \int_V (\sum_{ik} \sigma_{ik}'' \varepsilon_{ik}') \, dV .$$

Ora, per le (54), le somme sotto i segni d'integrazione al secondo membro della prima e della seconda equazione si possono scrivere rispettivamente:

$$\sum_{ik,jh} a_{ik,jh} \, \varepsilon_{jh}' \, \varepsilon_{ik}'' \qquad , \qquad \sum_{ik,jh} a_{ik,jh} \, \varepsilon_{ik}' \, \varepsilon_{jh}'' .$$

Ne deriva che sono uguali i secondi membri delle due equazioni e che per conseguenza, dovranno esserlo anche i primi; dovrà essere cioè:

$$\int_V (\sum_i Y_i' v_i'') dV + \int_S (\sum_i F_i' v_i'') \, dS = \int_V (\sum_i Y_i'' v_i') dV + \int_S (\sum_i F_i'' v_i') \, dS . \tag{76}$$

Questo risultato esprime il teorema di Betti, noto anche sotto il nome di *primo principio di reciprocità,* il quale può essere così enunciato:

*dato un solido elastico soggetto a dati vincoli, ed assegnati due sistemi di forze, il lavoro che le forze del primo sistema eseguirebbero quando si attribuissero al solido gli spostamenti dovuti al secondo sistema di forze, è uguale al lavoro che le forze del secondo sistema eseguirebbero quando si attribuissero al solido gli spostamenti dovuti alle forze del primo sistema.*

Supposto di applicare il secondo sistema di forze quando il solido si trovi già nel primo dei due stati d'equilibrio considerati, le forze relative a questo stato, già applicate con tutta la loro intensità, mentre si produce la deformazione corrispondente al secondo stato compiranno un lavoro espresso dal primo membro della (76). Si può quindi enunciare il teorema di Betti anche nel modo seguente:

*il lavoro eseguito dalle forze del primo sistema durante l'applicazione delle forze del secondo sistema, è uguale al lavoro che le forze del secondo sistema compiono durante l'applicazione di quelle del primo.*

## 33 — Teorema di Maxwell.

Le forze superficiali agenti sui sistemi materiali sono sempre ripartite su porzioni più o meno estese della superficie $S$ del loro contorno, come quelle finora considerate che, insieme con le forze di massa, sollecitano i corpi elastici. Nelle applicazioni è invece frequente la considerazione di forze concentrate.

A rigore non potrebbero ammettersi concentrazioni di forze finite in un punto della superficie d'un corpo, perchè ne deriverebbero tensioni infinitamente grandi che nessun materiale potrebbe sopportare; spesso però agendo le forze su aree limitate, ad una certa distanza dalle aree di ripartizione, è priva d'influenza la legge, per lo più incognita, con cui le forze sono distribuite. In applicazione ad un postulato di Saint-Venant che enuncieremo in seguito, è allora possibile sostituire alle forze effettive la loro risultante; attribuiremo poi al punto di applicazione di questa risultante uno spostamento uguale alla media degli spostamenti che subiscono i punti dell'area di ripartizione.

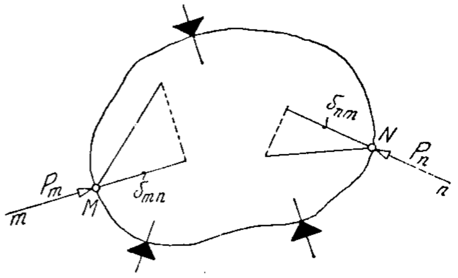

Fig. 16

Con queste avvertenze circa il significato che intendiamo attribuire alle forze concentrate agenti sui corpi elastici ed agli spostamenti dei loro punti d'applicazione causati dalla deformazione, supponiamo che il primo sistema di forze considerato nel teorema precedente si riduca ad un'unica forza concentrata $P_m$ applicata al punto $M$ (fig. 16), e che parimenti ad un'unica forza concentrata $P_n$, applicata al punto $N$, si riduca il secondo sistema di forze.

