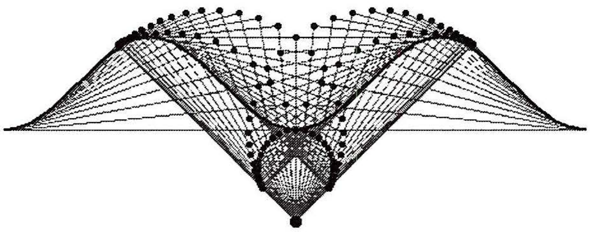
La geometría de las formas de la naturaleza

Yolanda Álvarez Ríos[1]



Ave fénix[2]

Resumen

El intento por dominar racionalmente el espacio dio lugar a la Geometría. La totalidad de las matemáticas se encuentran invadidas por el sentido geométrico; y no podía ser de otra manera, dado el carácter eminentemente visual y espacial de una gran porción de la intelección matemática y dada la tendencia manifiesta a aclarar hasta las ideas más abstractas, de una forma intuitiva y gráfica.

Las formas geométricas de la naturaleza se clasificarán atendiendo a los binomios forma-función, forma-métrica y forma complejidad. Este artículo retoma la taxonomía de las formas más comunes en la naturaleza, recalcando su expresión matemática y analizando su funcionalidad y estructura como elementos fundamentales que las han hecho prevalecer.

---

1 Matemática de la Universidad Nacional de Colombia. Sede Medellín. Especialista en Evaluación Socioeconómica de Proyectos de la Universidad de Antioquia. Magíster en Ciencias Económicas de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín. Docente Tiempo Completo ITM Institución Universitaria. yolandaalvarez@itm.edu.co.

2 "El ave fénix" aparece como una hermosa construcción geométrica que tiene por podaria una sinusoide (curva azul) con respecto a un punto de fuga localizado debajo de ella, ésta se puede observar en la figura, donde se muestra su podaria con puntos rojos.

Como producto del proyecto de investigación "Laboratorio de Matemáticas" del Grupo de Investigación en Ciencias Básicas Da Vinci, en este artículo se presenta la conexión indiscutible entre la Geometría, la forma y la estructura presentes en la naturaleza, explorando las formas de manera diferente a los desarrollos formales recorridos por la Geometría.

Palabras clave

Geometría, forma, función, métrica, estructura, complejidad, prevalencia.

Abstract

The attempt to rationally dominate the concepts of space gave place to the birth of Geometry. Mathematics as a whole is permeated by a sense of geometry. And it could be no other way, considering the eminently visual and spatial character of a great part of mathematics, and given the fact that there is a tendency to obtain clarification of even the most abstract ideas in an intuitive and graphic manner.

Nature's geometrical shapes will be classified according to shape-function, shape-metrics and shape-complexity binomials. This article takes up again the taxonomy of the most common shapes in nature, emphasizing their mathematical expression and analysing their functionality and their structure as the fundamental elements that have made them prevail.

As a product of the Mathematics Laboratory research Project of the "Grupo de Investigación en Ciencias Básicas Da Vinci", this article shows the undeniable relationship between geometry, shape and structures as they present themselves in nature, exploring shapes in a different way than the formal developments that are proper of Geometry.

Key words

Geometry, shape, function, metrics, structure, complexity, prevalence.

1. Introducción

El intento por dominar racionalmente el espacio, dio lugar a la Geometría. Pese a que las Matemáticas ya eran avanzadas en tiempos anteriores (babilonios o egipcios), hasta los griegos, la preocupación por esta ciencia era meramente práctica: medir, construir, contar. Los griegos, sin embargo, se preocuparon por reflexionar sobre la naturaleza de los números, sobre la naturaleza de los "objetos" matemáticos (geometría). La Escuela Jónica fundada por Tales de Mileto (en torno al 600 a.C.), fue la primera en comenzar el estudio científico de la Geometría. Más tarde fue la escuela pitagórica fundada por Pitágoras (en torno al 550 a.C.), a ellos se le atribuyen numerosos descubrimientos matemáticos, entre otros, la demostración del conocido Teorema de Pitágoras, la elaboración de un primer grupo de cuatro disciplinas matemáticas: la aritmética, la música (o aritmética de intervalos musicales), la geometría plana y la geometría esférica.

La repetición de situaciones y la semejanza observada en muchos objetos diversos debieron de conducir al hombre en su primer paso hacia la abstracción matemática. El número representa la culminación de un intento por lograr el dominio sobre la multiplicidad. A este respecto Aristóteles expresaba:

> "Los llamados pitagóricos se ocuparon de las ciencias matemáticas, ellos fueron los primeros que cultivaron estas ciencias y, al introducirse en ellas, llegaron a la opinión de que los principios de estas ciencias son los principios de todas las cosas. Los números eran por naturaleza los primeros de entre estos principios, ellos pensaban ver en los números muchas semejanzas con lo que es y lo que ocurre, más bien que en el fuego, tierra y agua, opinaron que una cierta cualidad de los números era la justicia, otra el alma y la razón, otra la ocasión adecuada, etc. También veían que las propiedades y relaciones de la armonía musical están determinadas por los números todas las cosas están también conformadas según los números y los números son lo primero en toda la naturaleza, pensaron que los elementos de los números son los elementos de todas las cosas y que el cielo entero es armonía y número". [Miguel de Guzmán, 1990, pág 14]

El espacio y la figura fueron explorados a través de una creación mental extraordinariamente bien elaborada, la geometría. Con ella, los griegos fueron capaces de construir un verdadero modelo de razonamiento científico que ha perdurado a través de los siglos. La matemática griega se caracteriza muy especialmente por sus logros en el dominio de la complejidad que presenta el espacio y la forma, en particular, la geometría representa el intento de dar racionalidad matemática a las relaciones espaciales, y es en ella en donde los griegos tuvieron ocasión de desarrollar el modelo de ciencia deductiva que se impuso posteriormente. (Russel: 1983, pág 26).

La geometría ha sido a lo largo de la historia de la Matemática, la matriz en la que se han gestado los más profundos desarrollos de esta ciencia. Y no podía ser de otra manera, dado el carácter eminentemente visual y espacial de una gran porción de la intelección matemática y dada la tendencia manifiesta de todas las personas a aclarar sus ideas más abstractas de una forma intuitiva y gráfica. Este sentido geométrico se encuentra cultivado hoy día, de modos concretos muy diversos[3].

La idea de sistema axiomático, pilar fundamental de la Matemática, aparece bien perfilada en la fundamentación geométrica de Euclides, quien en su gran obra *Los Elementos*[4] recopila gran parte del saber matemático de su época, representados en proposiciones, definiciones, postulados y nociones, los cuales dan lugar a la denominada Geometría Euclidiana (Euclides: siglo III aC).

---

[3] Ejemplos claros lo constituyen ramas de la matemática, tales como: La topología, las ecuaciones diferenciales, el análisis funcional, la teoría de variable compleja entre otras.

[4] Esta obra ha tenido más de 1.000 ediciones desde su primera publicación en imprenta en 1482. Euclides construye su argumentación basándose en un conjunto de cinco axiomas que él mismo denominó postulados, los cuales son: I.- Dados dos puntos se pueden trazar una recta que los une. II.- Cualquier segmento puede ser prolongado de forma continua en una recta ilimitada en la misma dirección. III.- Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y radio cualquiera. IV.- Todos los ángulos rectos son iguales. V-. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela. Si se desea obtener más información puede consultarse la dirección http://centros5.pntic.mec.es/ies.ortega.y.rubio/Mathis/Euclides/euclides.htm

Por otra parte, la conexión entre la Geometría y el Álgebra es un logro con los trabajos de René Descartes[5] quien simplificó la notación algebraica usando un sistema de coordenadas en el denominado plano cartesiano, dando lugar a la Geometría Analítica (Descartes: 1637), además posibilitó el desenvolvimiento del cálculo infinitesimal.

