

Geometrie non euclidee e teorie fisiche

Marco Pedroni
Università di Bergamo

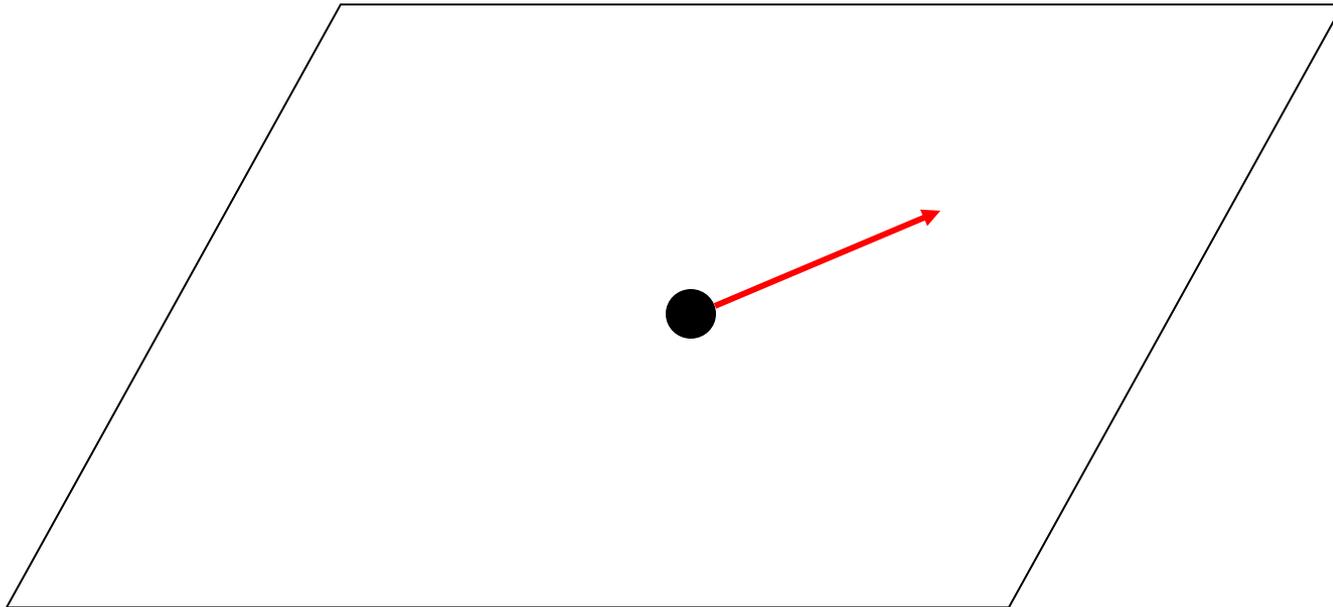
Galileo Galilei, Il Saggiatore, Cap. VI:

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

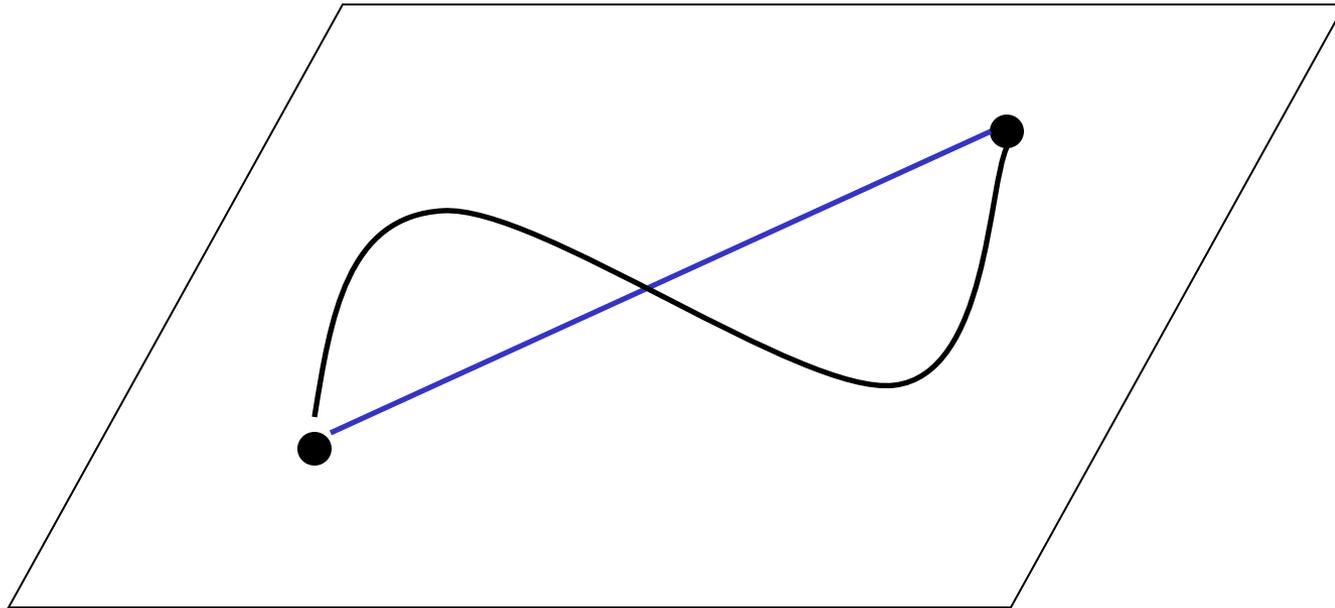
Sommario

- A spasso per una superficie (ossia, moti per inerzia di un punto materiale su una superficie liscia)
- Breve storia delle geometrie non euclidee
- Relatività ristretta
- Relatività generale
- Onde gravitazionali

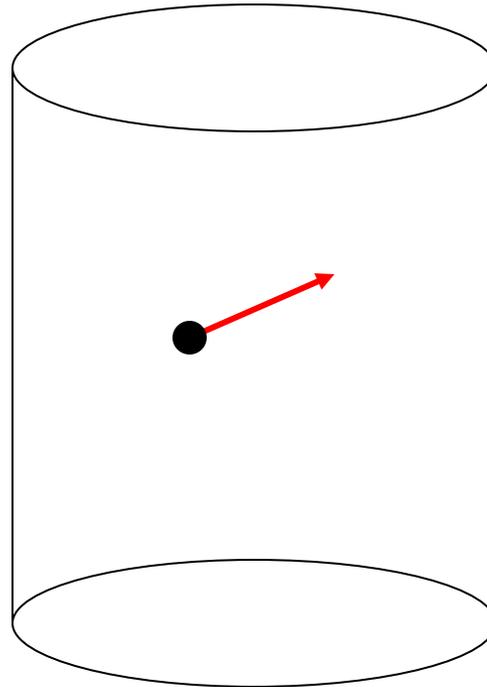
A spasso per il piano



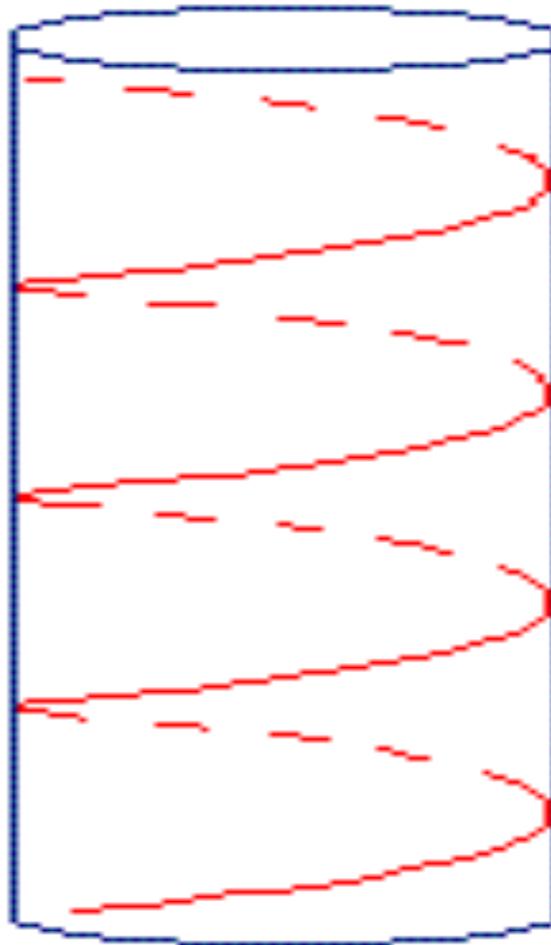
Fatto importante: le traiettorie
(rette) minimizzano la distanza



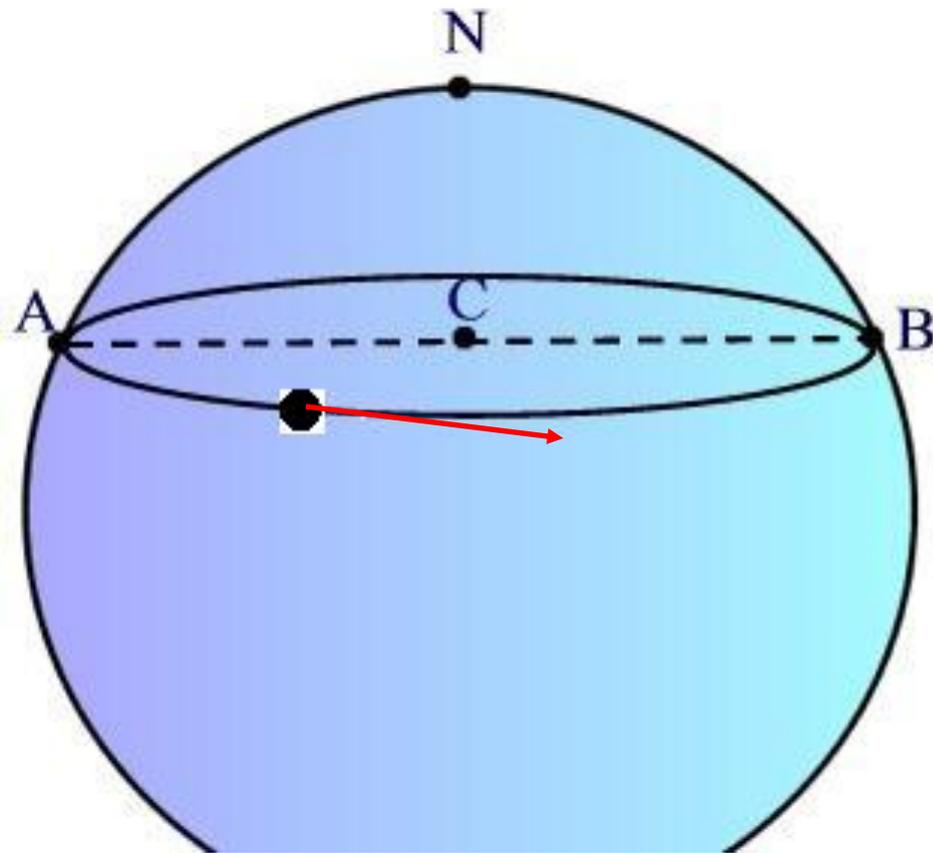
A spasso per il cilindro



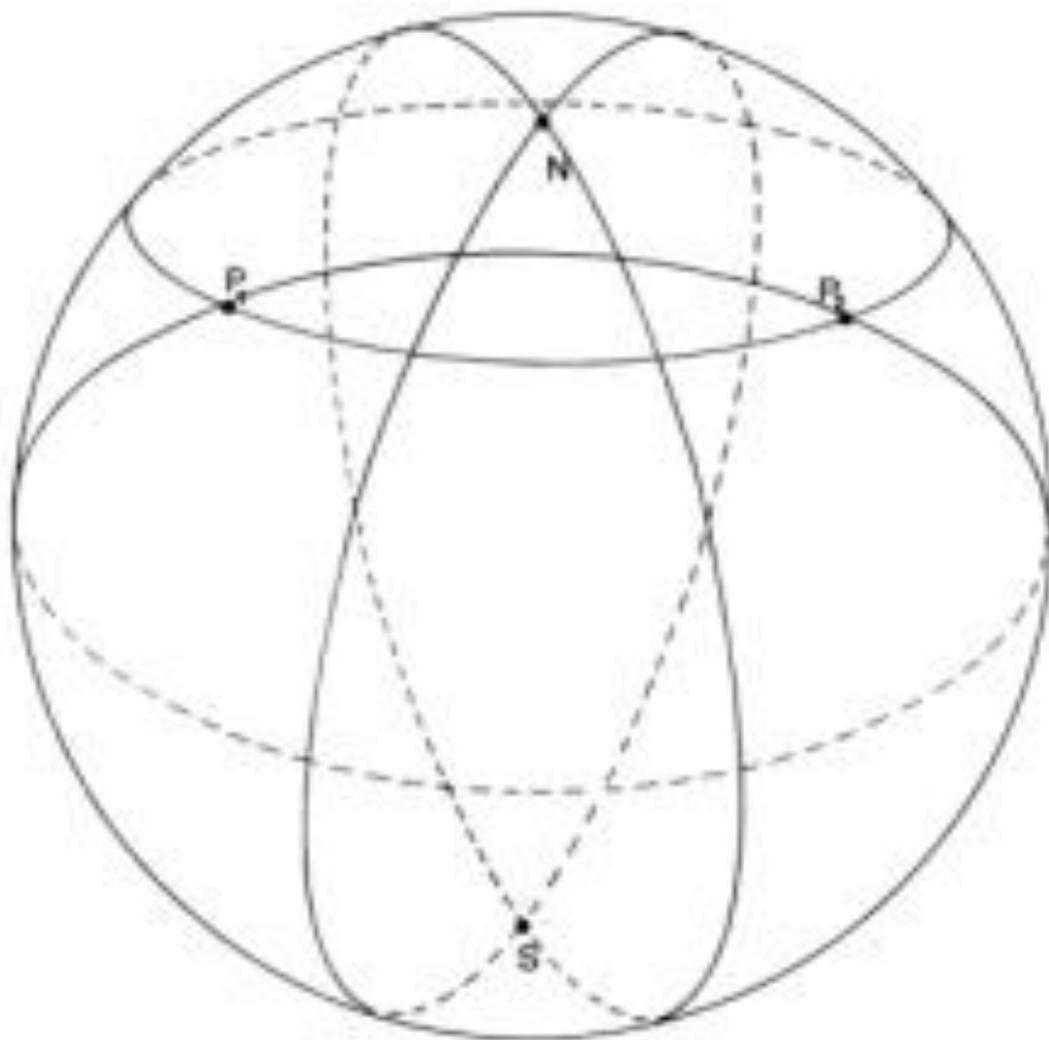
Le **geodetiche** del cilindro sono le eliche:



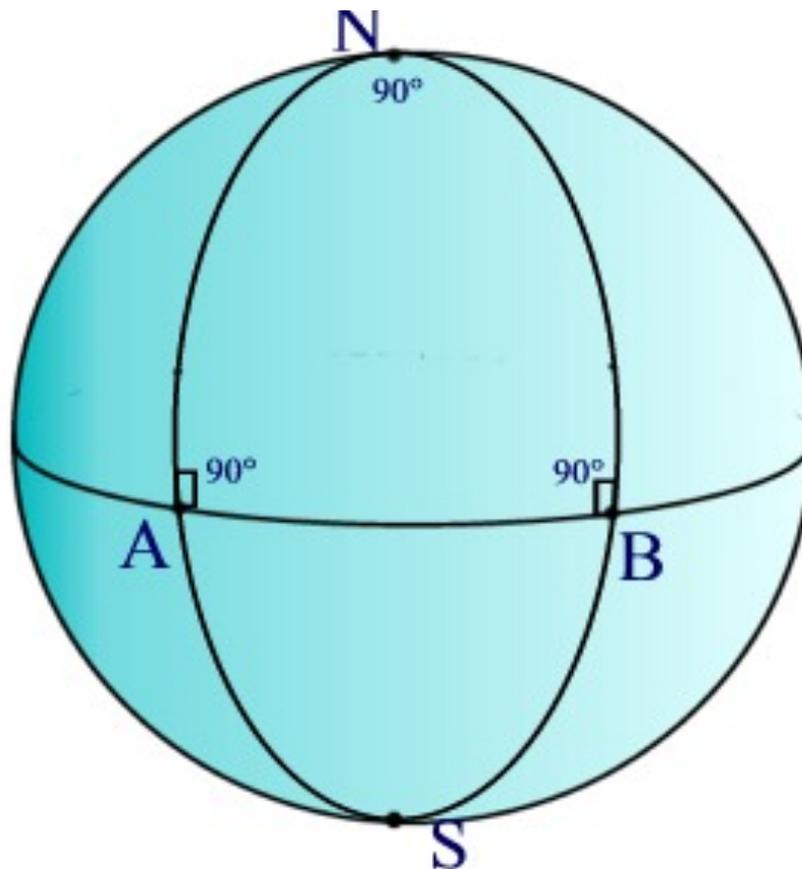
A spasso per la sfera



Le geodetiche della sfera sono i “cerchi massimi”