Se $\delta_{mn}$ è la proiezione dello spostamento del punto $M$ sulla direzione di $P_m$, o come suol dirsi, lo spostamento di $M$ valutato nella direzione di $P_m$, *dovuto alla forza* $P_n$, e $\delta_{nm}$ è lo spostamento del punto $N$ valutato nella direzione di $P_n$, *dovuto alla forza* $P_m$, per il primo principio di reciprocità possiamo scrivere:

$$P_m \delta_{mn} = P_n \delta_{nm} ;$$

e se $P_m = P_n$:

$$\delta_{mn} = \delta_{nm} . \tag{77}$$

Come caso particolare del teorema di Betti risulta così il teorema di Maxwell, da questi precedentemente dimostrato:

*scelti in un solido elastico due punti* M *ed* N *e per essi le direzioni* m *ed* n *arbitrarie, lo spostamento che* M *subisce secondo la direzione* m *per effetto di una forza* P *agente in* N *nella direzione* n, *è uguale allo sposta-*

*mento che* N *subisce nella direzione* n *per effetto della medesima forza* P *agente in* M *nella direzione* m.

* * *

Poichè le deformazioni prodotte da forze esterne si sovrappongono a quelle proprie dello stato naturale senza esserne influenzate, il principio di reciprocità è anche valido quando all'applicazione delle forze preesista uno stato di coazione elastica.

### 34 — Teorema di Menabrea.

Dati un solido elastico ed un sistema di forze ad esso applicate si possono trovare infiniti sistemi di tensioni interne soddisfacenti alle equazioni indefinite di equilibrio ed ai limiti; ed a tali sistemi, che diremo *equilibrati* corrispondono, per le (56), infiniti sistemi di componenti di deformazione. Di questi ultimi però soltanto uno è *possibile*, soddisfa cioè alle equazioni di congruenza e di compatibilità: quello che effettivamente si verifica.

Ci proponiamo ora di risolvere il problema dell'equilibrio elastico *ricercando quest'unico stato di deformazione possibile tra gli infiniti equilibrati.*

Consideriamo all'uopo il solido nello stato d'equilibrio elastico corrispondente ad un dato sistema di forze esplicite, e attribuiamo alle reazioni dei vincoli ed ai parametri della tensione tali variazioni, che il solido, dallo stato attuale, per ipotesi possibile ed equilibrato, passi ad un nuovo stato ideale ancora equilibrato, ma non più possibile.

Le componenti delle reazioni di vincolo, che nello stato attuale sono espresse dalle (52), divengono:

$$R_k + \delta R_k = \sum_s (\lambda_s + \delta\lambda_s) \frac{\partial f_s}{\partial y_k},$$

ciò che richiede siano soddisfatte le equazioni:

$$\delta R_k = \sum_s \delta\lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_k}.$$

Le componenti speciali di tensione:

$$\sigma_{ik} + \delta\sigma_{ik}$$

corrispondenti al nuovo stato devono a loro volta soddisfare le equazioni indefinite ed ai limiti; oltre alle (28) e (32) valgono quindi pure le:

$$\sum_i \frac{\partial(\sigma_{ik}+\delta\sigma_{ik})}{\partial y_i} + Y_k = 0\,,$$

$$\sum_i (\sigma_{ik}+\delta\sigma_{ik})\, n_i = F_k + R_k + \delta R_k\,.$$

Ne derivano le altre condizioni:

$$\sum_i \frac{\partial(\delta\sigma_{ik})}{\partial y_i} = 0\,,$$

$$\sum_i \delta\sigma_{ik}\, n_i = \delta R_k = \sum_s \delta\lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial y_k}\,,$$

le quali avvertono che le variazioni che devono attribuirsi alle reazioni dei vincoli ed alle componenti speciali di tensione per passare dallo stato equilibrato e possibile ad uno stato ancora equilibrato, sebbene non più possibile, verificano le equazioni indefinite ed ai limiti *per forze esplicite nulle*, e costituiscono pertanto da sole un sistema equilibrato.