Se puede afirmar que casi la totalidad de las matemáticas de ayer y de hoy se encuentran invadidas por el sentido geométrico; cuya fundamentación teórica también ha variado a través de los años, pues aunque la obra de Euclides sigue siendo el pilar fundamental de la geometría plana, ha sido también a partir de la negación de uno de los postulados[6] que han surgido otras geometrías, y con ellas otras explicaciones de las formas de los cuerpos ubicados en un espacio tiempo.

Otro gran salto en la concepción de la geometría se dio en 1868, al ser publicados póstumamente las conferencias y los artículos de Georg Riemann, en ellos el gran matemático alemán expone las ideas básicas de la que ahora conocemos como geometría riemanniana y que provee la base matemática de la teoría general de la relatividad.

Se pueden encontrar explicaciones formales y todo tipo de intentos de comprender la naturaleza, abordando para ello el estudio del universo o el estudio de la tierra como cuerpo geométrico o incluso los animales o las plantas. Con en el apogeo del pensamiento abstracto, los grandes filósofos griegos y entre ellos, los pitagóricos específicamente, concebían un universo esférico con esferas concéntricas girando sobre un eje. La esfera era símbolo de la perfección. (Miguel de Guzmán: 1990, pág 10)

---

[5] En 1637 publicó el *Discurso del Método*, seguido de tres ensayos: "Dióptrica", "Geometría" y "Meteoros". Éstas se consideran como sus primeras obras de evidente importancia.
http://es.wikipedia.org/wiki/Ren%C3%A9_Descartes

[6] Fue el joven matemático ruso Nikolai Lobachevski quien en 1826 finalmente se percató de que el quinto postulado no puede deducirse de las otras proposiciones fundamentales de la geometría y se atrevió a negar la "verdad evidente" de ese postulado de Euclides.

El aparato reproductor de las flores (gineceo) se encuentra en su centro y es allí donde se replica su forma a través de la semilla. En la duplicación de su forma o ciclo de reproducción, pasa del pimpollo (gota) a la flor (pentámera), de allí al fruto (esferoide) que contiene semillas (gota), éstas brotarán en una planta (pentámera), siguiendo hacia el infinito en ciclos de gotas, esferas y pentágonos.

Así mismo una explosión actúa como una fuente de energía que expande sus ondas en todas direcciones formando esferas concéntricas en sus crestas. De otro lado, las estrellas son esferas dentro de esferas, algo similar a una cebolla. En el momento del estallido de una estrella, partiendo del núcleo hacia afuera, todos los fragmentos intentarán alcanzar la superficie en el menor tiempo posible, pero se verán obstruidos por las capas posteriores y éstas por las siguientes y así sucesivamente.

En un universo armónico como el que habitamos, ¿no sería obvio suponer que existe una geometría capaz de conservar esta armonía?

En todas las épocas, el hombre imaginó un universo geométrico. La idea del cielo que gira alrededor de la tierra, lo llevó a pensar en un círculo girando sobre un eje. Desde los sabios griegos, la geometría y las distintas explicaciones acerca del universo y de la naturaleza y de la física como ciencia encargada de construir estas explicaciones, han evolucionado de la mano; además el desarrollo de una de estas ramas de la ciencia influyó siempre sobre la otra.

Si se rastrea esta conexión se observa que a fines del siglo XVI, Galileo Galilei observó que bajo la acción de la gravedad, todos los cuerpos que inician el movimiento de la misma manera caen o siguen las mismas trayectorias, sin importar si son más livianos o más pesados. Un siglo después, Isaac Newton presentó su Ley de Gravitación Universal la cual dice que todos los cuerpos en el universo se atraen con una fuerza. Einstein buscó otros caminos, pensó que la gravitación podía entenderse mejor como un fenómeno geométrico, como una propiedad del espacio mismo. Así, entonces, en lugar de ver la gravedad como una fuerza de atracción, se la puede entender como consecuencia de la curvatura del espacio, generada por la presencia de materia o energía. Einstein expresó matemáticamente estas ideas en su famosa Teoría de la Relatividad General. (Einstein: 1985, pág 118)

La nueva teoría de Einstein expresaba que no hay atracción sino cambios en la geometría del espacio -y también del tiempo-, producidos por la presencia de materia. Con esto, Einstein cambió la forma de ver el universo. Para él, el campo gravitatorio influye sobre las leyes métricas del continuo espacio-tiempo y hasta las determina; por lo tanto, si se deben expresar geométricamente las leyes que rigen la configuración de los cuerpos en presencia de un campo gravitatorio la geometría válida para ello no es la euclídea, por ello en los trabajos desarrollados por Einstein fueron fundamentales los conceptos de la geometría de espacios curvos, propuesta por Riemann. La geometría riemanniana forma parte de lo que hoy se llama la geometría no-euclidiana, pedazo de las matemáticas cuya historia fascinante hace más prolífico el estudio de la forma.

Escuchar a Jorge Wagensberg[7] cuando dice:

> "A nuestro alrededor un número enorme de objetos parece compartir un reducidísimo número de formas: aunque no tenía por qué ser así, la naturaleza exhibe ritmo y armonía". ¿Por qué ciertas formas –esferas, hexágonos, espirales, hélices, parábolas, conos, ondas, catenarias y fractales– son

[7] Jorge Wagensberg nació en Barcelona en 1948. Se licenció en física en 1971 y se doctoró en 1976 en la Universidad de Barcelona, donde hoy es profesor de Teoría de los Procesos Irreversibles, en la Facultad de Física donde dirige un grupo de investigación en biofísica. Es autor de más de cincuenta trabajos científicos aparecidos en publicaciones especializadas internacionales y de una extensa obra de difusión científica hacia otros dominios de la cultura. En 1980 publicó el libro *Nosotros y la ciencia* (Bosch Editor). Con la publicación ahora de *Ideas sobre la complejidad del mundo* abrimos las puertas a trabajos de científicos españoles a quienes hemos invitado a participar en este gran debate abierto sobre el pensamiento científico que es "Metatemas".

especialmente frecuentes? ¿Por qué justamente éstas y no otras? ¿Cómo emergen? ¿Cómo se perseveran? (Wagensberg: 2005)[8]

Me ha inducido a escribir este artículo que trata de hacer una conjunción entre lo expuesto por él en su conferencia "El surgimiento de las Formas de la naturaleza", la formulación y propiedades matemáticas de estas formas, así como también incluir al criterio de clasificación hecho por Wagensberg forma-función, los de forma-métrica y forma-complejidad. Este artículo retoma la taxonomía de las formas más comunes en la naturaleza, recalcando su expresión matemática y analizando su funcionalidad y estructura como elementos fundamentales que las han hecho prevalecer.

2. La geometría de las formas de la naturaleza

Un objeto puede caracterizarse por las siguientes siete propiedades: tamaño, color, forma, necesidad, función, estructura, composición y desarrollo. Si estas siete propiedades se combinan de dos en dos se pueden obtener 21 combinaciones posibles: tamaño-color, tamaño-forma, tamaño-necesidad, etc. Cada una de estas posibles combinaciones podría constituir el argumento para una investigación. En la conferencia antes citada, el señor Wagensberg, seleccionó el par **forma-función** analizando algunas de las formas más frecuentes en la naturaleza: la esfera, la onda, la espiral, la hélice, el ángulo, el hexágono, la catenaria.

Complementando esta clasificación se anexarán los binomios **forma-complejidad** y con él algunas consideraciones sobre los fractales; y el de **forma-estructura**, relacionada directamente con la métrica del espacio donde se estén considerando las formas. El objetivo es analizar las que con mayor frecuencia están presentes en la naturaleza, ya sea por abundancia o por persistencia.

