

MISURA DELL' ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ g MEDIANTE L'USO DI UN PENDOLO REVERSIBILE



Gravitazione. Accelerazione di gravità “g”.

La legge della gravitazione universale, formulata da Newton, permette di calcolare la forza che si esercita tra due corpi in seguito alla loro attrazione reciproca. Se indichiamo con m_1 la massa di un corpo, m_2 la massa dell'altro ed r la distanza dei loro baricentri, avremo la relazione:

$F = G(m_1 m_2) / r^2$ essendo F la forza che un corpo esercita sull'altro, ed avendo indicato con G una costante, detta di gravitazione universale: $G = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$

Ogni corpo crea intorno a se stesso un “campo gravitazionale” H la cui intensità assume l'espressione (1): $H = - G m / r^2$ avendo indicato con m la massa del corpo e con r la distanza del centro di gravità di quel corpo dal punto dello spazio considerato. Il segno negativo indica che H è diretta verso il centro del corpo. H ha le dimensioni di un' accelerazione.

L'espressione, essendo di carattere universale, vale anche nel caso della Terra, ed in particolare sulla superficie di questa avremo che l'intensità di questo campo assume l'espressione

$$H_0 = - G M / r_0^2 = 9.81 \text{ m/s}^2.$$

Con: $M =$ massa della Terra $= 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$;

$$r_0 = \text{raggio medio della terra} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Questa grandezza viene usualmente chiamata **accelerazione di gravità** e ad essa si attribuisce il simbolo “**g**”. Essa rappresenta l'intensità del campo gravitazionale sulla superficie terrestre.

Nel sistema SI l'accelerazione di gravità è misurata in m/s^2 . È ancora tollerata (in geodesia e geofisica) la vecchia unità di misura: $\text{Gal} = 1 \text{ cm/s}^2$ (Gal : in onore di Galileo).

Variazione di “g”.

È diffusa la tendenza a considerare l'accelerazione di gravità come una costante, indipendente dal tempo e dallo spazio. Consideriamo quali sono le cause più comuni di variazione della gravità e che entità possono assumere.

Variazioni nello spazio.

Supponiamo la Terra una sfera omogenea di densità ρ_v (kg/m^3). Riferiamoci alla figura 1. dove viene rappresentato l'andamento di $H(r)$ in funzione della distanza dal centro della Terra.

Procedendo verso il centro della Terra, su ogni superficie sferica interna, l'intensità del campo vale:

$$H_s = -G m_s / r^2 \quad \text{dove } m_s = \text{massa racchiusa dalla superficie sferica}; r = \text{raggio della stessa.}$$

Poiché $m_s = V \rho_v = (4/3) \pi r^3 \rho_v$, sostituendo si avrà: $H_s = -\{ (4/3) \pi \rho_v G \} r$. che risulta proporzionale ad r . In conclusione partendo dal centro della Terra e muovendosi verso lo spazio, l'attrazione gravitazionale, in valore assoluto, cresce linearmente fino alla superficie terrestre, dove assume il valore di g ; quindi decresce con legge quadratica se ci si allontana nello spazio.