Detti ora $\varepsilon_{ik}+\delta\varepsilon_{ik}$ i parametri della deformazione relativi a questo stato ideale del solido, scrivendo la corrispondente densità di energia avremo successivamente:

$$\varphi(\sigma_{ik}+\delta\sigma_{ik}) = \frac{1}{2}\sum_{ik}(\sigma_{ik}+\delta\sigma_{ik})(\varepsilon_{ik}+\delta\varepsilon_{ik}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{ik}\sigma_{ik}\varepsilon_{ik} + \frac{1}{2}\sum_{ik}\delta\sigma_{ik}\delta\varepsilon_{ik} + \frac{1}{2}\sum_{ik}\sigma_{ik}\delta\varepsilon_{ik} + \frac{1}{2}\sum_{ik}\delta\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}\,,$$

e osservando che per le (54) è:

$$\sum_{ik}\sigma_{ik}\delta\varepsilon_{ik} = \sum_{ik,jh} a_{ik,jh}\,\varepsilon_{jh}\,\delta\varepsilon_{ik} = \sum_{ik,jh} a_{ik,jh}\,\varepsilon_{ik}\,\delta\varepsilon_{jh} = \sum_{ik}\delta\sigma_{ik}\,\varepsilon_{ik}\,,$$

anche:

$$\varphi(\sigma_{ik}+\delta\sigma_{ik}) = \frac{1}{2}\sum_{ik}\sigma_{ik}\varepsilon_{ik} + \frac{1}{2}\sum_{ik}\delta\sigma_{ik}\delta\varepsilon_{ik} + \sum_{ik}\delta\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}\,;$$

sicchè l'energia potenziale elastica di tutto il solido vale:

$$\Phi(\sigma_{ik}+\delta\sigma_{ik}) = \frac{1}{2}\int_V\Big(\sum_{ik}\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}\Big)dV + \frac{1}{2}\int_V\Big(\sum_{ik}\delta\sigma_{ik}\,.\,\delta\varepsilon_{ik}\Big)dV + \int_V\Big(\sum_{ik}\delta\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}\Big)dV\,.$$

Il primo termine di questa espressione rappresenta l'energia potenziale elastica relativa allo stato attuale, *energia uguale al lavoro di defor-*

*mazione* $\Phi_1$ *se, come supponiamo, è nulla l'energia vincolata.* Il terzo termine è nullo, come prova l'equazione dei lavori virtuali scritta per il sistema di forze-tensioni che determina il passaggio dallo stato attuale allo stato ideale (forze esplicite nulle, tensioni $\delta\sigma_{ik}$) e per il sistema di spostamenti-deformazioni congruente e compatibile coi vincoli corrispondente al passaggio dallo stato non deformato allo stato attuale: essendo nulle le forze esplicite, la (73) fornisce infatti:

$$0 = \int_V (\Sigma\, \delta\sigma_{ik}\, \varepsilon_{ik})\, dV .$$

Ponendo uguale a $\delta\Phi$ il secondo termine, potremo allora scrivere:

$$\Phi\,(\sigma_{ik} + \delta\sigma_{ik}) = \Phi_1 + \delta\Phi\ ;$$

talchè $\delta\Phi$ sta a rappresentare la variazione che l'energia potenziale elastica subisce per effetto della supposta variazione dello stato di tensione. Ma tale variazione è infinitesima di second'ordine quando si suppongano infinitesime del primo ordine le variazioni $\delta\sigma_{ik}$ attribuite ai parametri $\sigma_{ik}$; la condizione che caratterizza l'equilibrio elastico, pertanto esprimibile nella forma:

$$\delta\Phi = 0\ , \tag{78}$$

dichiara che *l'energia potenziale elastica è stazionaria per una variazione equilibrata del tensore degli sforzi.* Siccome poi l'energia:

$$\delta\Phi = \frac{1}{2}\int_V (\sum_{ik} \delta\sigma_{ik}\, \delta\varepsilon_{ik})\, dV\ ,$$

corrispondente alle variazioni $\delta\sigma_{ik}$ ed alle relative deformazioni è una quantità sempre positiva che non può annullarsi se non si annullano in tutti i punti le variazioni suddette, sarà sempre:

$$\Phi > \Phi_1\ ,$$

da cui segue:

$$\Phi_{\min} = \Phi_1\ . \tag{79}$$

Resta così dimostrato il teorema di Menabrea: *tra tutte le distribuzioni equilibrate di tensioni e reazioni di vincolo, quella che corrisponde all'effettivo stato di equilibrio rende minima la funzione* $\Phi$: *il valore mi-*

*nimo di questa funzione è allora precisamente uguale al lavoro di deformazione del solido.*

* * *

Il nome di *principio del minimo lavoro* sotto cui venne enunciato originariamente, ed è ancor oggi comunemente noto, il teorema ora dimostrato ha dato luogo a molte discussioni.