[8] Este autor fue invitado por el Planetario de la ciudad de Medellín-Colombia, para dar *la conferencia* La morfogénesis, en marzo de 2005.

2.1. Criterios de clasificación

Forma y Función: La forma es una profunda propiedad superficial y la función es el valor añadido a esa propiedad por el sólo hecho de haber superado algún tipo de selección. Ésta se tratará como una propiedad de la superficie de los cuerpos. (Wagensberg: 2004, pág 24)

Si se indaga por la definición de forma, se encuentran las siguientes asociaciones: distribución peculiar de la materia, apariencia externa, cualidades del estilo, aspecto, normas externas. No es difícil ver que cada uno de los conjuntos de palabras aquí presentados guarda cierta coherencia interna, por lo que creemos que este tipo de asociación nos será de utilidad cuando de analizar la prevalencia de algunas formas se trata.

Los dos principios fundamentales para abordar una inteligibilidad de la forma contenidos serán ***la Función y la Frecuencia***, como principios rectores de lo que Wagensberg denomina "El esbozo de una nueva taxonomía de la morfogénesis o moderna teoría de clasificación de la forma"[9].

A lo largo de toda la historia de la humanidad el hombre se ha preocupado por explicar la naturaleza y con ese propósito ha tratado de estudiar la geometría de las formas de la misma, para ello debió y debe cuestionarse ¿A qué se debe que la naturaleza produzca ciertas formas y por qué unas son preferidas a otras? La función de la forma y la frecuencia serán los argumentos principales para explicar la presencia y la permanencia. Esto plantea inicialmente las siguientes preguntas ¿Cuál forma geométrica describe mejor al cuerpo humano? ¿Es ésta una de las formas más comunes en la naturaleza?

Forma y Estructura: Al consultar en fuentes generales conceptos relativos a estructura, encontramos que palabras y frases como: orden, ordenación, elementos y relaciones de

---

[9] Ibid, pág 17.

interdependencia, permanencia, manera de asociación, conjunto de relaciones, grupo de propiedades, conjunto de relaciones jerárquicas y funcionales, se encuentran frecuentemente asociadas al término estructura.

Hablamos de forma y de estructura, porque detrás de cada forma está la estructura de un sistema y porque algunos sistemas se nos manifiestan con una estructura, pero no necesariamente con una forma.

Entendemos un sistema como un conjunto de unidades, *auto-organizadas* en varios niveles de *jerarquía*, que *interaccionan* entre sí de manera *no-lineal* mediante un cierto número de reglas, de manera que los cambios en alguna parte de este sistema se propagan a otras partes del mismo, y tal que el sistema en su globalidad exhibe un comportamiento y propiedades *emergentes*, que no pueden inferirse por el análisis de sus unidades componentes.

Forma y Complejidad: Para distinguirlo de una mera colección, hablamos de un *sistema complejo*[10]. Éstos se encuentran y se mantienen *fuera de equilibrio* como consecuencia de la entrada de información, energía o materia desde su entorno inmediato. El sistema absorbe y procesa esta información, acomodándose a los cambios impuestos por la misma. Manteniéndose cerca de un punto crítico, lejos del equilibrio, estos sistemas se caracterizan por tener una probabilidad máxima de generación de estructura.

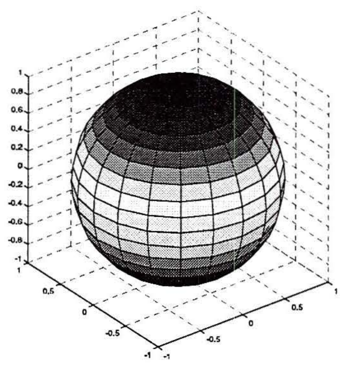
A continuación se presentan algunas de las formas geométricas observadas en la naturaleza, según los criterios de clasificación expuestos anteriormente, y además de ellos agregando en cada par la ***frecuencia*** teniendo en cuenta como criterio "Lo más común en lo diverso".

---

[10] Dentro de estos sistemas se conocen los sistemas disipativos (Nicolás, Prigogine), sistemas sinergéticos (Haken), sistemas autopoiéticos (Maturana y Varela) o auto-organizados en estado crítico (Bak).

2.2. La esfera

Gráfica 1. La esfera con norma Euclidiana[11]



Una esfera es la superficie[12] formada por todos los puntos del espacio tales que la distancia (llamada *radio*) a un punto determinado, denominado centro, es siempre la misma. También se refiere al sólido, cuyo volumen[13] se haya contenido en la superficie anterior; con este significado se emplea específicamente la palabra *bola*[14]. La esfera es la figura geométrica que para la misma cantidad de volumen presenta una superficie externa menor. Esta propiedad es la causa de su omnipresencia en el mundo físico.

La ecuación y por ende la forma de una esfera depende de la métrica con la cual se esté trabajando, en efecto: En un

---

11 Este gráfica ha sido realizada en Matlab con las siguientes instrucciones: sphere,axis square.

12 La superficie de una esfera de radio, r, es $S = 4\pi r^2$.

13 El volumen de una esfera de radio, r, es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. También el volumen en capas de espesor arbitrariamente pequeño dr, y los volúmenes de estas capas se aproximan a bien puede verse como: se puede descomponer $S(r) \cdot dr$ cuando dr tiende hacia cero. Sumando los volúmenes (infinitesimales) de todas estas capas (en cantidad infinita) cuando el radio *r* varía de cero a *R* da por definición la integral siguiente: $V(R) = \int_0^R S(r)dr$.

14 Se resalta la palabra bola, pues más adelante el lector podrá darse cuenta de que la forma depende de la métrica que haya sido definida. No siempre las bolas son redondas.

sistema de coordenadas ortonormado (ortogonal y unitario), la ecuación de la esfera unitaria (de radio 1) centrada en el origen es: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Más generalmente, la esfera de radio r, de centro (a, b, c) tiene como ecuación:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

Si consideráramos las esferas en otras métricas, podríamos generalizar la noción de esfera en cualquier espacio métrico[15] (E,d) así: la esfera de centro ***a*** y de radio ***r*** es el conjunto:

$S(a,r)= \{\chi \in E, d(a, \chi) = r\}$ y la bola correspondiente es
$S(a,r)= \{\chi \in E, d(a, \chi) \leq r\}$

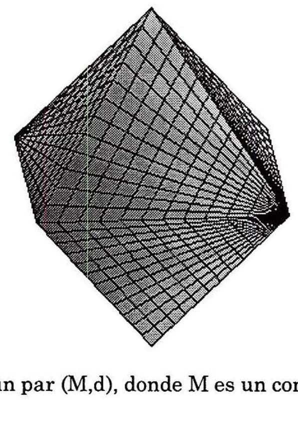
Si nos restringimos al espacio real tridimensional, con distancias provenientes de distintas normas, las esferas unitarias tendrían la siguiente representación:

Para un vector $u(\chi, \vec{y}, z)$ cualquiera, se definen las normas siguientes:

$$\|\vec{u}\|1 = |x| + |y| + |z|$$

S(O, 1) es un octaedro regular tal como el que se muestra en la figura No. 1

FIGURA 2. OCTAEDRO REGULAR



[15] Un espacio métrico es un par (M,d), donde M es un conjunto cualquiera y d es una aplicación.