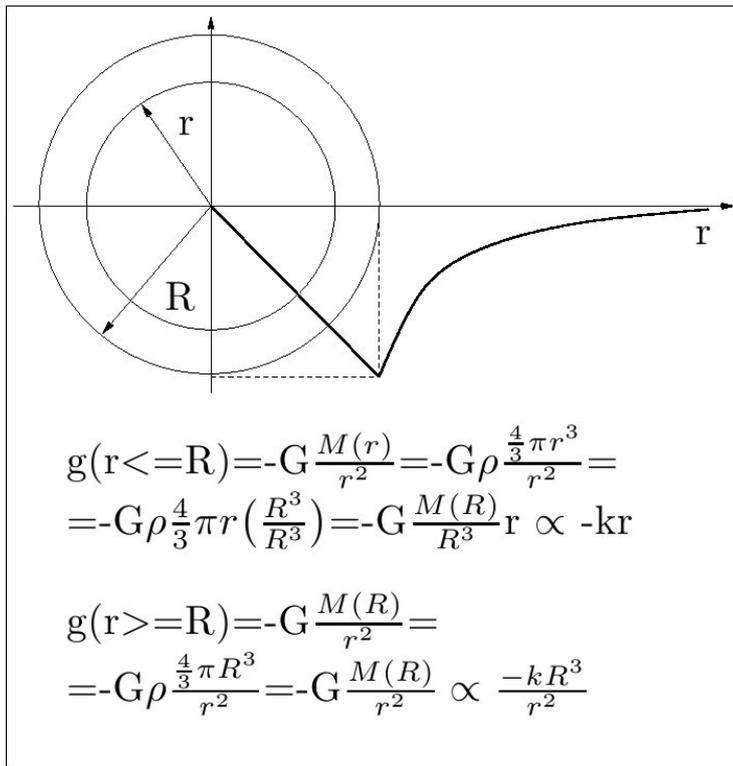


FIGURA 1 : $g(r)$

Variazione di g per piccoli spostamenti verticali dalla superficie terrestre

Sappiamo che $g = GM / r_0^2$.

Differenziando avremo $dg = -2 (GM / r_0^3) dr_0$

La variazione relativa sarà dunque: $dg/g = -2 dr_0/r_0$

Per uno spostamento $dr_0 = 1$ m sulla superficie terrestre si ottiene : $dg = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$;

in un medesimo luogo variando l'altitudine di **1000 m**, g varia del **3 per mille**.

Influenza della forma non perfettamente sferica della Terra.

La Terra è stata considerata per semplicità come sferica. In realtà essa ha una tipica forma di geoide, raffigurabile in prima approssimazione come ellissoide di rivoluzione. Il raggio terrestre al polo è circa 21 km inferiore rispetto a quello equatoriale: appiattimento caratteristico della Terra ai poli. Il rapporto tra la differenza dei raggi ed il raggio medio vale 1: 298.

Al **polo** usando la (1) si ottiene $g = 9.832 \text{ m/s}^2$, valore sperimentalmente confermato. **All'equatore** si ha invece $g = 9.814 \text{ m/s}^2$ che è notevolmente più grande di quanto è misurato

Influenza dell'accelerazione centripeta dovuta alla rotazione della Terra. Variazione con la latitudine.

Sulla superficie terrestre l'attrazione è la risultante di due componenti: la gravitazione newtoniana (1), e l'accelerazione centripeta (a_c) dovuta alla rotazione della Terra. Questa seconda componente è massima all'equatore e nulla ai poli.

All'**equatore**: $a_c = \omega^2 r_e = 0.034 \text{ m/s}^2$ in cui $\omega = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ = velocità angolare della Terra;
 r_e = raggio equatoriale.

Questa componente è diretta in senso contrario a quella gravitazionale, e quindi il valore di g risulta : $g = (9.814 - 0.034) = 9.780 \text{ m/s}^2$ coerente coi valori sperimentali.

Tenendo conto che l'influenza della rotazione terrestre va diminuendo passando dall'equatore al polo, è possibile stabilire delle formule che danno il valore della gravità per un dato punto conoscendo la **latitudine** ϕ . Una delle più usate è :

$$g = 9.780318 (1 + 0.0053024 \sin^2 \phi - 0.0000059 \sin^2 2\phi) \quad (2)$$

“Anomalie locali della gravità “

Il valore di g ottenuto con la (2) presuppone la Terra a forma di ellissoide di rivoluzione con densità costante. Questo valore calcolato può differire sensibilmente da quello misurato sperimentalmente nello stesso punto. Queste differenze “Anomalie locali della gravità “ sono importanti per lo studio della densità locale della Terra.

Variatione della gravità col tempo.