Si osserva da alcuni che in un sistema elastico soggetto a date forze esterne il lavoro di deformazione è unico, e pertanto non può essere nè massimo nè minimo.

In realtà i lavori che la funzione $\Phi$, fra i quali va ricercato il minimo $\Phi_t$, non possono riguardarsi come lavori di deformazione del sistema dato; essi sono semplicemente i valori forniti dalla espressione del lavoro di deformazione:

$$\Phi_t = \frac{1}{2} \int \left( \sum_{ik,jh} c_{ik,jh}\, \sigma_{ik} \sigma_{jh} \right) dV$$

quando in luogo delle tensioni corrispondenti alla effettiva configurazione di equilibrio del corpo — unica, come è noto, e al tempo stesso possibile ed equilibrata — si sostituiscano distribuzioni di tensioni soddisfacenti esclusivamente alle condizioni di equilibrio, relative pertanto a configurazioni del corpo sempre equilibrate, ma impossibili perchè non soddisfacenti alla congruenza delle deformazioni ed alle condizioni di compatibilità.

La $\Phi$ dovrebbe essere dunque riguardata come una funzione analitica i cui valori, eccettuato quello minimo, coincidente col lavoro di deformazione, non hanno significato fisico, in quanto corrispondenti a configurazioni puramente ideali del corpo, che questo non può raggiungere, dato che vi si oppongono la sua continuità ed i vincoli che gli sono imposti.

Oppure si può pensare il corpo liberato dalla sua connessione e sciolto dai suoi vincoli, talchè sia possibile imporre ai suoi elementi deformazioni e spostamenti arbitrari; e riguardare allora i valori generici della $\Phi$ come somma delle energie elastiche dei singoli elementi di volume presi isolatamente.

La questione esaminata sotto l'aspetto che metteremo in evidenza dando del teorema una dimostrazione sintetica, può essere decisa in definitiva riguardando i valori della funzione $\Phi$ come *energie potenziali elastiche corrispondenti alle forze esterne date ed a stati ben determinati di* *coazione elastica: l'energia minima corrispondente all'assenza di coazioni, coincide col lavoro di deformazione.*

Supponiamo infatti di poter imprimere al corpo, pervenuto dallo stato non deformato allo stato di equilibrio corrispondente all'azione di date forze esplicite, degli stati di costrizione ulteriore, attribuendogli delle coazioni elastiche; ciò potrebbe per esempio essere ottenuto facendogli subire delle distorsioni o modificando di pochissimo la posizione di suoi eventuali vincoli sovrabbondanti. In tali condizioni il corpo possiede una energia potenziale elastica, espressa dalla (67), somma del lavoro di deformazione $\Phi_1$ e dell'energia $\Phi_0$ corrispondente alle coazioni: termini notoriamente entrambi positivi, ciascuno dei quali non può annullarsi se non sono nulli in ogni punto tutti i parametri della deformazione contenuti in esso. In particolare non può annullarsi l'energia vincolata $\Phi_0$ se non sono nulle ovunque le componenti di deformazione $(\varepsilon_{ik})_0$ relative allo stato di coazione.

Soddisfatta tale condizione, è $\Phi = \Phi_1$; in ogni altro stato del solido è sempre rispettata la $\Phi > \Phi_1$.

Possiamo dunque affermare che *tra tutti i valori che l'energia potenziale elastica d'un corpo soggetto a date forze esterne può assumere in corrispondenza di tutti i possibili stati di coazione, quello $\Phi_1$ corrispondente allo stato non deformato è il minimo.* D'altra parte, se supponiamo infinitesimi del primo ordine i parametri $(\varepsilon_{ik})_0$ della coazione, sarà infinitesima del secondo ordine la corrispondente energia vincolata $\delta\Phi$; sicchè sta ancora la (78) e resta provato che il minimo $\Phi_1$ dell'energia $\Phi$ ha comportamento stazionario nel suo intorno.