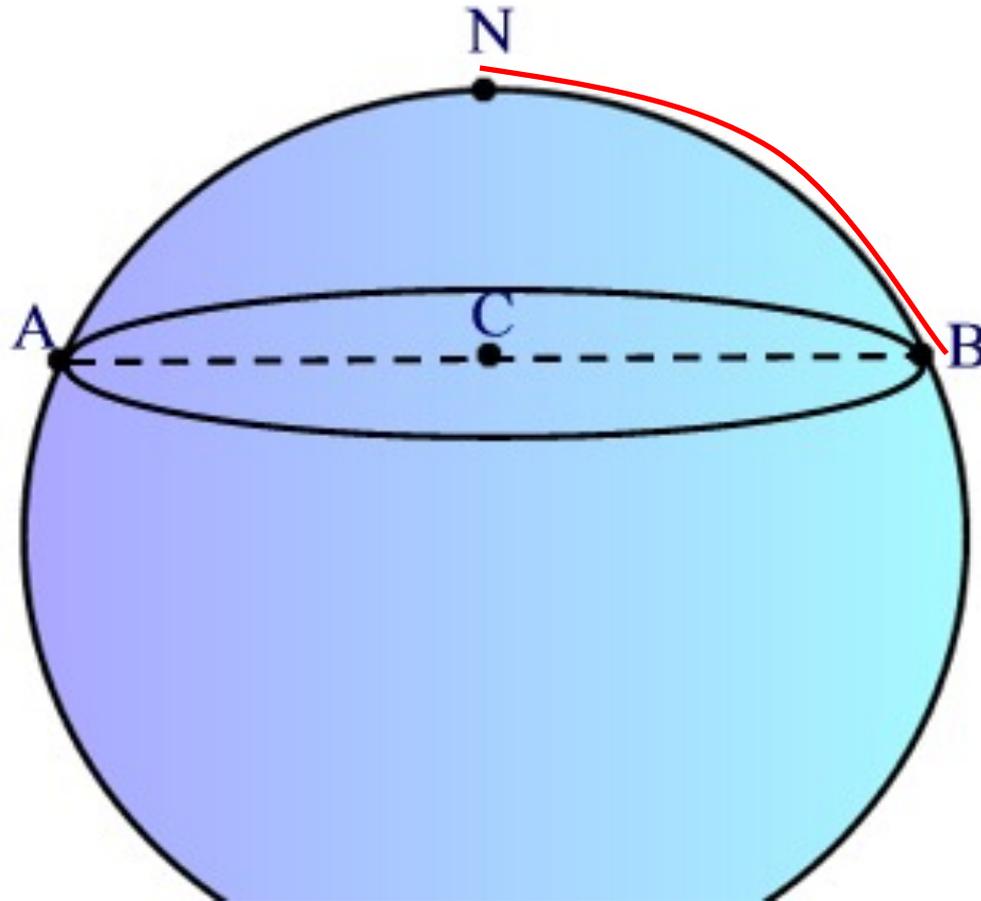


Altre stranezze della geometria sferica

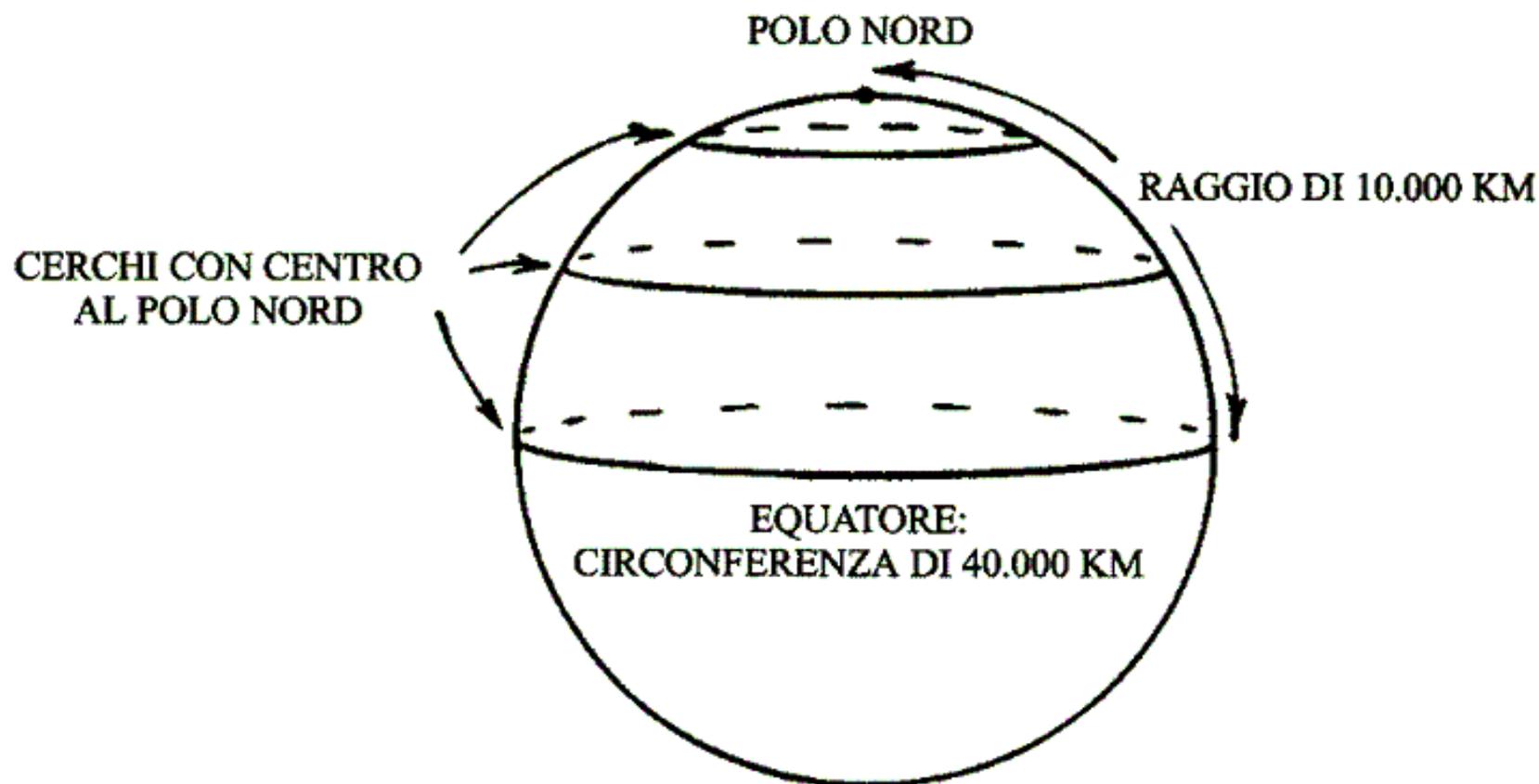


La somma degli angoli interni di un **triangolo** è maggiore di 180 gradi

Altre stranezze della geometria sferica

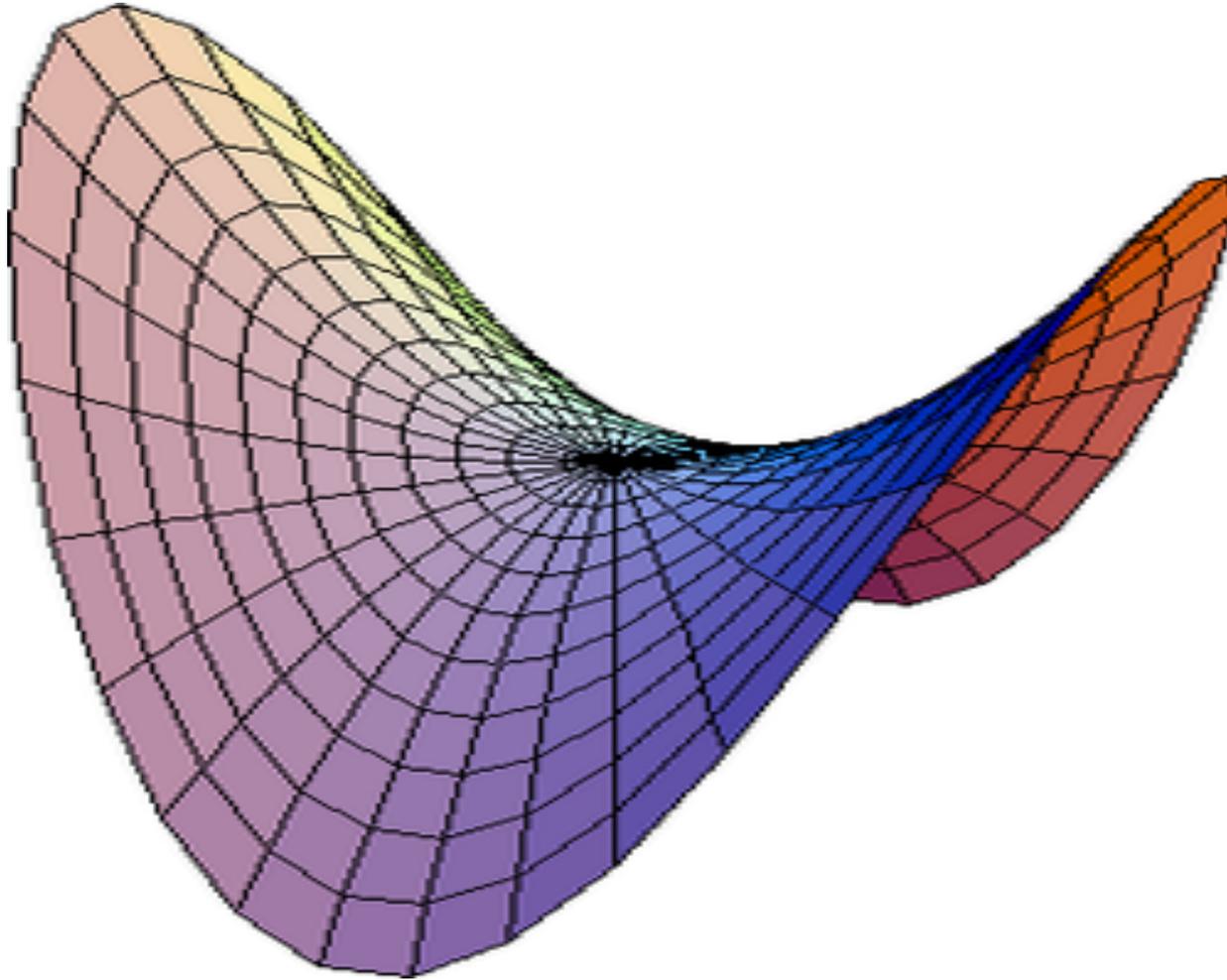


Il rapporto tra circonferenza e diametro è minore di π

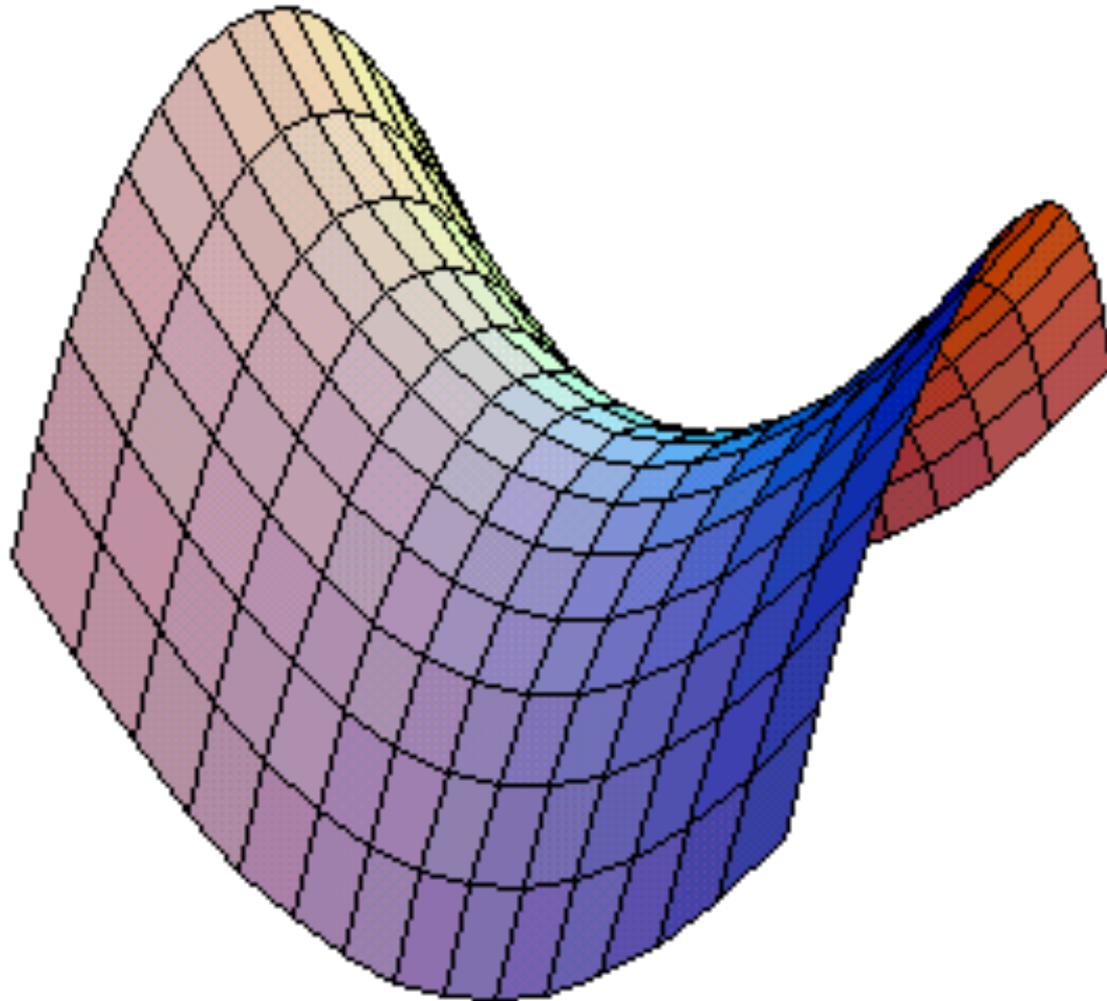


L'equatore è un cerchio sulla superficie della Terra con centro al polo nord

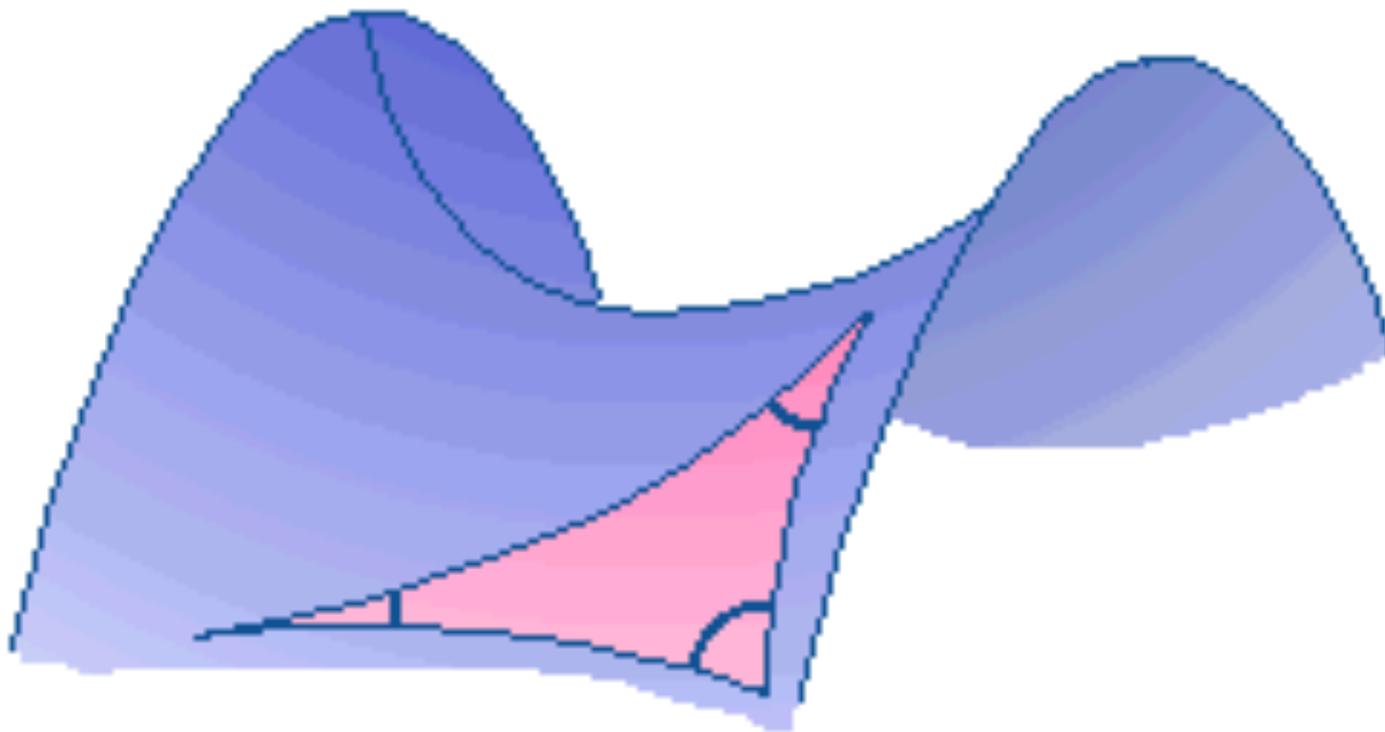
A spasso per il “paraboloide iperbolico”



Cioè, una sella:

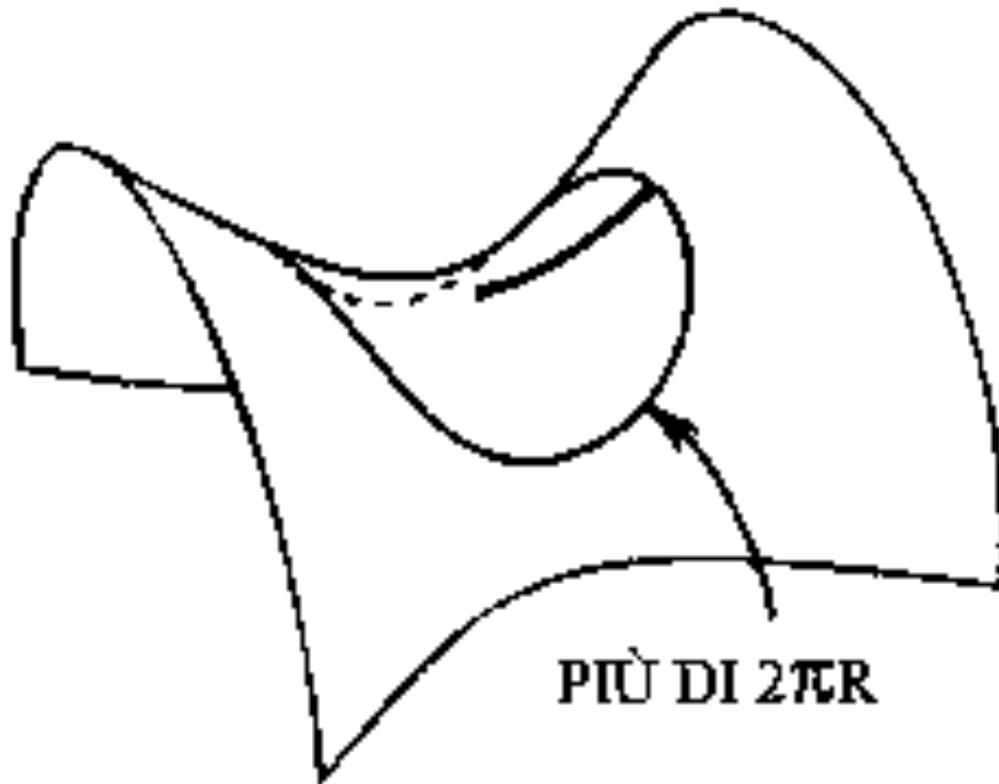


Stranezze della geometria iperbolica



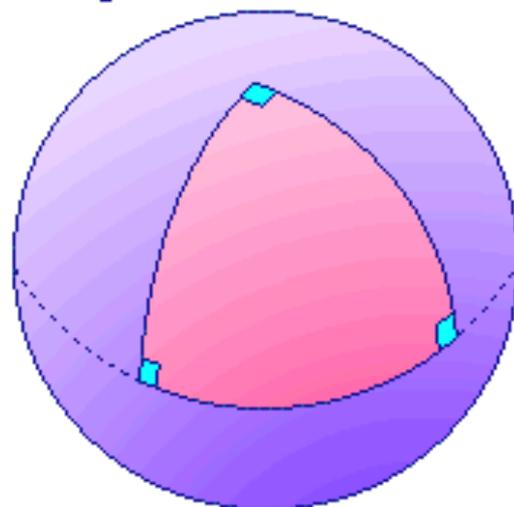
La somma degli angoli interni di un triangolo è minore di 180 gradi