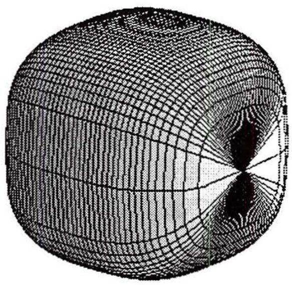
$$||\vec{u}||_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Se trata de la norma euclidiana, luego S(O, 1) es la esfera usual.

$$||\vec{u}||_3 = \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3 + |z|^3}$$

S(0,1) es una especie de forma intermedia entre la esfera usual y el cubo

FIGURA 2. CUBO ESFERA



$||\vec{u}||_\infty = max(|x|, |y|, |z|)$ S(0,1) es un cubo [M.Romero Schmidtke,]

Aún matemáticamente no puede hablarse de una representación única para la esfera, ya que ésta depende de la métrica, la cual a su vez define una topología o lo que es lo mismo define una geometría específica.

Concentrándonos en un análisis frecuencial de las formas, es indudable que la esfera está presente en casi todas las formas vivas, posee simetría circular (isotropía). Su característica fundamental es la proteger. Si la vida se originó en el agua y ésta individualmente es esférica, es lógico suponer que los primeros organismos adaptasen su forma a ella. La esfera es la forma más equilibrada del universo, es la forma que mejor preparada está para soportar la presión ejercida por el medio ambiente. En la superficie de una gota de un líquido inmerso en un ambiente gaseoso o también líquido (pero con líquidos que no se pueden mezclar), existen fuerzas superficiales que deformarán la gota hasta encontrar el valor mínimo de tensión en todos los puntos de la misma, y este mínimo corresponde a una esfera, en ausencia de toda perturbación exterior.

La forma de un objeto puede ser una imposición de su entorno: en condiciones de perfecta isotropía, lo más probable es una esfera. Es una necesidad. Pero si la forma necesaria pertenece a un ser vivo, entonces ésta puede verse, además, reforzada por la selección natural: los huevos de todos los animales derivan de la esfera, la forma que expone la mínima superficie al exterior, por ende retrasa la pérdida de calor y la hace más difícil de ser mordida. Superar el examen de la selección significa ganar función.

La forma esférica es la que mejor resiste la presión del medio, pero no por eso todas las formas de la naturaleza se quedaron con ella. La esfera es la forma más resistente, pero la más elemental. Básicamente una bolita a la deriva, a medida que comienza a crecer y adquirir mayor masa, comienza a sentir los efectos de la gravedad que tiende a detenerlo, y se siente obligado a desarrollar una estructura que le permita crecer y desplazarse a voluntad.

Las esferas viajan por el universo modificándose. Al momento que tiene una dirección, el atrito con el medio le da un eje, y sobre ese eje interactúan fuerzas, modificando su forma. La fuerza resistiva del medio la lleva a una elipse, a una especie de huevo. La esfera en movimiento deja de ser esférica para formar una gota o huevo cuando atraviesa el medio, o un disco cuando flota en él.

La rotación y el eje continuaron prevaleciendo, pero las variables de velocidad y distancia de los planetas al Sol, llevaron a Isaac Newton a calcular la relación que existe entre ambas y así elaborar su célebre ecuación de la fuerza de gravedad. La idea de un cielo perfecto se desmoronaba para dar lugar a una geometría variable por la interacción con el medio.

La dualidad forma-función obliga a una forma a evolucionar a otra más apropiada para el desplazamiento. Una vida esférica es una existencia sin dirección, mientras que el moverse por sí mismo es una decisión, se direcciona el movimiento hacia algo.

La esfera en movimiento asume una dirección que trazará un eje de simetrías por el que diferenciará su crecimiento. La idea de movimiento hace referencia a las transformaciones que transforman figuras (puntos, rectas, planos, semiplanos, etc.) en otros de la misma clase, a estos últimos se les llama "homólogos de los primeros en la transformación". Hay que tener en cuenta que los mismos, transforman un punto que pertenece a una recta, en otro punto que pertenece a la recta homóloga. Esto se puede ver, cuando se piensa que si movemos una caja, que tiene un dibujo, el mismo seguirá en la caja al terminar de moverlo.

La esfera, sólo sería posible (perfecta) en un medio donde todas las fuerzas actuantes estuviesen en perfecto equilibrio; de lo contrario no lo será.

La esfera permanece en la memoria del universo, y obliga al movimiento a tornarse esférico, pero ella sólo existe en un instante del tiempo.

2.3. El pentágono

El pentágono regular[16] es un polígono de cinco lados iguales y cinco ángulos iguales. Esta figura geométrica posee propiedades tales como: Todos sus ángulos internos miden 108°. Partiendo del centro, al repartir la circunferencia entre 5 lados, tenemos 72°.

Uniendo los vértices del pentágono, se obtiene un pentagrama, -estrella de cinco puntas- inscrito en él, tal forma se puede observar en la figura No. 4. En el centro, quedará otro pentágono regular, con lo que el proceso de inscribir pentagramas en los sucesivos

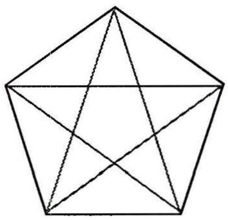
---

d: $\mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathbf{M}$,
que cumple tres propiedades:
a) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$
b) $d(x,y) = d(y,x)$
c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

[16] El área de esta figura se calcula mediante la fórmula: Área del pentágono = (perímetro*apotema) / 2.
Perímetro
Siempre que supongamos que el pentágono tiene lado $a = 2r_u \cos(54)^0$
O también: $a = r_u\sqrt{5-\sqrt{5}/2}$

pentágonos que se vayan generando, matemáticamente, no tiene fin. De otro lado al inscribir en un pentágono regular un pentagrama, se puede observar la razón áurea entre las longitudes de los segmentos resultantes.

FIGURA 3. PENTAGRAMA



Se forma un pentagrama desde un pentágono extendiendo un segmento entre todos los pares de vértices no adyacentes. La proporción entre los lados del pentágono y la longitud de las líneas del pentagrama tiene un factor de $\phi + 1$, o por el contrario $2 - \phi$, donde $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, es la famosa razón dorada. Esta figura tiene otras proporciones relacionadas indirectamente con la razón dorada.

El número áureo, también denominado sección áurea, razón áurea o dorada, media áurea, divina proporción o número de oro, representado por la letra griega ϕ ***fi***, es el número irracional:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398874989\ldots$$

Se trata de un número que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como "unidad" sino como relación o proporción entre partes de un cuerpo o entre cuerpos, que encontramos en la naturaleza y en la morfología de diversos elementos tales como caracolas, nervaduras de las hojas de algunos árboles, el grosor de las ramas (el grosor de una equivale a ϕ tomando como unidad la rama superior), proporciones humanas, etc.

Los pitagóricos, que definían los números como expresiones de proporciones (y no como unidades, tal y como hoy es común), creían que la realidad es numérica y que esta proporción expresaba una verdad fundamental acerca de la existencia. Fueron estas cualidades las que más tarde le atribuyeron el adjetivo de divina o de oro en el Renacimiento.

Existe la relación del número áureo también en el pentáculo, un símbolo pagano, más tarde acogido por la iglesia católica para representar a la virgen María, y también por Leonardo Da Vinci para asentar en él al hombre de Vitruvio[17]. En el dibujo el cuadrado está centrado en los genitales y el círculo en el ombligo. La relación entre el lado del cuadrado, y el radio del círculo es la razón áurea. El dibujo también es a menudo considerado como un símbolo de la simetría básica del cuerpo humano y, por extensión, del universo en su conjunto. (Zollner: 2004, pág 74)

Teniendo en cuenta la gran simetría de este símbolo se observa que dentro del pentágono interior es posible dibujar una nueva estrella, hasta el infinito. Del mismo modo, es posible dibujar un pentágono por el exterior, que sería a su vez el pentágono interior de una estrella más grande, esto no es más que la confirmación de la representación matemática utilizando las fracciones continuas, mediante raíces anidadas

$$\phi = \sqrt{1+\phi} \rightarrow \phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

Al medir la longitud total de una de las cinco líneas del pentáculo interior, resulta igual a la longitud de cualquiera de los brazos de la estrella mayor, o sea ϕ[18].