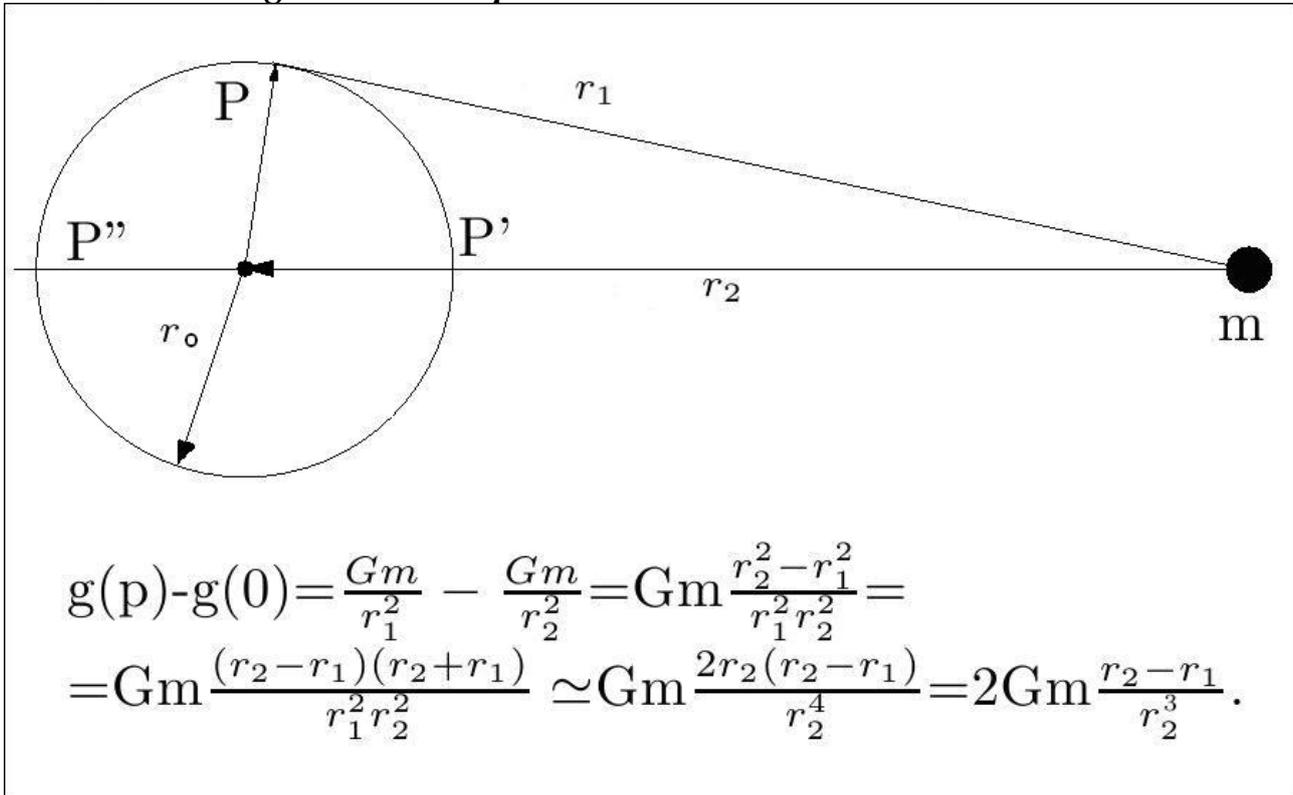


FIGURA 2.

La presenza di altri corpi celesti altera il valore dell’accelerazione di gravità.

Dalla Figura(2) notiamo che la perturbazione che un corpo di massa *m* crea in un punto *P* della superficie terrestre e’ uguale alla differenza dei campi gravitazionali provocati da questo corpo in *P* (*H_p*) ed al centro della Terra (*H₀*).

$$[H_p - H_0] = G m / r_1^2 - G m / r_2^2 = 2 G m (r_2 - r_1) / r_2^3$$

Dove *r₁* ed *r₂* sono le distanze del corpo considerato rispettivamente dal punto *P* e dal centro della Terra. Si e’ usata l’ approssimazione , considerato le grandi distanze, che *r₁* sia circa eguale ad *r₂*.