Stranezze della geometria iperbolica

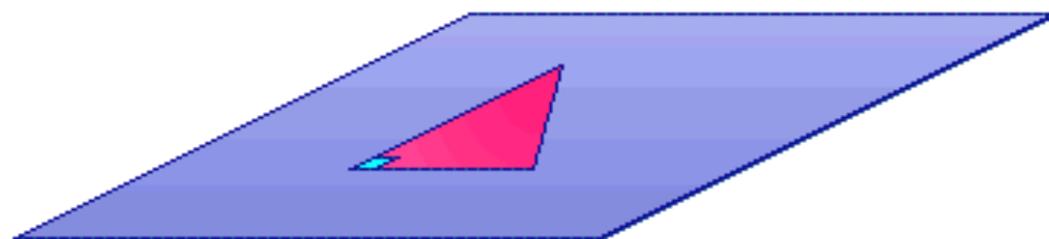


Il rapporto tra circonferenza e diametro è maggiore di π

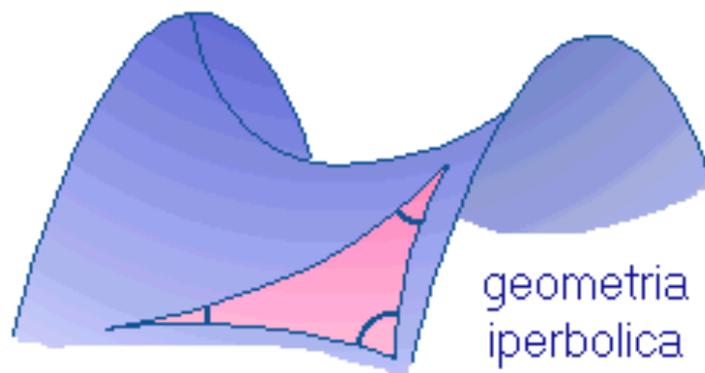
geometria ellittica



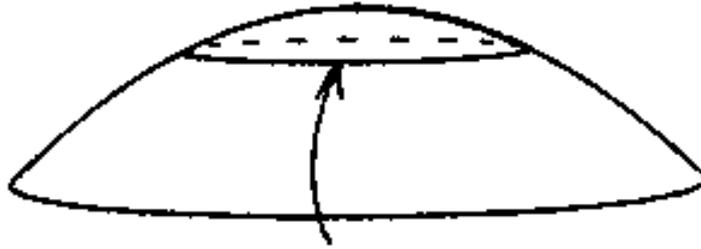
geometria euclidea



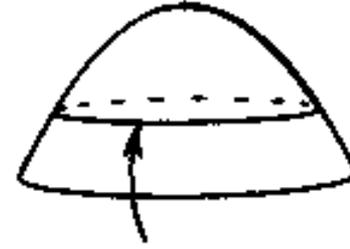
geometria
iperbolica



Geometria ellittica:

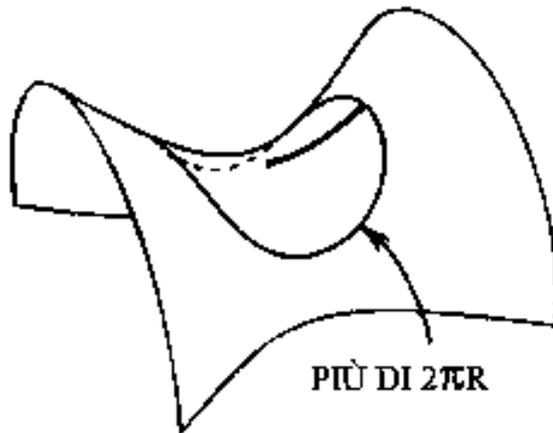


MENO DI $2\pi R$
CURVATURA POSITIVA



MOLTO MENO DI $2\pi R$
GRANDE CURVATURA POSITIVA

Geometria iperbolica:



PIÙ DI $2\pi R$
CURVATURA NEGATIVA



MOLTO PIÙ DI $2\pi R$
CURVATURA PIÙ NEGATIVA

Breve storia delle geometrie non euclidee

Euclide (350-300 a.C.)
nell'affresco *La scuola di Atene* di Raffaello



Il quinto postulato di Euclide

Data una retta e un punto al di fuori di essa, esiste una ed una sola parallela alla retta data passante per il punto dato (formulazione equivalente).

Fino al XIX secolo, numerosi tentativi di dimostrarlo a partire dagli altri quattro, che hanno portato solo ad affermazioni equivalenti ad esso, come:

- la somma degli angoli interni di un triangolo è 180 gradi;
- l'area di un triangolo può essere grande a piacere;
- tre punti nel piano o sono allineati o stanno sulla stessa circonferenza.

La nascita delle geometrie non euclidee

Johann Carl Friedrich
Gauss
(Brunswick 1777 –
Göttingen 1855)



János Bolyai (Cluj 1802 – Tirgu-Mures
1860)





Nikolai Ivanovich Lobachevsky
(Nizhny Novgorod 1792 –
Kazan 1856)



Eugenio Beltrami
(Cremona 1835 – Roma
1900)

Georg Friedrich
Bernhard Riemann

Breselenz,
17 settembre 1826

—

Selasca,
20 luglio 1866



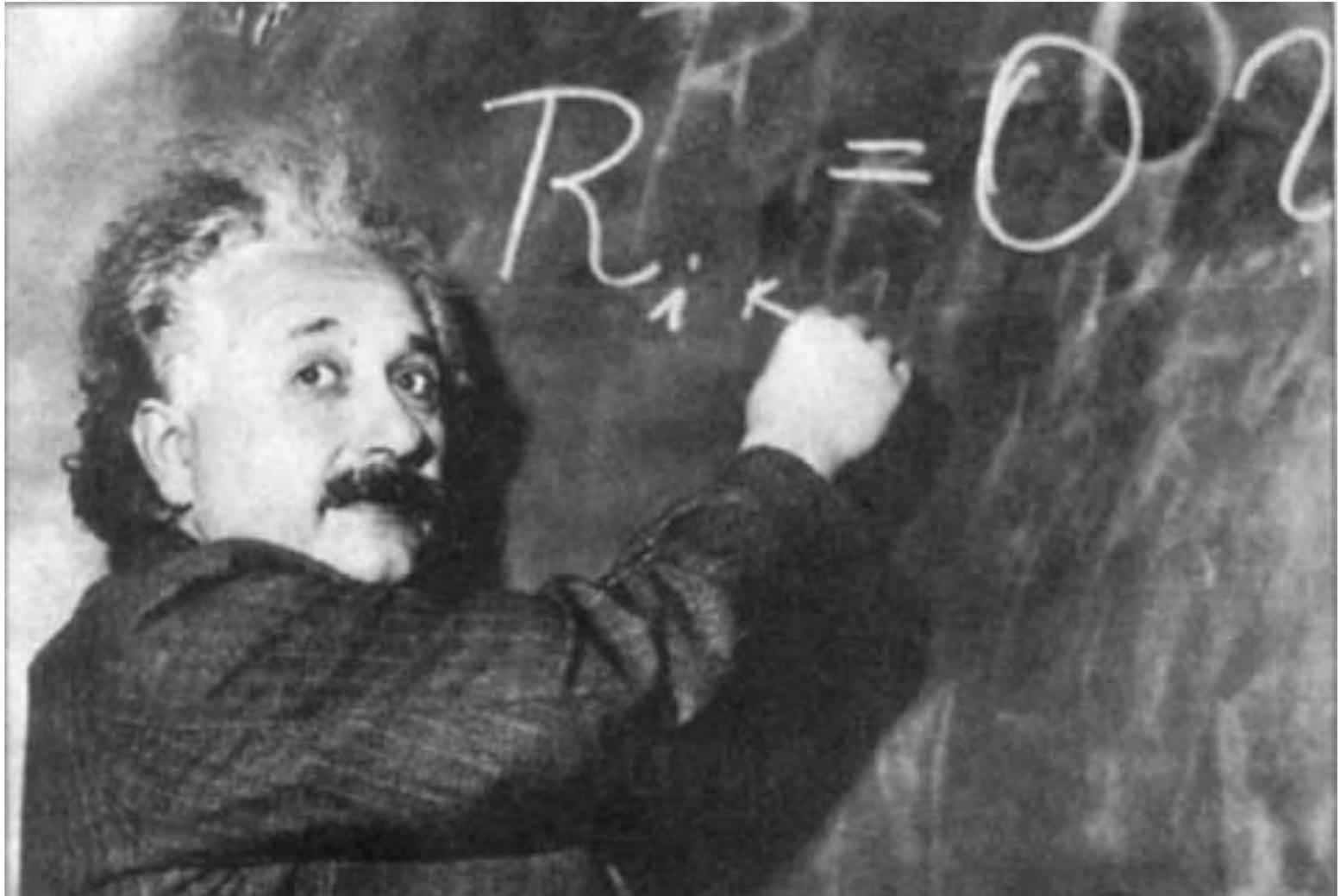
Nel periodo 1824-1868, grazie a Gauss, Bolyai, Lobachevsky, Riemann e Beltrami, furono scoperte nuove geometrie nelle quali *non* vale il quinto postulato di Euclide.

Geometria sferica: nessuna parallela.

Geometria iperbolica: infinite parallele.

Queste idee andavano ben oltre il problema delle parallele e portarono ad una nuova concezione della geometria. In particolare, le idee e le tecniche sviluppate da Riemann furono essenziali per la formulazione, da parte di Einstein, della relatività generale.