## 35 — Teorema di Castigliano.

Sia assegnato un solido elastico soggetto a date condizioni di vincolo e cimentato da un generico sistema di forze. Appartenga a questo la forza concentrata $P_m$ applicata al punto $M$ del solido, e si attribuisca alla intensità di essa un incremento piccolissimo $\delta P_m$.

Il lavoro di deformazione subirà corrispondentemente un certo incremento, il quale può essere riguardato come costituito dalle seguenti due parti:

lavoro eseguito dalle forze già applicate;

lavoro eseguito dalla forza $\delta P_m$.

Il secondo lavoro, dell'ordine di grandezza del quadrato di $\delta P_m$, è trascurabile rispetto al primo; questo, d'altra parte, per il teorema di Betti, è uguale al lavoro eseguito dalla forza $\delta P_m$ durante l'applicazione delle rimanenti forze.

Se dunque indichiamo con $\eta_m$ lo spostamento che il punto $M$ subisce nella direzione di $P_m$ quando il solido passa allo stato attuale di deformazione, il primo lavoro, ossia l'incremento del lavoro di deformazione corrispondente all'incremento $\delta P_m$, sarà:

$$\eta_m \, \delta P_m .$$

D'altra parte lo stesso incremento può scriversi:

$$\frac{\partial \Phi_t}{\partial P_m} \delta P_m ;$$

uguagliando, si ottiene perciò:

$$\eta_m = \frac{\partial \Phi_t}{\partial P_m} . \tag{80}$$

Questa relazione esprime il teorema di Alberto Castigliano: *nella deformazione d'un solido elastico dovuta all'azione d'un dato sistema di forze, lo spostamento del punto d'applicazione d'una forza $P_m$ nella direzione di essa è uguale alla derivata parziale del lavoro di deformazione rispetto alla forza medesima,*

Questo teorema permette di determinare lo spostamento che nella deformazione subisce un punto qualunque del solido, anche quando al punto non sia applicata alcuna forza. Basterà in tal caso applicare al punto, nella direzione secondo la quale si vuol valutare lo spostamento, una forza indeterminata $P_m$, esprimere il lavoro di deformazione in funzione delle forze effettivamente applicate e della $P_m$, ed eseguire quindi la derivata; l'espressione di $\eta_m$ che si ottiene, valida per qualunque valore di $P_m$, fornirà, per $P_m = 0$, lo spostamento cercato.

## 36 — Secondo principio di reciprocità.

Sia un solido elastico in equilibrio sotto l'azione delle forze esterne:

$$Y_i \quad , \quad F_i ,$$

e supponiamo praticato in esso un taglio secondo una qualsiasi superficie $H$ che lo separi in due parti indipendenti.

Lo stato d' equilibrio elastico non sarà per nulla alterato se immaginiamo applicate come forze esterne alle due faccie $H_a$ e $H_b$ del taglio le azioni esterne:

$$t_i \quad , \quad -t_i ,$$

uguali ed opposte, che si esercitavano su di esse nell' intero solido.

Dette $v_i$ le componenti di spostamento corrispondenti allo stato di equilibrio in esame, ed in particolare:

$$v_{ia} \quad , \quad v_{ib} ,$$

quelle relative al punto generico $M_a$ della superficie $H_a$ e al suo omologo $M_b$ della superficie $H_b$, poichè il taglio non ha alterata la configurazione di equilibrio elastico, sarà:

$$v_{ia} = v_{ib} . \tag{81}$$

Supponiamo ora di liberare il sistema da tutte le forze esterne, comprese le ultime applicate alle faccie del taglio, e di fare agire su queste medesime faccie $H_a$ e $H_b$ due altri sistemi di forze esterne:

$$t_i^* \quad , \quad -t_i^* ,$$

distribuite con intensità uguali ed opposte nei punti omologhi delle due superfici. A queste forze, necessariamente in equilibrio nel loro complesso, corrisponde una configurazione del solido modificato dal taglio caratterizzata da un certo sistema di componenti di spostamento $v_i^*$: siano in particolare:

$$v_{ia}^* \quad , \quad v_{ib}^* ,$$

quelle relative al punto $M_a$ di $H_a$ ed al punto $M_b$ di $H_b$.