---

[17] El Hombre de Vitruvio es un famoso dibujo acompañado de notas anatómicas de Leonardo da Vinci, realizado alrededor del año 1492 en uno de sus diarios. Representa una figura masculina desnuda en dos posiciones sobreimpresas de brazos piernas e inscrita en un círculo y un cuadrado. También se conoce como el canon de las proporciones humanas. Recibe su nombre de un estudio de las proporciones del cuerpo humano, realizado a partir de los textos del arquitecto de la antigua Roma Vitruvio.

[18] Este es un número irracional y además es el único número real positivo que satisface que $\phi^2 = \phi + 1$

Cada una de las propiedades anteriores nos confirma matemáticamente que de los polígonos regulares, el más simple que se reproduce a sí mismo es el pentágono. En las flores su aparato reproductor femenino (gineseo) se encuentra en su centro y es allí donde se replica su forma a través de la semilla. En los animales superiores, inclusive en el hombre, su forma se reproduce en el centro de su cuerpo.

En la naturaleza, hay muchos elementos relacionados con la sección áurea:

- Según el propio Leonardo de Pisa Fibonacci, en su *Libro de los ábacos (Fibonacci:* 1202*)*, la secuencia puede ayudar a calcular casi perfectamente el número de pares de conejos *n* meses después de que una primera pareja comienza a reproducirse (suponiendo que los conejos se empiezan a reproducir cuando tienen dos meses de edad)
- La relación entre la cantidad de abejas macho y abejas hembra en un panal
- La relación entre la distancia entre las espiras del interior espiralado de cualquier caracol (no sólo del nautilus)
- Las relaciones entre las partes del cuerpo de los humanos, los insectos, las aves y otros animales:
    - La relación entre la altura de un ser humano y la altura de su ombligo
    - La relación entre la distancia del hombro a los dedos y la distancia del codo a los dedos
    - La relación entre la altura de la cadera y la altura de la rodilla
    - La relación entre las divisiones vertebrales
    - La relación entre las articulaciones de las manos y los pies

La sección áurea también se ha aplicado bellamente en el arte, son múltiples sus aplicaciones en arquitectura, construcción, música y pintura. Ejemplos de estas aplicaciones son:

- Relaciones arquitectónicas en las pirámides de Egipto
- La relación entre las partes, el techo y las columnas del Partenón en Atenas
- En los violines, la ubicación de las efes (los "oídos", u orificios en la tapa) se relaciona con el número áureo
- El número áureo aparece en las relaciones entre altura y ancho de los objetos y personas que aparecen en las obras de Miguel Ángel, Durero y Da Vinci, entre otros. (Zollner: 2004, pág 93)
- En las estructuras formales de las sonatas de Mozart, en la Quinta Sinfonía de Beethoven, en obras de Schubert y Debussý. Estos compositores probablemente compusieron estas relaciones de manera inconsciente, basándose en equilibrios de masas sonoras

Las flores se presentan en una enorme cantidad de formas y colores, pero si hacemos una estadística de ellas veremos que en su mayoría inician su expansión en la misma geometría pentagonal que, si no se observa en los pétalos, se presenta en los sépalos que las sostienen. La disposición de los pétalos de las flores, está directamente relacionada con el número áureo en la relación que en botánica recibe el nombre de Ley de Ludwing. Una relación similar se observa en la distribución de las hojas en un tallo, entre las nervaduras de las hojas de los árboles, entre el grosor de las ramas principales y el tronco, o entre las ramas principales y las secundarias (el grosor de una equivale a Φ tomando como unidad la rama superior).

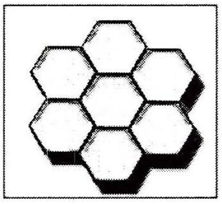
Las plantas más evolucionadas son las angiospermas que desarrollaron infinidad de flores, pero de su gran variedad podemos reconocer su predominio de simetría pentagonal; así mismos frutos de origen tan variado, como por ejemplo la piña o el banano, se expanden de un pentágono; cíclicamente surgen las hojas del centro hacia afuera formando grupos de cinco sin hacerse sombra o colisionar entre sí[19], en una armonía tal que les permite llegar a

[19] Recalcamos nuevamente el par Forma-Función, particularmente en algunos de los frutos mencionados esta función se denomina la filotaxia.

la mayor distancia en el menor tiempo para poder recoger la mayor cantidad de luz solar.

2.4. El hexágono

Figura 4. Panales de abejas



En geometría, un hexágono o exágono es un polígono de seis lados. El hexágono[20] regular tiene las siguientes propiedades: Todos sus ángulos miden 120º, está íntimamente relacionado con los triángulos equiláteros ya que uniendo cada vértice con su opuesto, el hexágono regular queda dividido en seis triángulos equiláteros, si numeramos los vértices de 1 a 6 siguiendo las agujas del reloj y unimos los vértices impares se obtiene un triángulo equilátero; uniendo los vértices pares se obtiene otro.

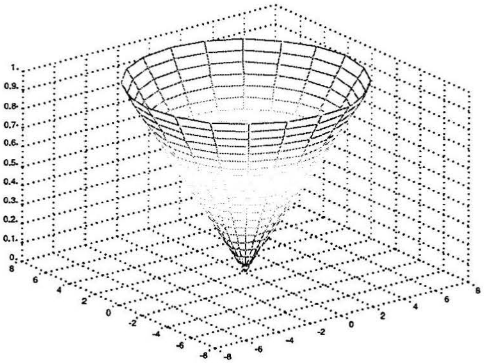
Se puede empapelar el plano con hexágonos sin dejar ningún hueco, además se puede trazar empleando únicamente regla y compás.

Las esferas compiten debido a su gran frecuencia y, por compresión, se transforman en hexágonos. Dicha pauta aparece en los nidos de abejas y avispas, en los ojos facetados de los insectos, en las pieles, caparazones y esqueletos, en todo tipo de pavimentos. Formar mosaicos es la mejor forma de recubrir superficies planas. Aparece como una compresión de esferas; un círculo admite otros seis iguales y tangentes a él mismo. Cuando se comprimen, el espacio intersticial se esfuma, y surgen los hexágonos de ahí la función asignada: el hexágono pavimenta.

[20] La superficie se obtiene calculando (Perímetro*Apotema) / 2.

2.5. El cono

Gráfica 2. Cono en coordenadas cilíndricas[21]



Un cono, en geometría elemental es un sólido formado por la revolución de un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos. Al disco generado por el cateto opuesto se le llama base y al punto del lado opuesto se le llama vértice.

El término cono se puede extender para denominar formas más generales, por ejemplo el cono elíptico se obtiene al cambiar la base por una elipse. En este caso el cono elemental se llama cono circular recto.

El cono[22] se representa en un sistema de coordenadas cartesianas mediante la ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

El ángulo penetra porque todo lo que se aplica (fuerzas, partículas, sustancias) en su región más amplia se concentra a medida que nos acercamos a la punta. Por ello, el mundo vegetal

---

21 Esta gráfica se ha realizado en Matlab con las siguientes instrucciones: $t=0:\frac{pi}{10}:2\cdot pi;$
$[x, y, z] = cylinder\ (t)$
$mesh\ (x, y, z)$

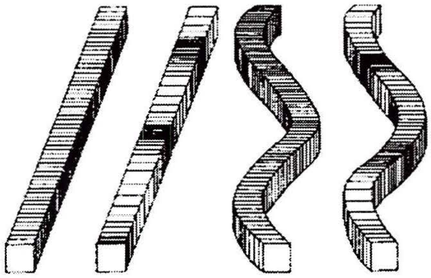
22 El volumen V del cono de radio r y altura h es 1/3 del volumen del cilindro con las mismas dimensiones: $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

y animal ha inventado puntas de mil maneras distintas porque la defensa es una buena forma de asegurar la independencia.