Relatività ristretta

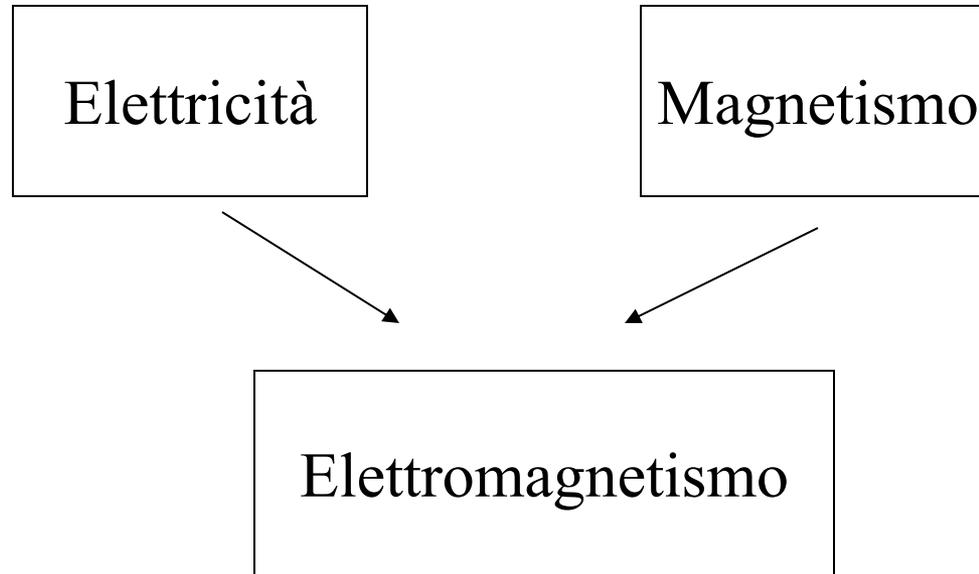


Relatività ristretta: una premessa

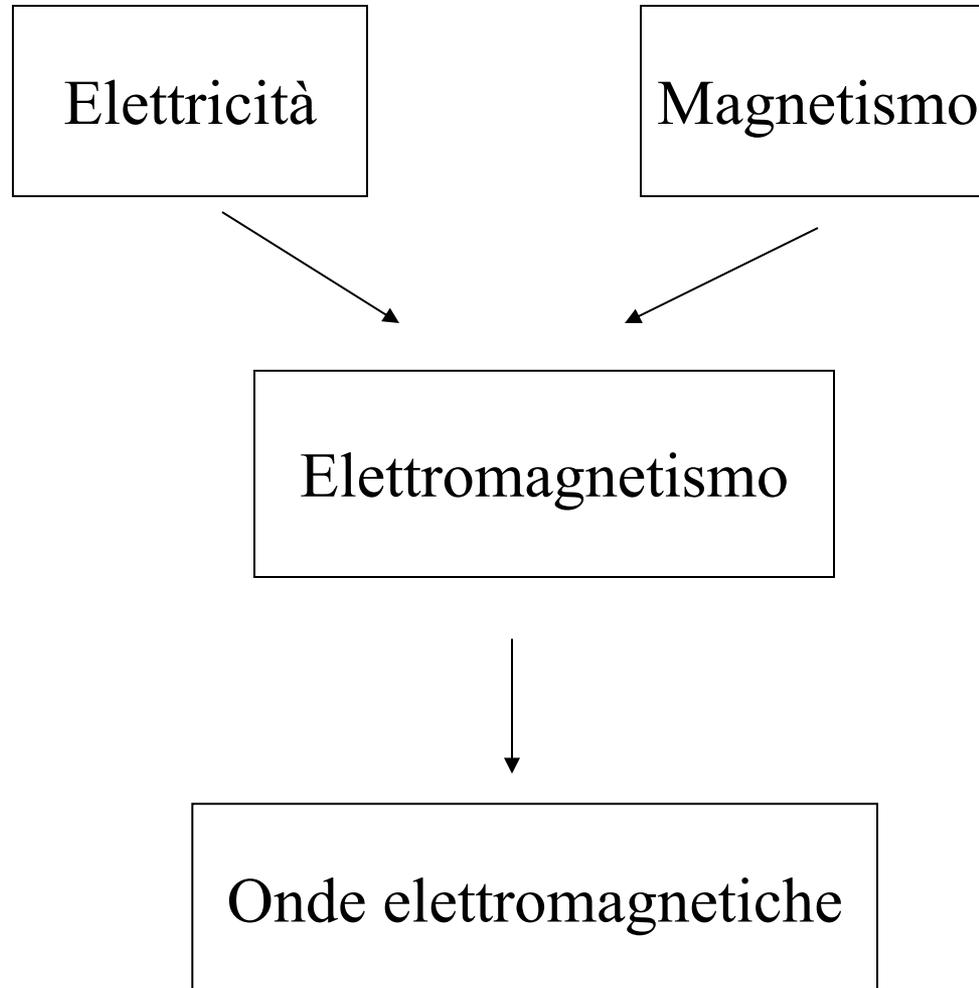
Elettricità

Magnetismo

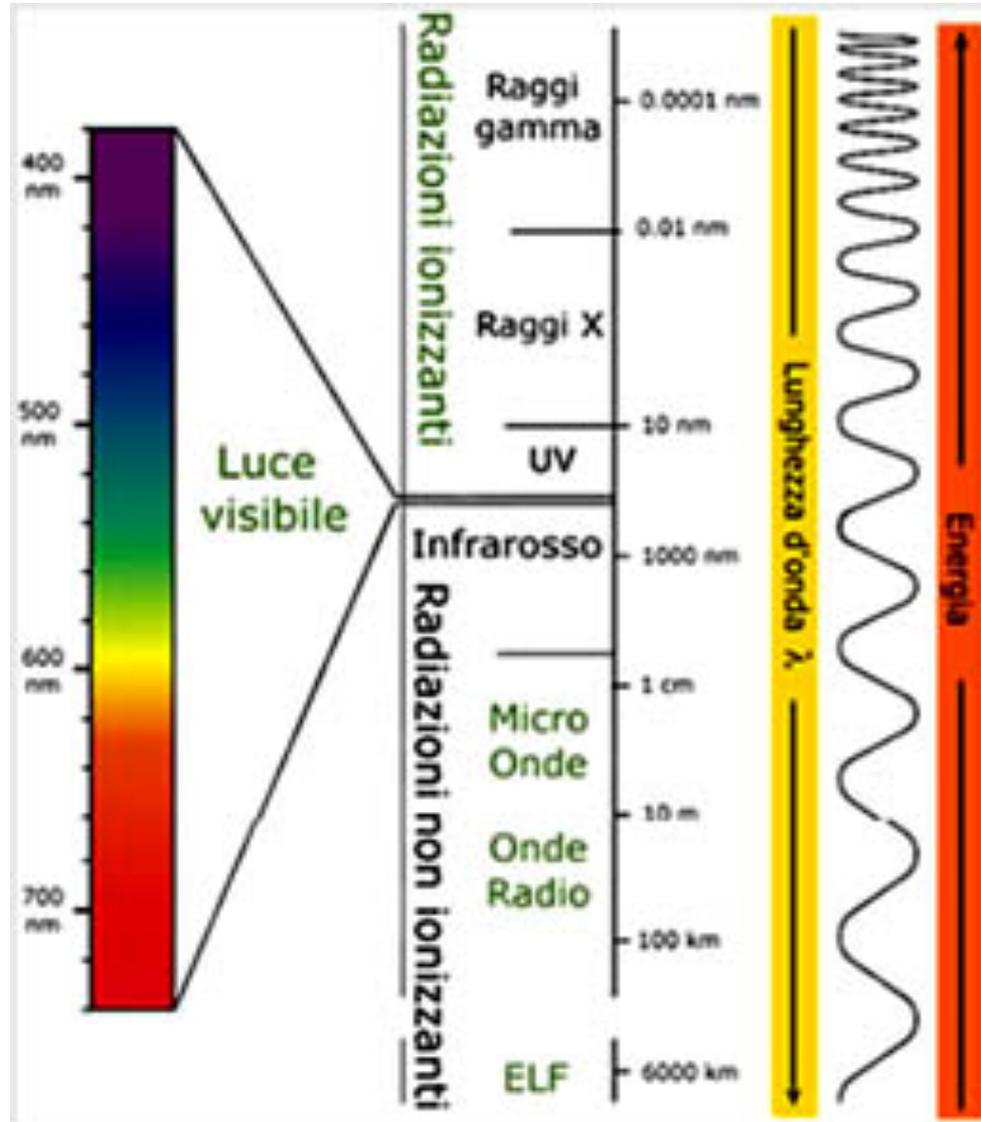
Relatività ristretta: una premessa



Relatività ristretta: una premessa



Lo spettro elettromagnetico



Lo “spettro” di Newton





Maxwell aveva mostrato che le onde elettromagnetiche (in particolare la luce) nel vuoto viaggiano sempre con la stessa velocità:

$$c = 300.000 \text{ km/s (circa)}$$

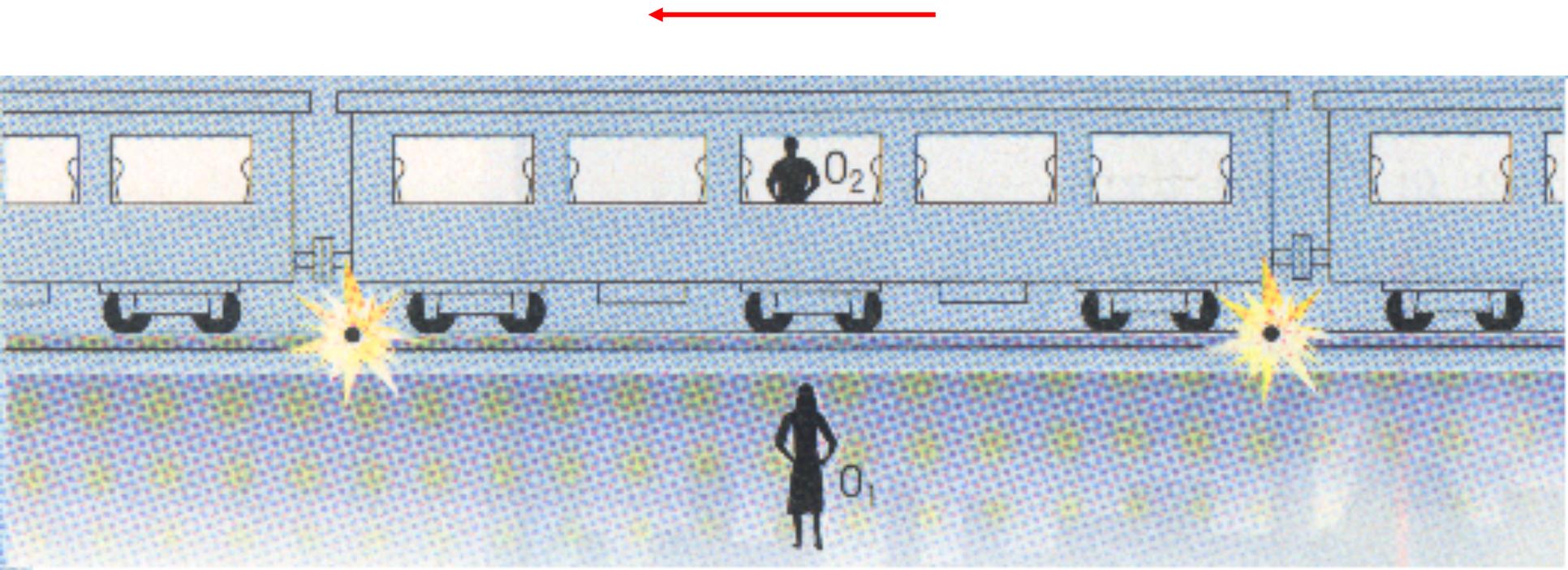
Ma questo è in contraddizione con la legge galileiana di addizione delle velocità.

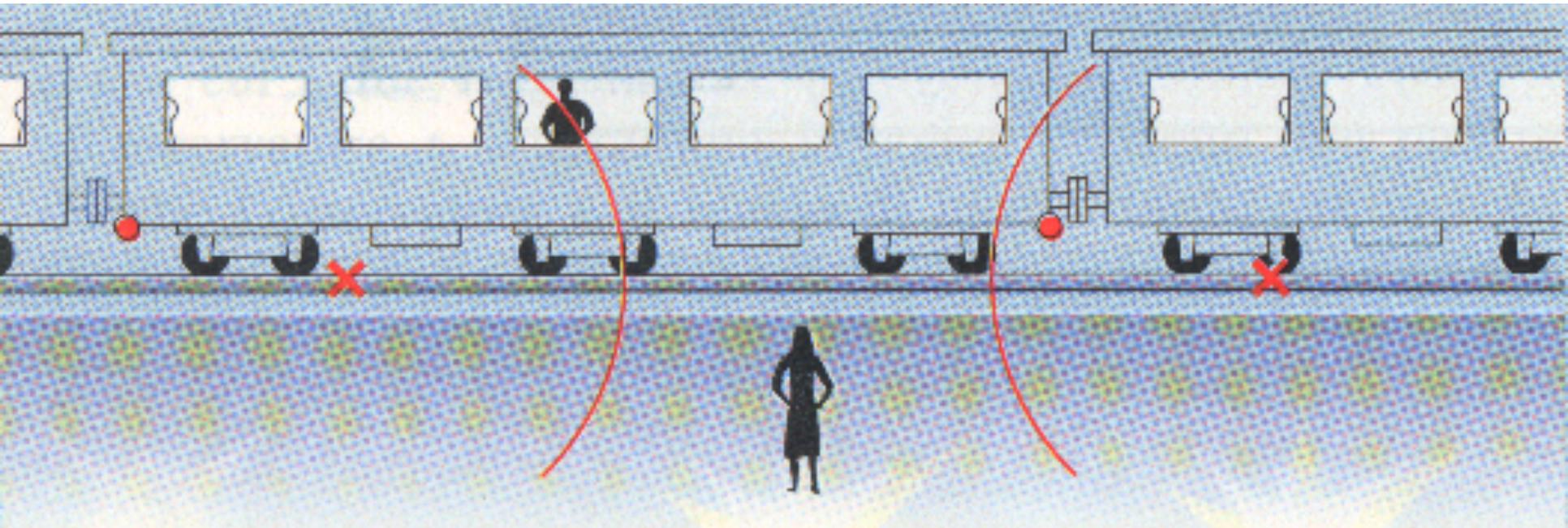
Einstein, a soli 16 anni, fece una riflessione analoga, chiedendosi cosa accadrebbe se inseguissimo un raggio di luce con la stessa velocità.

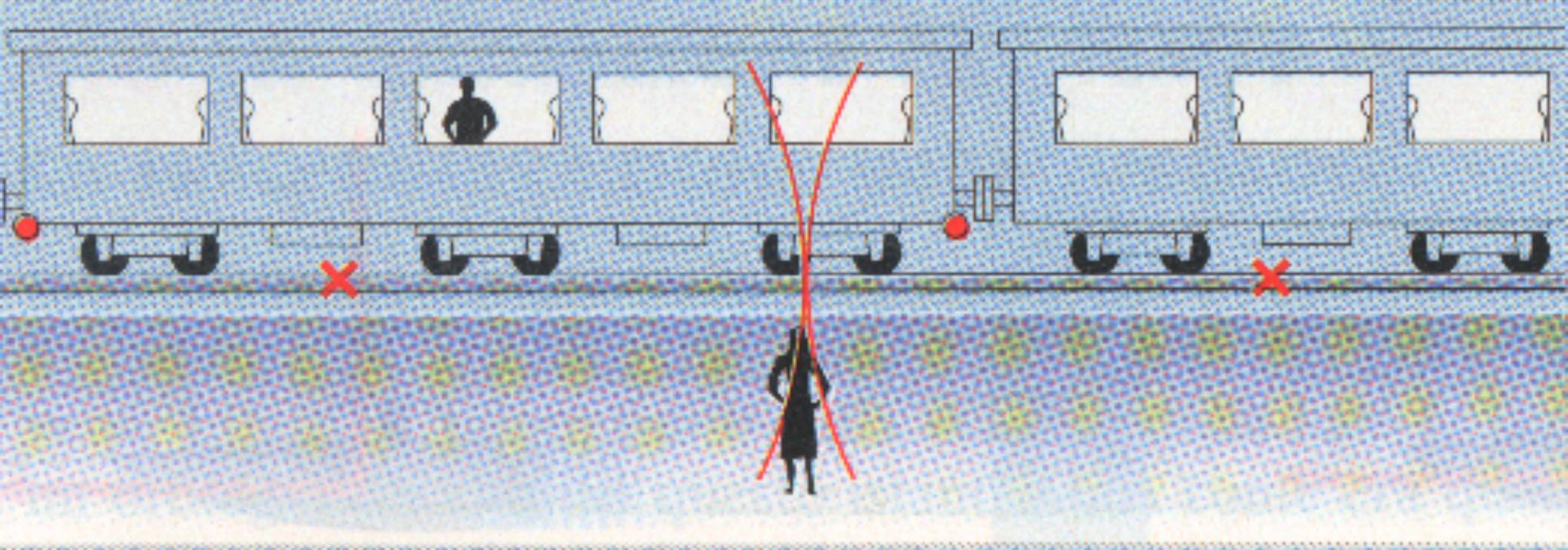
La soluzione di Einstein fu quella di postulare l'invarianza della velocità della luce (nel vuoto) al cambiare dell'osservatore.