Sarà in generale:

$$v_{ia}^* \neq v_{ib}^* ,$$

in altri termini, le faccie del taglio subiranno un certo spostamento relativo. Immaginiamo di saldarle nella loro nuova posizione relativa, previa asportazione di materia laddove lo spostamento tende a produrre una compenetrazione della superficie $H$, ed interposizione di materia laddove lo spostamento determina un distacco. Una tale variazione di configurazione produce in generale una vera e propria deformazione elastica, alla quale abbiamo già dato il nome di *distorsione.*

Se ora applichiamo il teorema di Betti considerando i lavori compiuti: dalle forze esterne:

$$Y_i \quad , \quad F_i \quad , \quad t_i \quad , \quad -t_i \, ,$$

per gli spostamenti:

$$v_i^* \quad , \quad v_{ia}^* \quad , \quad v_{ib}^* \, ,$$

dovuti alla distorsione;

dalle forze distorcenti:

$$t_i^* \quad , \quad -t_i^* \, ,$$

per gli spostamenti:

$$v_i \quad , \quad v_{ia} \quad , \quad v_{ib} \, ,$$

relativi allo stato di equilibrio preesistente al taglio, avremo:

$$\int_V (\sum_i Y_i v_i^*) \, dV + \int_S (\sum_i F_i v_i^*) \, dS + \int_{Ha} (\sum_i t_i v_{ia}^*) \, dH -$$

$$- \int_{Hb} (\sum_i t_i v_{ib}^*) \, dH = \int_{Ha} (\sum_i t_i^* v_{ia}) \, dH - \int_{Hb} (\sum_i t_i^* v_{ib}) \, dH \, .$$

Tenendo presente le (81) ed osservando che $H_a = H_b = H$, si riconosce nullo il secondo membro dell' equazione ora scritta, la quale pertanto diviene:

$$\int_V (\sum_i Y_i v_i^*) \, dV + \int_S (\sum_i F_i v_i^*) \, dS = \int_H [\sum t_i (v_{ib}^* - v_{ia}^*)] \, dH \, . \tag{82}$$

Ma le:

$$v_{ib}^* - v_{ia}^*$$

non sono altro che le componenti dello spostamento relativo che il punto $M_b$ della faccia $H_b$ subisce nella distorsione rispetto all'omologo punto $M_a$ della faccia $H_a$; vale dunque il teorema:

*il lavoro che le forze esterne applicate ad un solido elastico compiono per effetto d' una distorsione ottenuta con un taglio* H *e con un generico sistema di forze distorcenti applicate alle faccie del taglio, è uguale al lavoro che le forze interne, trasmettentisi attraverso la superficie* H, *compiono per effetto degli spostamenti relativi delle faccie del taglio dovuti alla distorsione.*

Di questo teorema, già enunciato per il caso delle travi dal Land e dimostrato da Giuseppe Albenga, si deve la dimostrazione generale al Colonnetti. Esso è noto sotto il nome di *secondo principio di reciprocità.*

* * *

Se lo spostamento delle faccie del taglio degenera in un semplice moto rigido, la conseguente deformazione elastica prende il nome di *distorsione di Volterra.*

In tal caso può porsi:

$$v_{ib}^* - v_{ia}^* = a_i^* - b_{i-1}^* y_{i+1} + b_{i+1}^* y_{i-1} ;$$

le quantità $a_i^*$, $b_i^*$, costanti su tutta la superficie $H$, si dicono *caratteristiche della distorsione.*

L'equazione che esprime il secondo principio di reciprocità diviene ora:

$$(83) \qquad \int_V (\sum_i Y_i v_i^*) \, dV + \int_S (\sum_i F_i v_i^*) dS = \sum_i a_i^* \int_H t_i \, dH + \\ + \sum_i b_i^* \int_H (t_{i+2} \, y_{i+1} - t_{i+1} \, y_{i+2}) dH .$$

Poichè gl'integrali che vi figurano al secondo membro sono le componenti finite ed i momenti rispetto agli assi delle tensioni agenti su $H$, ossia le *caratteristiche* di questo sistema di tensioni rispetto alla terna di riferimento, possiamo enunciare il secondo principio di reciprocità nella forma:

*la somma dei prodotti delle sei caratteristiche delle tensioni interne che si trasmettono attraverso una superficie* H *interna al solido, per le corrispondenti caratteristiche d'una distorsione di Volterra operata mediante un taglio secondo* H, *è uguale al lavoro che le forze esterne eseguirebbero nel cambiamento di configurazione a cui quella distorsione darebbe luogo.*

## 37 — Postulato di Saint-Venant.

Come abbiamo già avvertito, nello studio dei sistemi elastici si ricorre spesso all'uso di un importante principio d'elasticità grazie al quale, sotto certe restrizioni, è consentito di prescindere dalla legge di ripartizione, per lo più incognita, di forze esterne che agiscano su porzioni limitate del corpo, e di sostituire a tale ripartizione la sua risultante.

Questo principio, introdotto dal Saint-Venant sotto forma di postulato ed ampiamente convalidato dall'esperienza, può essere così enunciato:

*la sostituzione d' un dato sistema di forze applicate ad una certa regione* $\Omega$ *d' un corpo elastico, con un altro sistema qualunque, purchè staticamente equivalente al primo, è priva di influenza sui punti del corpo situati a sufficiente distanza dalla regione* $\Omega$.

In altri termini, se ad una certa porzione $\Omega$ del corpo, per esempio ad una zona della sua superficie limite, si applica una prima volta il sistema di forze $S_a$, una seconda volta il sistema di forze $S_b$, $S_a$ ed $S_b$ essendo staticamente equivalenti — ammettano cioè la stessa risultante e la stessa coppia risultante — le tensioni $\sigma_a$ e le deformazioni $\varepsilon_a$ dovute al sistema $S_a$ (ed alle rimanenti forze $S_0$ eventualmente applicate al corpo fuori di $\Omega$), sono tanto più prossime alle tensioni $\sigma_b$ ed alle deformazioni $\varepsilon_b$ dovute al sistema $S_b$ (ed alle altre eventuali forze $S_0$), quanto più lontani da $\Omega$ sono i punti ove esse vengono valutate.

Si può anche enunciare il principio nel seguente altro modo: se ad una porzione $\Omega$ d' un corpo elastico si applica un sistema di forze $S$ in equilibrio, le tensioni e le deformazioni da esso generate vanno attenuandosi al crescere della distanza dalla porzione suddetta, tanto che in punti sufficientemente lontani sono praticamente nulle. O ancora: a distanza sufficientemente grande dalla regione $\Omega$ ove agiscono le forze, l'azione di queste dipende esclusivamente dalla loro risultante: è inapprezzabile l'influenza della loro distribuzione.

Del principio enunciato si può dare ora la seguente dimostrazione generale, dovuta a Osvaldo Zanaboni.

Applichiamo in corrispondenza della porzione $\Omega$ della superficie limite d' un corpo elastico, che diremo $A_1$ (fig. 17 *a*), simultaneamente i due sistemi di forze $S_a$ e $-S_b$, il cui complesso $S = S_a - S_b$, poichè per ipotesi sono staticamente equivalenti i sistemi $S_a$ ed $S_b$, costituisce un sistema nullo. Precisamente all' azione di questo sistema si debbono attribuire le differenze fra gli stati di tensione e di deformazione dovuti separatamente al sistema $S_a$ ed al sistema $S_b$.

Consideriamo ora una seconda porzione di superficie $\Gamma$ di $A_1$, priva di forze, e sia $\Gamma'$ la sua deformata (fig. 17 *b*). Supponiamo che un secondo corpo elastico $A_2$ abbia *nel suo stato indeformato* un tratto di superficie congruente a $\Gamma'$; accostiamolo al corpo $A_2$ in modo da giustapporre le superfici congruenti e, in corrispondenza di queste, immaginiamolo saldato ad esso. Ne risulterà un corpo elastico $A_1 A_2$ (fig. 17 *c*) tuttora soggetto al sistema di forze $S$, la cui energia potenziale elastica è ancora quella $\Phi_{A1}$ che possedeva il solo corpo $A_1$.