El cono brilla en dientes, picos, hocicos, espinas, puntas, embudos, herramientas. El ángulo transmite todas las fuerzas hacia el vértice y allí se concentran: el cono penetra.

2.6. La onda

Figura 5. Ondas sísmicas



(Tomado de www.ilustrados.com/)

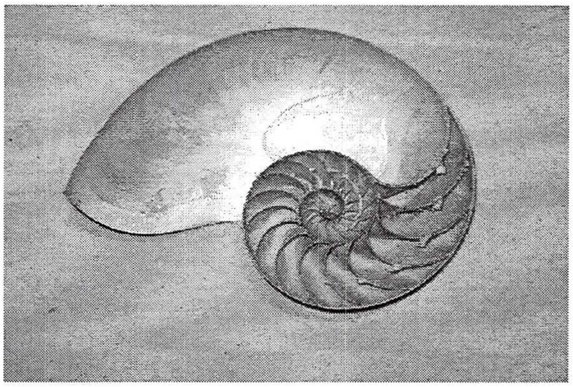
La onda mueve una señal sin mover materia. La onda es la idea más simple para mover un objeto material en el seno de un fluido. La movilidad es una función de la materia viva para mantener o ganar independencia con respecto al medio.

Tanto en el agua como en la tierra los animales se desplazan en el plano horizontal. En la mayoría de los invertebrados y en todos los vertebrados, el tubo digestivo coincide con el eje de simetrías, y éste mayormente con el desplazamiento.

La onda se dibuja en el movimiento de gusanos (ondas longitudinales), reptiles y peces (ondas laterales), mamíferos acuáticos (ondas verticales); la onda mueve bien la materia y mueve la información sin desplazar la materia: la onda comunica. El sonido se produce gracias a un movimiento ondulatorio en un medio elástico (aire), la música, la voz.

2.7. LA ESPIRAL

FIGURA 4. CONCHA NAUTILIUS



(Tomada de www.formación.pntic.mec.es)

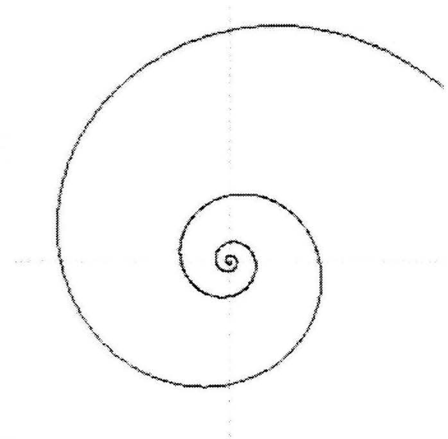
La espiral empaqueta porque es una manera de crecer ocupando poco espacio. Es frecuente que se dé esta forma en la materia viva porque la selección natural favorece dos propiedades aparentemente contradictorias: por un lado, ser grande para tener menos enemigos y más inercia y, por otro, ocupar poco espacio para tener más movilidad y, por lo tanto, tener mayor independencia respecto del medio.

La espiral es un círculo que emigra del plano que lo contiene, permite crecer sin ocupar espacio, es la manera de crecer sin derramarse por el espacio (volumen-espacio). La espiral se exhibe en cuernos, conchas, flores, trompas y colas en reposo, rollos de mil clases.

Si observamos la concha del nautilius de la Figura No. 4 entre más nos alejamos del centro, la espira se va haciendo cada vez más ancha. Y este aumento de la anchura se produce de una manera continua y uniforme. Esta espiral es la que más se prodiga en la Naturaleza. Si indagamos un poco sobre esta curiosa forma y damos un corte transversal a la concha veremos que está formada por compartimientos separados por tabiques y comunicados por un sifón. El animal ocupa el compartimiento más externo, que es de mayor tamaño. Al ir creciendo el molusco abandona el compartimiento anterior y crea uno con la misma forma, pero más grande.

Su borde exterior describe una curva que es siempre igual a sí misma, como la que se puede ver en la espiral logarítmica o equiangular que se exhibe en la figura No. 5:

FIGURA 5. ESPIRAL EQUIANGULAR[23]



El origen del estudio de esta espiral tiene que ver con la navegación. A lo largo de los siglos XVI y XVII miles de barcos surcan los océanos. Los navegantes sabían que sobre la superficie terrestre la distancia más corta entre dos puntos es un arco de círculo máximo[24]. Pero para seguir un rumbo que encaje con este arco es necesario realizar continuos cambios de rumbo. Por ello, sustituían este rumbo óptimo por otro en el ángulo que formaba

---

[23] Descartes también demostró que esta condición es equivalente al hecho de que los ángulos alrededor del polo son proporcionales al logaritmo del radio vector. De ahí su segundo nombre: Espiral Logarítmica.

[24] Para mayor información puede consultarse la página: www.formación.pntic.mec.es/web_espiral/matematicas.

la trayectoria del barco con todos los meridianos que atravesaba. El rumbo se mantenía constante.

Los rumbos de este tipo dibujan en la esfera terrestre una curva llamada loxodrómica. Pero los navegantes no trabajaban sobre una esfera, sus mapas eran planos, proyecciones de la esfera. Pues bien la proyección de la esfera sobre un plano convierte a la loxodrómica en una **espiral equiangular**[25].

Aunque este nombre se lo debemos a Jacob Bernouilli, quien la estudió en profundidad, quedando cautivado por esta espiral hasta el punto de dejar escrito en su testamento que en su lápida debería figurar una espiral logarítmica con la inscripción "Eadem mutata resurgo" - Resurjo cambiada pero igual -.

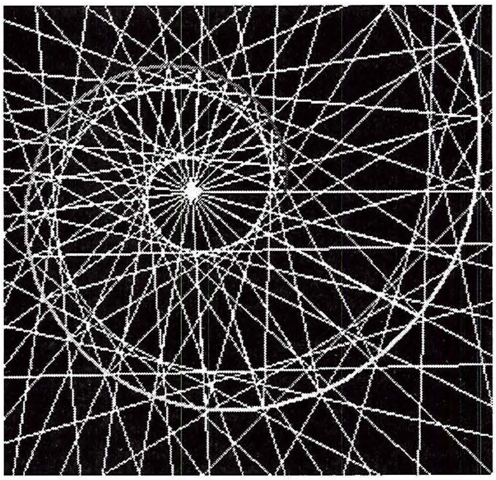
La separación de las espiras aumenta al crecer el ángulo, es decir, el radio vector crece de forma exponencial respecto del ángulo de giro. Por eso recibe un tercer nombre, espiral geométrica, su ecuación es de la forma: $r = ce^{k\theta}$, donde r es el radio de posición, C y k son constantes y theta el ángulo de giro. Si expresamos esta ecuación en forma logarítmica obtendríamos: $\theta = \frac{1}{k}\log\left(\frac{r}{C}\right)$, esto es, el ángulo es proporcional al logaritmo del radio.

Definitivamente, cuesta trabajo decidirse por uno de los tres nombres de la espiral. Cada uno de ellos la define matemáticamente de forma precisa, mediante una de sus propiedades.

Su construcción se puede observar en la figura No. 6, trazando sucesivos triángulos rectángulos semejantes, de tal forma que la hipotenusa de uno es un cateto del siguiente; y uniendo los vértices consecutivos. Esta construcción se basa en una propiedad ya descubierta por Bernouilli: mientras el ángulo de giro crece en progresión aritmética –sumando siempre la misma cantidad– , el radio correspondiente crece en progresión geométrica –multiplicando siempre el radio anterior por un mismo número–.