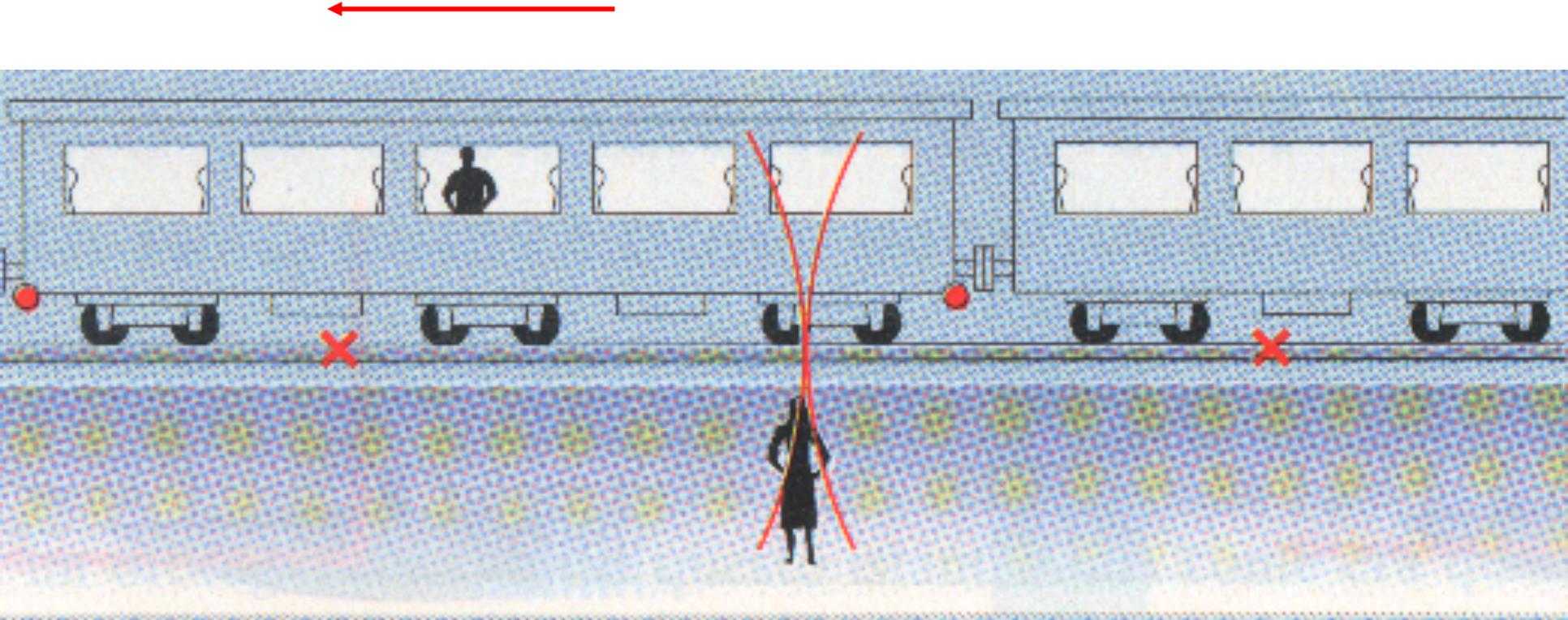
Ciò ha delle conseguenze importanti e controintuitive.

Prima conseguenza: la *simultaneità* di due eventi dipende dall'osservatore (ossia, è un concetto *relativo*)



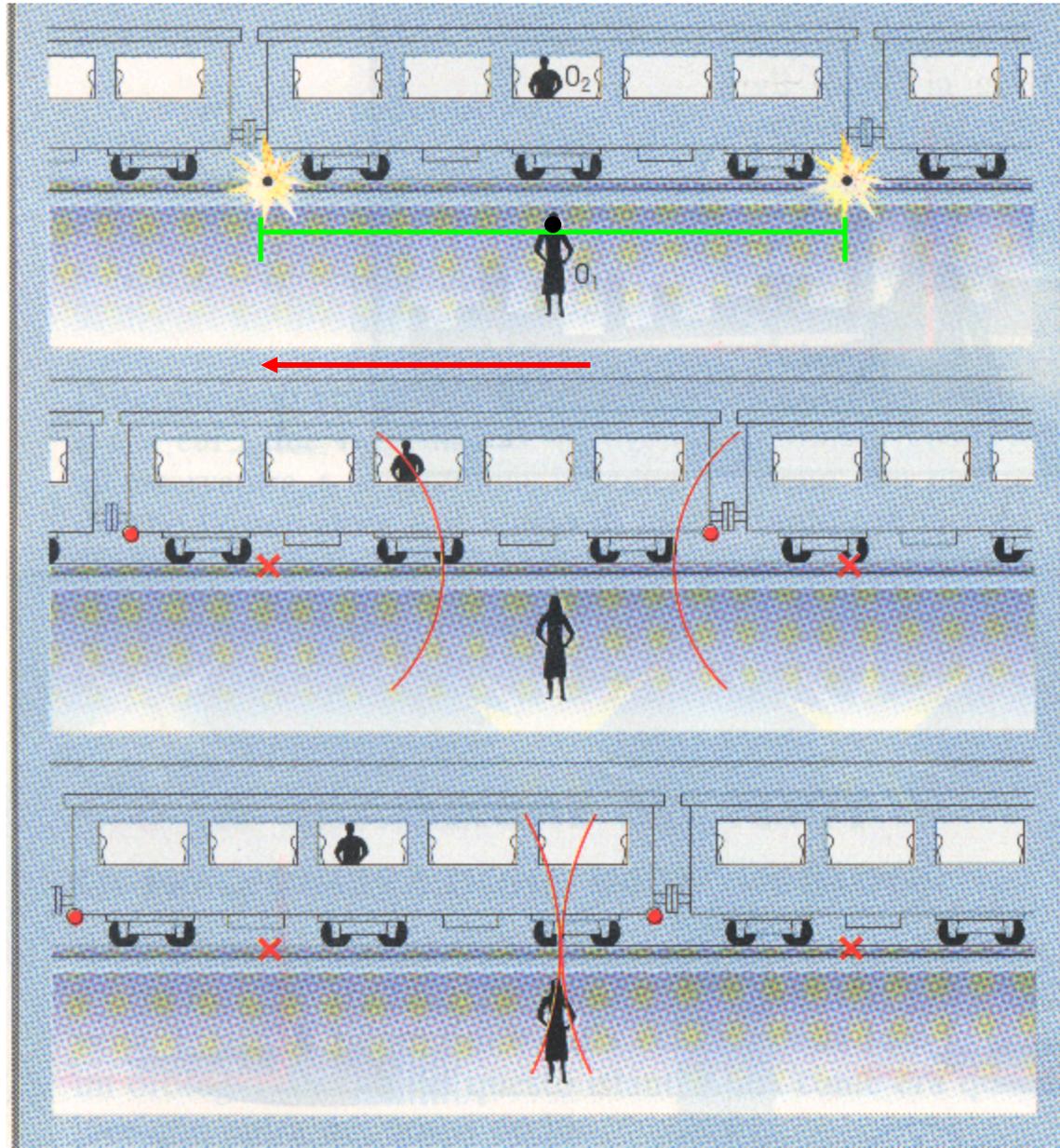






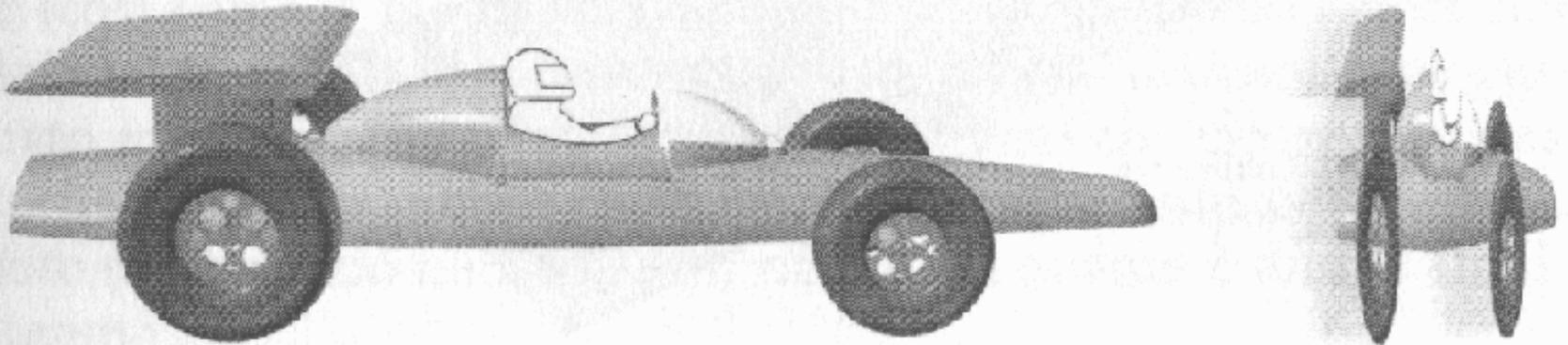
Non ha quindi più senso separare in maniera assoluta il tempo dallo spazio. Bisogna lavorare nello *spazio-tempo*.

Seconda conseguenza: la contrazione delle lunghezze



La contrazione delle lunghezze

Un oggetto in movimento si accorcia nella direzione del moto.



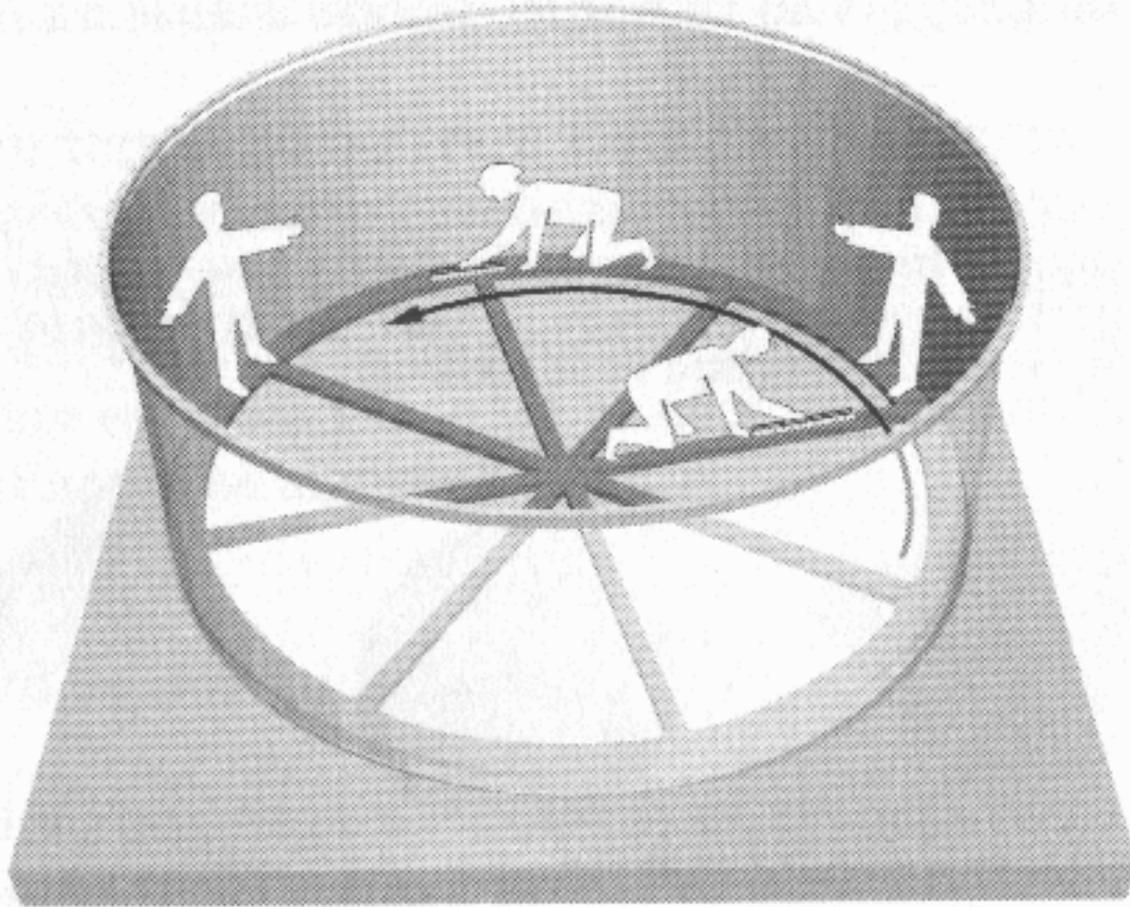
$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

v = velocità dell'oggetto

c = velocità della luce

La giostra di Einstein

Il righello di Slim si contrae, perché è posto lungo la direzione del moto; invece il righello di Jim è messo in direzione radiale, perpendicolare a quella del moto, e quindi non subisce variazioni di lunghezza.