Se sul corpo così accresciuto facciamo agire in corrispondenza di ciascuna forza $P$ del sistema $S$ una forza $-P$, ci ridurremo al corpo elastico $A_1 A_2$ privo di forze, ma non privo di energia; i legami creati con l'aggiunta di materia elastica in corrispondenza della superficie $\Gamma'$ vietano infatti alla porzione $A_1$ di riacquistare la sua forma primitiva, mentre impongono una deformazione elastica alla porzione $A_2$. L'energia $\Phi_{A1}$ non viene perciò restituita tutta sotto forma di lavoro, ma rimane, per una certa quota $\Phi_{A1A2}$, certamente positiva, racchiusa nel corpo $A_1 A_2$ allo stato di energia vincolata.

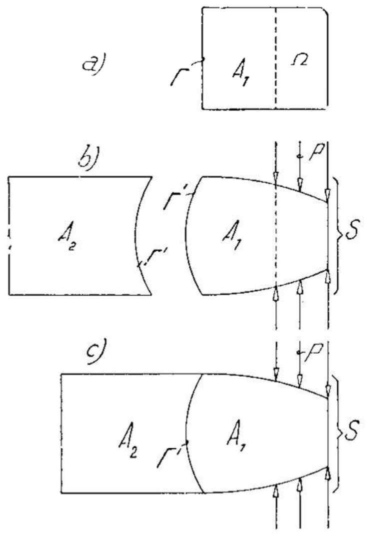

Fig. 17

È facile calcolare questa quota di energia residua per mezzo del teorema di Clapeyron applicando la sovrapposizione degli effetti alle forze $P$ e $-P$ e considerando che le prime forze hanno raggiunto il loro valore finale quando cominciano ad agire le seconde.

Detti $\eta_1$ gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze valutati nelle direzioni delle forze stesse e dovuti all'azione delle $P$ sul corpo $A_1$, $\eta_{1,2}$ gli analoghi spostamenti dovuti all'azione delle $-P$ sul corpo $A_1 A_2$, avremo:

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{2} \Sigma P \eta_1 + \frac{1}{2} \Sigma P \eta_{1,2} - \Sigma P \eta_{1,2} ,$$

da cui:

$$\Phi_{1,2} = \frac{1}{2} \Sigma P \eta_1 - \frac{1}{2} \Sigma P \eta_{1,2} > 0 ;$$

notando poi che è $\Phi_{P,1} = \frac{1}{2} \Sigma P \eta_1$ e detto $\Phi_{P,1,2}$ il lavoro di deformazione del corpo $A_1 A_2$ dovuto alle sole forze $P$ del sistema $S$, avremo ancora:

$$\Phi_{1,2} = \Phi_{P,1} - \Phi_{P,1,2} > 0 .$$

Questa energia vincolata consta di due quote entrambe positive: quella $\Phi_1$ contenuta in $A_1$ e quella $\Phi_2$, dovuta esclusivamente alle forze $-P$ sul corpo $A_1 A_2$, contenuta in $A_2$; si può pertanto affermare che il lavoro di deformazione $\Phi_2$, generato nella porzione $A_2$ del corpo elastico $A_1 A_2$ dall'azione delle forze $P$, soddisfa alla condizione:

$$\Phi_2 < \Phi_{1,2} = \Phi_{P,1} - \Phi_{P,1,2} .$$

Se consideriamo ora una successione di corpi elastici: $A_1$, $A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3, \ldots\ldots$, i corrispondenti lavori $\Phi_{P,1}$, $\Phi_{P,1,2}$, $\Phi_{P,1,2,3} \ldots$ costituiscono una successione di valori decrescenti; e poichè si tratta di valori certamente positivi, dato un numero positivo $\varepsilon$ arbitrariamente piccolo, dovrà potersi trovare un $n$ tale che risulti:

$$\Phi_{1,2,3,\ldots,n+1} = \Phi_{P,1,2,3,\ldots,n} - \Phi_{P,1,2,3,\ldots,n+1} < \varepsilon ,$$

e siccome è pure:

$$\Phi_{n+1} < \Phi_{1,2,3,\ldots,n+1} ,$$

resta dimostrato che l'energia racchiusa nella porzione $A_{n+1}$ di un corpo $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$, dovuta all'applicazione delle forze $P$, svanisce al crescere di $n$, ossia al crescere della distanza dalla regione ove agiscono le forze. Con essa svaniscono pure le tensioni e le deformazioni, appunto come dichiara il postulato.