[25] Matemáticamente, incluyéndola en la categoría de curvas mecánicas, es decir aquellas cuya ecuación no es un polinomio, fue descrita por primera vez por Descartes, que en 1638 estaba buscando una curva creciente con una propiedad similar a la de la circunferencia, que la tangente, en cada punto, corte la radio vector siempre con el mismo ángulo. De ahí el nombre de equiangular.

FIGURA 6. ESPIRAL GEOMÉTRICA



(Tomada de: www.formación.pntic.mec.es)

La propia construcción de esta espiral nos sugiere el motivo de su abundante presencia como forma que rige el crecimiento de numerosos organismos vivos. Las dos ideas que inspiran este crecimiento son las de rotación más dilatación. Crecimiento aditivo autosemajante con enrollamiento.

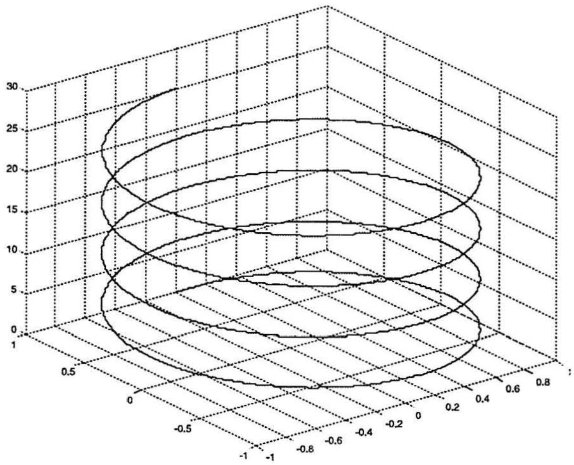
Nos explicamos ahora por qué las conchas de muchos caracoles vistas frontalmente forman espirales logarítmicas: al fin y al cabo no les queda más remedio que crecer siendo siempre iguales a sí mismos.

Pero es el reino vegetal el que nos muestra los ejemplos más generosos de este tipo de espirales. Las espirales que hemos visto en los girasoles, las margaritas y muchas otras flores, las piñas son espirales equiangulares o logarítmicas.

El agua es atraída por gravedad hacia el centro del planeta, cuando sacamos el tapón de la pileta de lavar, el agua forma una espiral logarítmica para drenar por el agujero.

2.8. La hélice

GRÁFICA 10. HÉLICE[26]



La hélice agarra cuando existe fricción entre el elemento helicoidal y otro cuerpo. La fuerza de tracción que hay que hacer para vencer la fricción entre un elemento helicoidal y otro cuerpo crece de manera exponencial con el número de vueltas. La inmovilidad puede suponer supervivencia respecto de muchos sucesos azarosos del entorno, por lo que la selección natural ha favorecido la hélice para todo tipo de agarres desde las lianas hasta los huevos de tiburón pasando por las colas de ciertos animales o zarcillos de plantas carnívoras. [Wagensberg, 2005]

Emigra el plano vertical. Agarra. La hélice se usa en todo tipo de anclajes: lianas, zarcillos, colas y trompas en uso, fibras, cabellos, cuerdas, tornillos. Según la ley de Euler, en Física, la resistencia a la tracción crece exponencialmente con el número de vueltas que entran en fricción: La hélice agarra.

---

[26] Graficamos en Matlab la función $r(t) = (sen(t), cos(t), t)$ $0 < t \leq t8\pi$ $r(t) = (sen(t), cos(t), t)$ $0 < t \leq t8\pi$ con las siguientes instrucciones: $t = linspace$ (0,8 * pi, 10000) $t = linspace$ (0,8 * pi, 10000) $plot3$ (sin(t), $cos(t)$, t) $lot3$ (sin(t), $cos(t)$, t)

En los organismos vivientes ocurren innumerables procesos que dan cuenta de un orden, la molécula de ADN, es un ejemplo de ellos, está constituida por dos largas cadenas de nucleótidos unidas entre sí formando una doble hélice. Las dos cadenas de nucleótidos que constituyen una molécula de ADN, se mantienen unidas entre sí porque se forman enlaces entre las bases nitrogenadas de ambas cadenas que quedan enfrentadas. La unión de las bases se realiza mediante puentes de hidrógeno, y este apareamiento está condicionado químicamente de forma que la adenina (A) sólo se puede unir con la Timina (T) y la Guanina (G) con la Citosina (C). Esta doble hélice determina una estructura compleja que establece a nivel molecular el orden de las reacciones enzimáticas. [Bertalanffy, 1994, pág 145]

2.9. La catenaria

La catenaria[27] es la curva que describe una cadena ideal perfectamente flexible, con masa, suspendida por sus extremos y sometida a la acción de un campo gravitatorio uniforme. Esta forma es la óptima para distribuir las fuerzas estructurales internas del arco. Cadenas y cables suspendidos entre dos puntos cuelgan formando una catenaria.

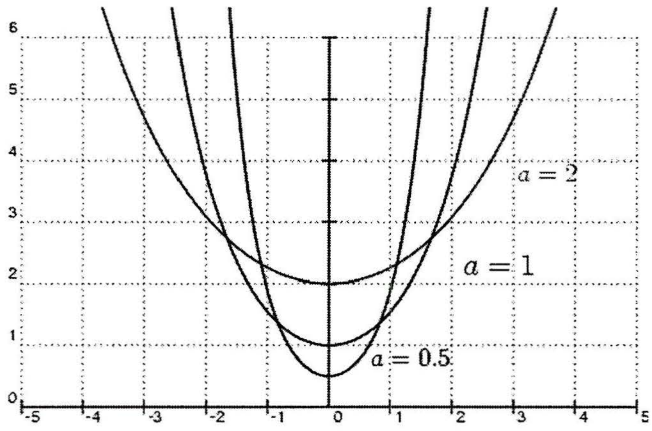
La ecuación de la catenaria, tomando su mínimo en el punto (0,a) es: $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ $y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ En la cual: $a = \frac{T}{p} a = \frac{T}{p}$ $\frac{T}{p} a = \frac{T}{p}$ donde T es la componente horizontal de la tensión, que es constante, y P es el peso por unidad de longitud del hilo.

Si se desarrolla en series de Taylor la función cosh(x) se obtiene:
$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + 0^4(x) \cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + 0^4(x)$ que corresponde a la ecuación de una parábola más un término de 4° orden. Es por este motivo

[27] La palabra deriva del latín catenarĭus, propio de la cadena.

que las gráficas son tan parecidas en el entorno de cero como se puede apreciar en la figura No. 7

FIGURA 7. CATENARIA PARA DIFERENTES VALORES DE A

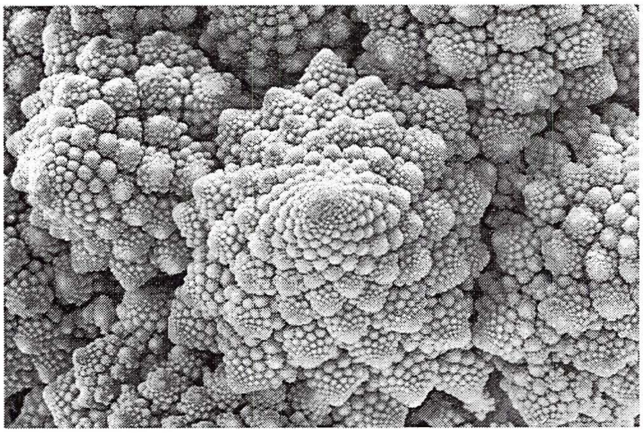


(Tomada de www.genciencia.com)

La forma que toma un cable que esta tendido de dos postes a la misma altura, es la de una catenaria. Asimismo, la curva catenaria es la que describe una cuerda, cable o hilo, de longitud finita y densidad constante sostenido por dos puntos; por ejemplo, es la curva que describe un cable eléctrico entre dos apoyos o postes, de ahí el gran uso de catenarias en la vida cotidiana. Se encuentran catenarias desde la distribución de cableado de alta tensión (ferrocarriles, redes eléctricas, puentes) hasta en la arquitectura ya que una curva catenaria invertida es el trazado perfecto para que un arco se mantenga en equilibrio, uno de los arquitectos famoso por el uso de estas curvas fue el arquitecto español Antonio Gaudí.