Geometria e fisica

Se la geometria dell'osservatore fisso è euclidea, non può esserla quella dell'osservatore ruotante (Slim e Jim).

Fusione tra geometria e fisica: lo spazio non si può più concepire come un palcoscenico immutabile nel quale vengono poi introdotti i corpi, come faceva Newton.

Questa fusione sarà ancora più evidente nella relatività generale (in realtà questo esempio fa già parte di essa).

Relatività generale

Incompatibilità tra la teoria newtoniana della gravitazione e la relatività ristretta:

- a) La forza d'attrazione è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, ma quale distanza?
- b) Le azioni si propagano con velocità infinita, mentre per la relatività ristretta nessun segnale può viaggiare più velocemente della luce.

La nascita della relatività generale

Einstein, nel 1922: *“Se tutti i sistemi [accelerati] sono equivalenti, allora la geometria euclidea non può valere in ciascuno di essi. Abbandonare la geometria e conservare le leggi [fisiche] è come descrivere i pensieri senza le parole. [...]. Che cosa si doveva cercare a questo punto? Tale problema rimase insolubile per me fino al 1912, quando all'improvviso mi resi conto che la teoria di Gauss delle superfici forniva la chiave per svelare questo mistero. [...]. Non sapevo però a quell'epoca che Riemann aveva studiato i fondamenti della geometria in maniera ancora più profonda.”*

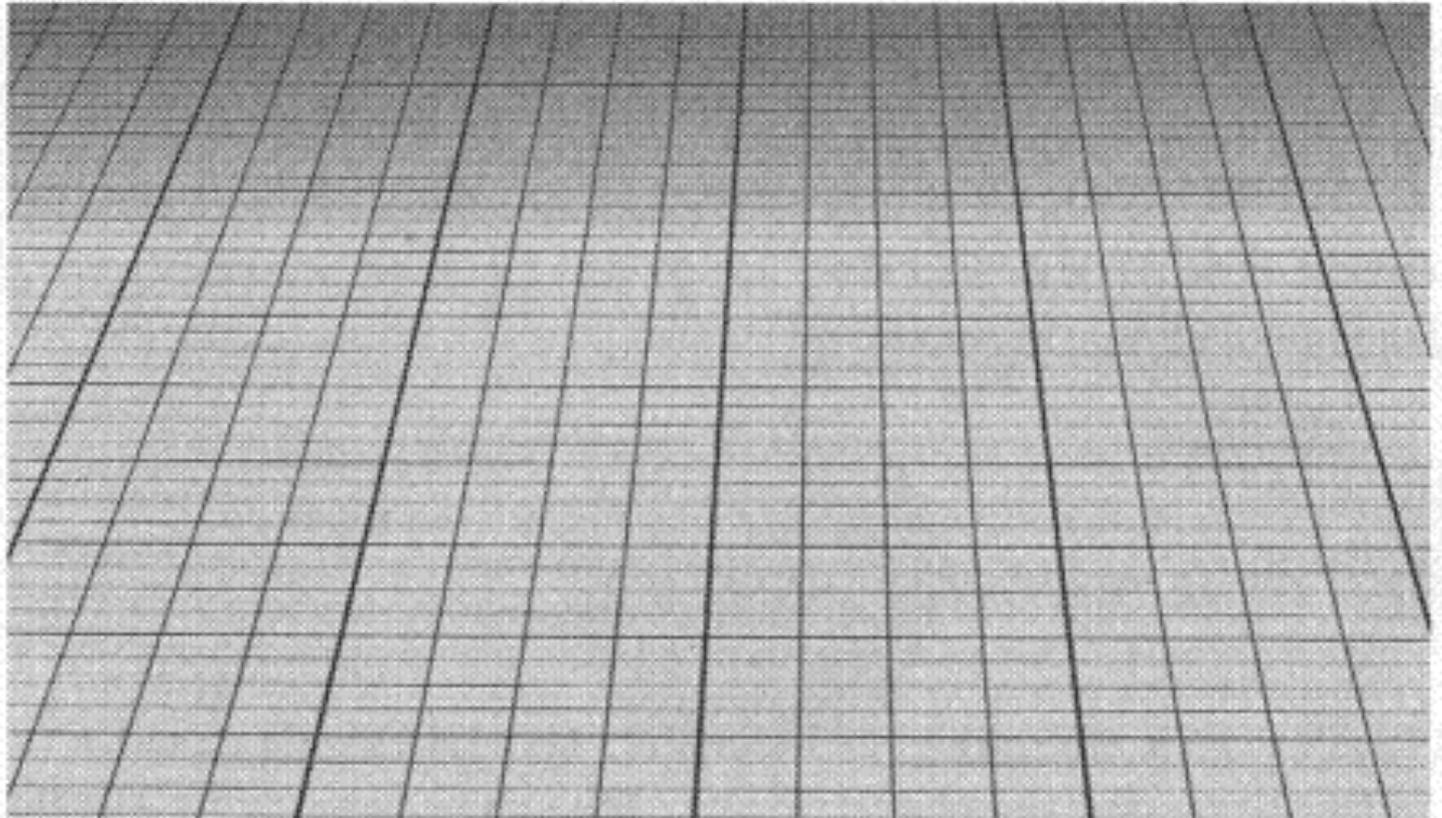
Nel 1916 Einstein riuscì a conciliare relatività ristretta e gravitazione nella cosiddetta relatività generale. Gli strumenti matematici che utilizzò per formulare questa nuova teoria erano stati forgiati da Riemann e altri (tra cui gli italiani Levi-Civita e Ricci) e sono strettamente legati al problema delle geometrie non euclidee.

Continua Einstein: *“Quando da Praga tornai a Zurigo, vi trovai il matematico Grossmann, mio caro amico: da lui appresi le prime notizie sul lavoro di Ricci e in seguito su quello di Riemann”*

“Grossmann, aiutami senno' divento pazzo”

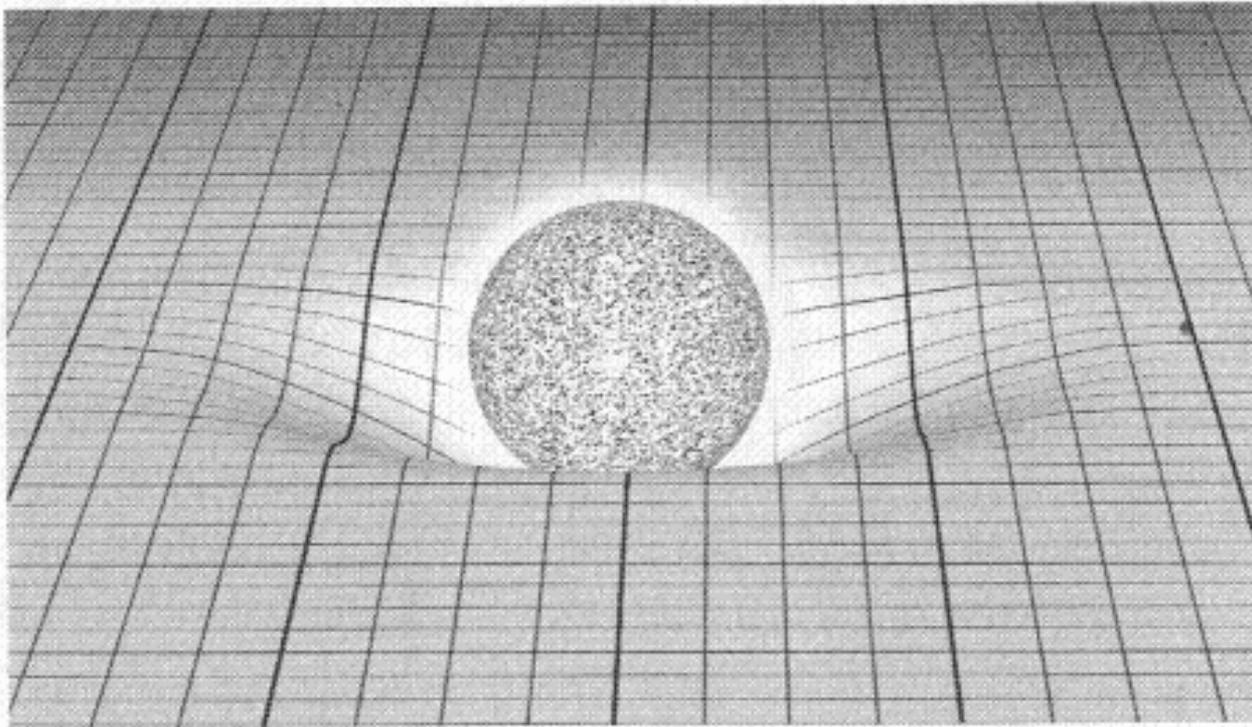
Relatività generale: le idee chiave

Rappresentazione schematica dello spazio piatto.



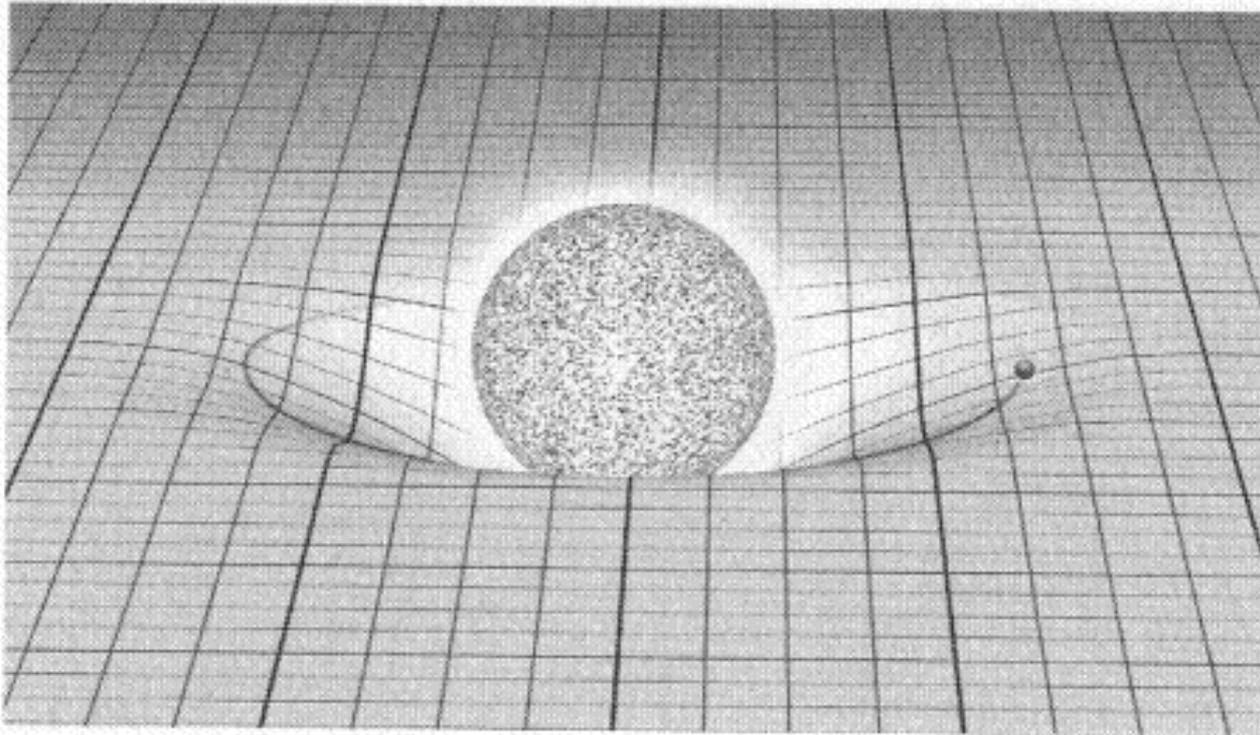
La materia incurva lo spazio-tempo

Un corpo massivo come il Sole incurva la trama dello spazio, agendo quasi come una palla pesante posta su un pezzo di gomma.