2.1. El fractal

Gráfica 11. Brócoli fractal



(Tomado de www.mengambrea.com.coliflor-fractal.html)

Para la Geometría Euclidiana, un objeto con una dimensión igual a cero, corresponde a un punto aislado; por otro lado, una dimensión igual a la unidad corresponde a una recta, y para el caso de un cubo, su dimensión sería igual a tres. Pero en la naturaleza se encuentran ciertas figuras cuya geometría describe valores no enteros de su dimensión. Más bien, a valores fraccionarios (1/2, 3/2, 5/2, por ejemplo) o a un número irracional (ln 20/ln 3, por ejemplo). Es obvio que este hecho escapa a la percepción simple que se tiene del universo que nos rodea, pues no resulta fácil tener una idea de una figura geométrica con una dimensión que está entre 1 y 2, por citar sólo un ejemplo. A estas figuras con dimensión fraccionaria se les conoce con el nombre de "fractales"[28]

[28] El descubrimiento de estas figuras se debe al trabajo de los matemáticos Benoit Mandelbrot y Gaston Maurice Julia.

Un fractal puede ser descrito como un ente geométrico distinto, o más específicamente, como un ente geométrico infinito; es decir, que su superficie o área posee un valor fijo (finito), pero su perímetro o longitud es infinito, es decir que no posee límites.

Es importante recalcar que este tipo de representaciones geométricas, se generan a través de un proceso de iteración[29] de un patrón geométrico establecido como fijo. Un fractal es un objeto que exhibe recursividad, o autosimilitud a cualquier escala. En otras palabras, si enfocamos una porción cualquiera de un objeto fractal (imaginemos que utilizamos un magnificador, o hasta un microscopio, para ello) notaremos que tal sección resulta ser una réplica a menor escala de la figura principal.

Los fractales son una buena idea para acceder a un gran número de puntos del espacio con continuidad. Las plantas (los helechos, la coliflor, milenrama) son fractales por fuera y los animales y el hombre lo son por dentro: los fractales *rellenan*. Las formas fractales van bien para captar materiales como el agua, el aire, las sustancias nutritivas. Los humanos somos fractales por dentro (sistema nervioso, sistema circulatorio, los conductos de los pulmones) y los árboles lo son por fuera (ramas, raíces).

Hay muchos objetos en la naturaleza que debido a su estructura o comportamiento, son considerados fractales naturales aunque no se les reconozca como tales de primera instancia. Las nubes, las montañas, las costas, los árboles y los ríos son fractales de este tipo; se diferencian de sus contrapartes matemáticos por ser entidades finitas en vez de infinitas. Ejemplos adicionales de fractales son el mercado de valores y el crecimiento poblacional.

[29] La iteración puede describirse como un mecanismo de retroalimentación, que se repite un número n de veces. Esto se refiere, por ejemplo, al acto de utilizar un valor inicial en el cálculo de cierta función, y luego tomar el producto, o resultado, como valor inicial para el próximo cálculo de esa misma función. Dicha operación puede repetirse indefinidamente (incluso infinitamente). Cualquier proceso semejante tendrá como resultado un fractal.

3. Conclusiones

El sentido geométrico está presente en la totalidad de las matemáticas de ayer y de hoy, lo cual es una consecuencia del carácter eminentemente visual y espacial de una gran porción de nuestra intelección matemática y dada nuestra tendencia manifiesta a aclarar nuestras ideas más abstractas de una forma intuitiva y gráfica.

Aún matemáticamente no puede hablarse de una representación única para muchos objetos de la naturaleza. En efecto, se ha visto que la representación matemática de una esfera y de muchos otros cuerpos geométricos depende de la métrica, la cual a su vez define una topología o lo que es lo mismo define una geometría específica.

Concentrándonos en un análisis frecuencial de las formas, es indudable que la *esfera* está presente en casi todas las formas vivas. Su característica fundamental es la de *proteger*.

De otro lado, de los *polígonos regulares*, el más simple que se *reproduce a sí mismo* es el pentágono; en las flores su aparato reproductor femenino (gineseo) se encuentra en su centro y es allí donde se replica su forma a través de la semilla. En los animales superiores, inclusive en el hombre, su forma se reproduce en *el centro de su cuerpo*.

Cuando se comprime una esfera, el espacio intersticial se esfuma, y surgen los hexágonos de ahí la función asignada: *el hexágono pavimenta*.

El ángulo transmite todas las fuerzas hacia el vértice y allí se concentran: *el cono penetra*.

La espiral empaqueta porque es una manera de crecer ocupando poco espacio.

La fuerza de tracción que hay que hacer para vencer la fricción entre un elemento helicoidal y otro cuerpo crece de manera exponencial con el número de vueltas. *La hélice agarra. La onda mueve.*

Así mismo, usando *la catenaria* se encuentra la forma óptima para distribuir las fuerzas estructurales internas del arco. Por último, *los fractales* son una buena idea para acceder a un gran número de puntos del espacio con continuidad; pero sin duda la gran característica de ellos es que coevolucionan, autoaprenden y conservan jerarquías a diferentes escala. Un fractal es un objeto que exhibe recursividad, o autosimilitud, a cualquier escala.

BIBLIOGRAFÍA

BERTALANFFY, Ludwing Von. Teoría General de los Sistemas. México: Fondo de Cultura Económica 1994. 311 páginas.

DE GUZMÁN, Miguel. Los Pitagóricos. Madrid: Universidad Complutense de Madrid 1990.

EINSTEIN, Albert. El significado de la relatividad. Bogotá: Editorial Planeta Agostini 1986.

HACYAN, Shahen. Relatividad para principiantes. México: Fondo de Cultura Económica 1995.

MARTÍNEZ, Antonio. Sobre la historia de la Matemática en Valencia y en los países del Mediterráneo. Valencia: Editorial Universidad de Valencia.1998.

ROMERO SCHMIDTKE, M. Artículo de la Enciclopedia Libre Universal en Español.

RUSSELL, Belthand. El conocimiento humano. Barcelona: Editorial Orbis S.A 1983.

WAGENSBERG, Jorge. La emergencia de las formas de la naturaleza. En: Programa Barcelona- Medellín. Parque Explora, 2005. Septiembre 1; Medellín: Secretaría de Cultura Ciudadana.

______________.Ideas sobre la complejidad del mundo. Barcelona: Metatemas. Tusquets Editores 2003.

______________. Si la naturaleza es la respuesta. ¿Cuál era la pregunta?: Y otros quinientos pensamientos sobre la incertidumbre. Madrid: Tusquets Editores 2002.

_______________. La rebelión de las formas. Barcelona: Editorial Tusquets, 2004. 336 páginas.

ZOLLNER, Frank. Leonardo da Vinci II. Sketches and drawings. New York: Taschen 2004. 207 páginas.

www.wikipedia.com
wikipedia enciclopedia libre. René Descartes.
[www.wikipedia.org/wiki/descartes]
Acceso marzo 7/07

Imágenes google. Fractales
[http://img.teoriza.com/gonzo/brocoli-verdura-fractales.jpg]

Formación del profesorado. La Espiral
[http://www.formación.pntic.mec.es] Acceso nov.12/06