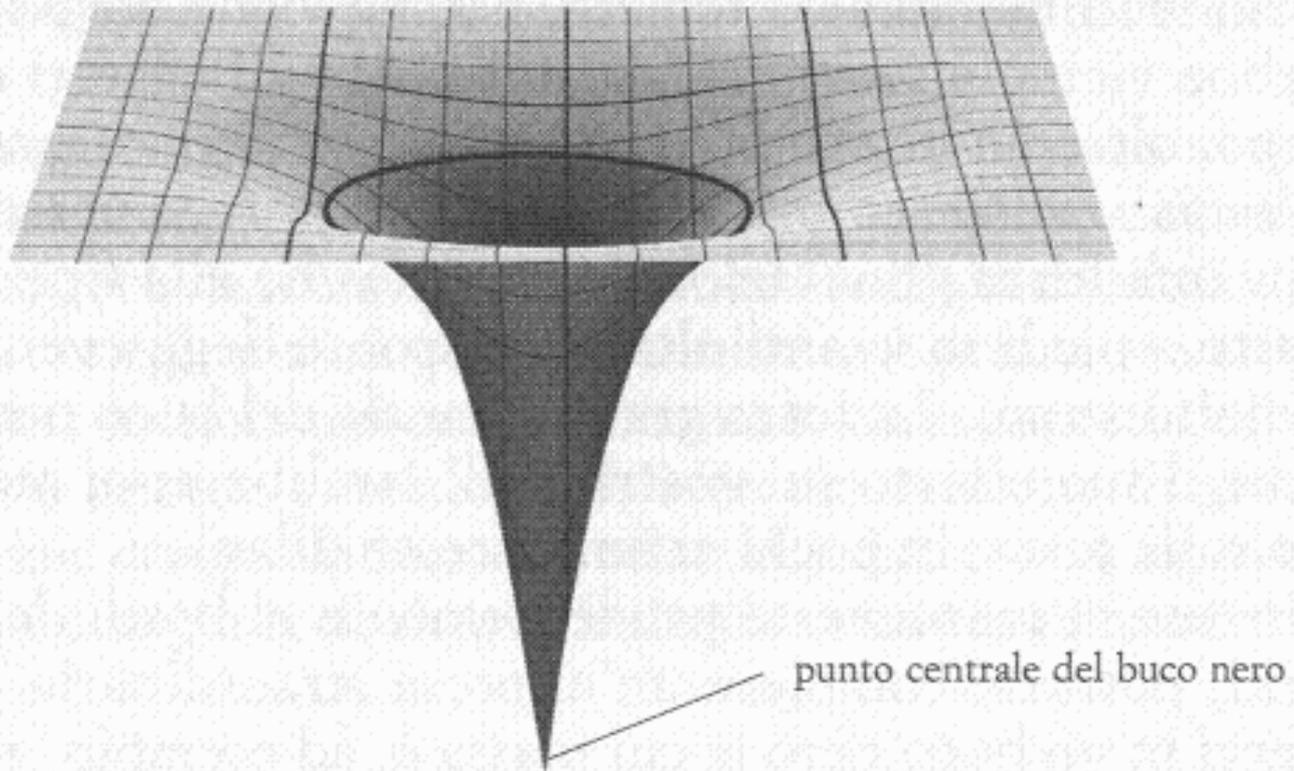
Le “traiettorie” sono ancora le **geodetiche**!

La Terra orbita attorno al Sole «rotolando» in un avvallamento dello spazio causato da quest'ultimo. Più precisamente, il nostro pianeta segue una traiettoria di «minima energia» nella regione di distorsione attorno al Sole.

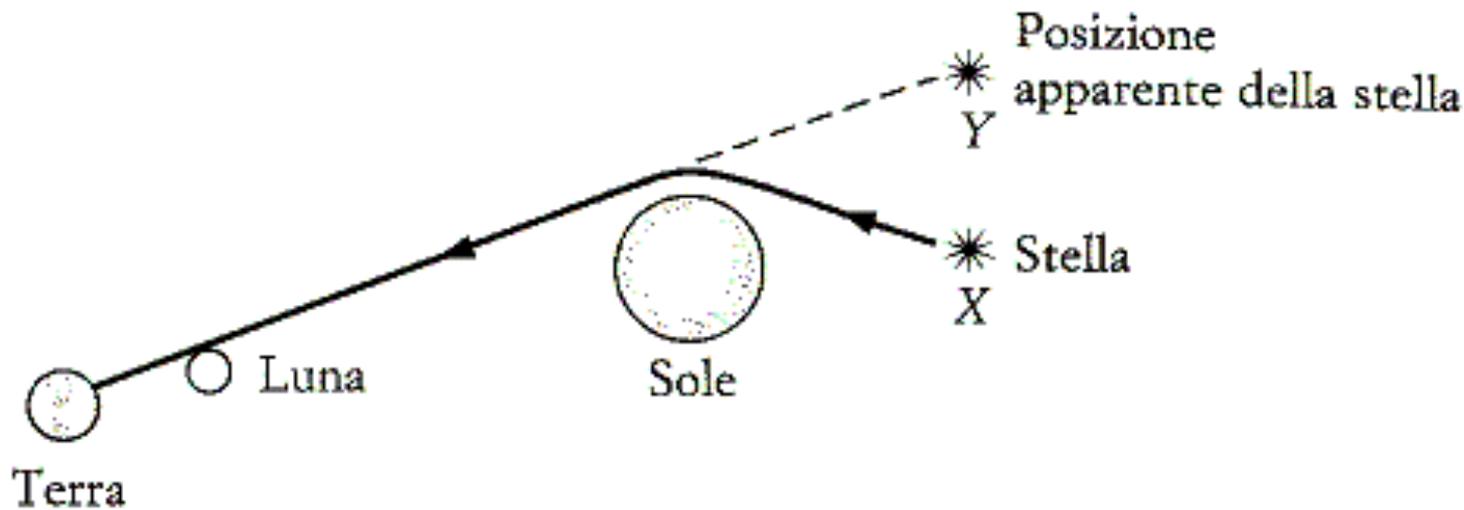


Un buco nero

Un buco nero piega lo spaziotempo in modo così pronunciato che tutto ciò che arriva all'interno del suo «orizzonte degli eventi» (il cerchio nero in figura) non può sfuggire alla sua morsa gravitazionale. Nessuno sa cosa accade di preciso nel punto centrale di un buco nero.



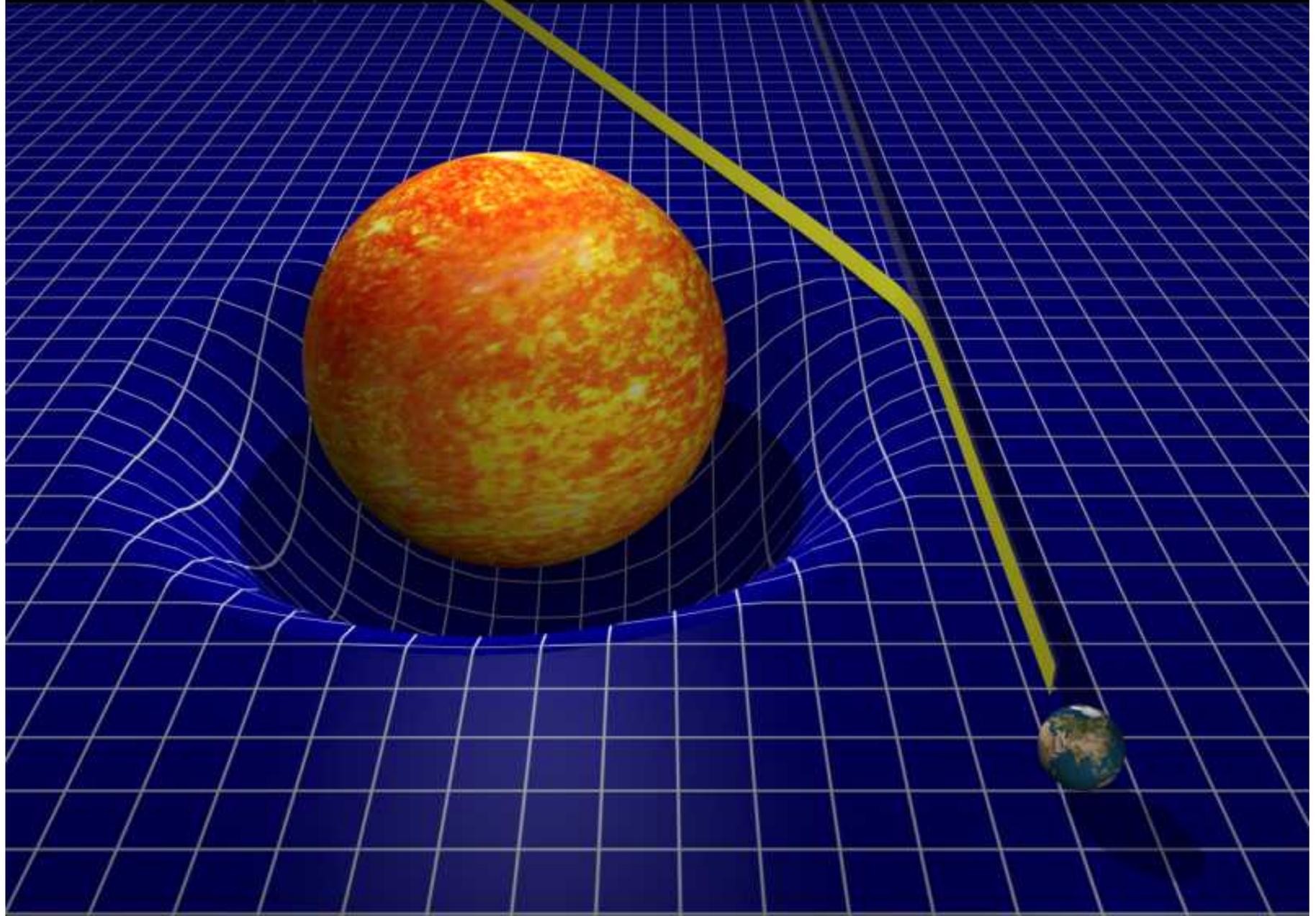
La prima conferma sperimentale della relatività generale



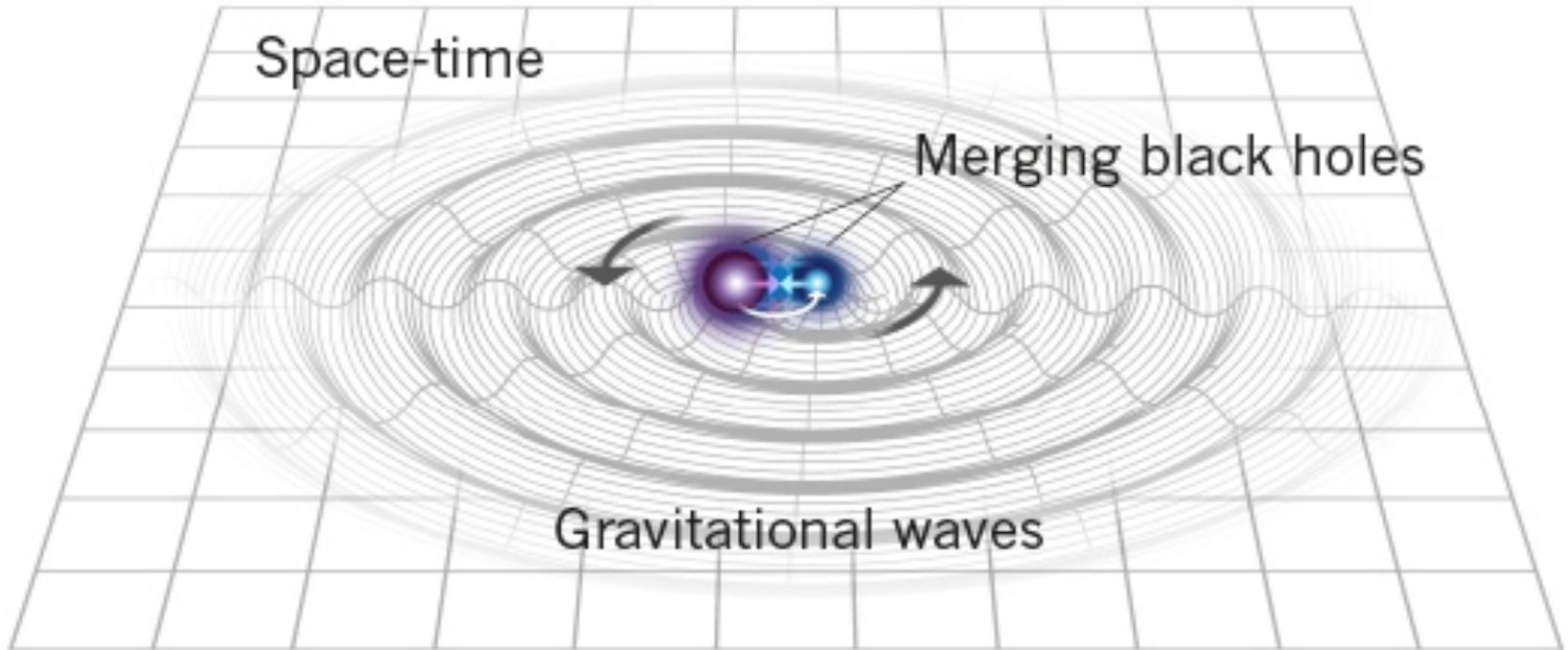
Quando la luce che arriva da una stella lontana passa vicino al Sole, viene deflessa dal campo gravitazionale solare. Il fenomeno fu osservato per la prima volta durante l'eclissi totale del 1919. La stella X appare come se si trovasse nella posizione Y.

Real

Observed



L'ultima conferma sperimentale della relatività generale: onde gravitazionali



The gravitational waves were produced when two black holes — one weighing 36 solar masses and the other 29 — spiralled towards each other and merged, distorting the space-time around them in the process.