Se in Fig (2) consideriamo i punti *P’* e *P’’* , per essi : *r₂ - r₁* = ± *r₀* avremo
 | *H_p - H₀* | = Δ*g* = 2 *G m r₀* / *r₂³* . Ricordando che per la Terra *g* = *G M* / *r₀²*
 si ha: Δ*g/g* = 2 (*m/M*) (*r₀/r₂*)³

che rappresenta la variazione minima e massima della gravità sulla superficie terrestre dovuta ad un corpo di massa *m* distante *r₂* dal centro della Terra.

	<i>m/M</i>	<i>r₂/r₀</i>	<i>H₀/g</i>	Δ <i>g/g</i>
LUNA	0.0123	60.3	3.4 10 ⁻⁶	112 10 ⁻⁹
SOLE	332.999	23.50	604 10 ⁻⁶	52 10 ⁻⁹
VENERE	0.817	>6.5	< 19 10 ⁻⁹	< 6 10 ⁻¹²

GIOVE	317.9	> 98.7	< 33 10⁻⁹	< 0.7 10⁻¹²
SATURNO	95.1	> 200.0	< 2.4 10⁻⁹	< 24 10⁻¹⁵

Gli unici corpi del sistema solare che danno una variazione di g misurabile sperimentalmente sono la Luna ed il Sole. Combinando l'effetto del Sole e della Luna e le loro posizioni reciproche rispetto alla Terra in funzione del tempo il massimo di Δg può raggiungere il valore di ($1.6 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2$).

La variazione di accelerazione di gravità dovuta all'influenza di altri corpi celesti, prende il nome di marea gravimetrica, in analogia con le maree marine e terrestri, che non sono altro che spostamenti della superficie del mare e della Terra dovuti alla stessa causa.

Questo fenomeno non è altro che un caso particolare della perturbazione del valore locale di g provocato da masse estranee. Tale perturbazione può essere ben sensibile: avvicinando, alla distanza di 1 m, una massa di **1000 kg** che inizialmente era lontana, questa provoca una **variazione** di gravità :

$$\Delta g/g = 6.8 \cdot 10^{-9} \text{ in tale punto}$$

Influenza della variazione di pressione atmosferica.

Un aumento di pressione atmosferica in un dato luogo può causare una compressione maggiore e quindi, a causa della elasticità della Terra, uno schiacciamento che comporta un aumento di g . Questo viene parzialmente compensato dalla maggiore attrazione della colonna d'aria sovrastante. Una valutazione globale porta ad una variazione di g dell'ordine di ($0.04 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$) per variazione di pressione pari a 10 mbar.

Importanza di conoscere g .

Il gravimetro trasportabile studiato, per esempio, all' **I.N.R.I.M.** misura le variazioni dell'accelerazione di gravità con un' incertezza minore di (10^{-8} m/s^2).

A questo livello il valore convenzionale di $9,80665 \text{ m/s}^2$ è tutt' altro che costante, sia nello spazio che nel tempo.

La conoscenza accurata di g è necessaria non solo in metrologia (entra direttamente nella definizione di grandezze fondamentali come es: campioni di forza $F = m$; nella taratura e l'utilizzo degli strumenti di pesatura che sfruttano la misura della forza-peso, contribuendo così alla tutela del consumatore) ma anche in altri campi, come, per esempio, nella geodesia, geologia, geofisica, vulcanologia, balistica e persino nel commercio.

Dalla determinazione delle anomalie di gravità rilevabili sperimentalmente in un determinato luogo, si possono avere indicazioni molto importanti sulla densità locale del terreno, e quindi sulla presenza di giacimenti minerali o petroliferi, o per lo studio dell'orbita dei satelliti artificiali.

Dalle osservazioni temporali di g in zone vulcaniche è possibile studiare lo spostamento delle masse magmatiche sottostanti. I dati gravimetrici sono utilizzati per studiare i movimenti relativi di placche continentali e le variazioni del livello medio dei mari.

Le misure di g hanno dato i riferimenti assoluti [per la suddivisione del territorio Italiano in zone di eguale valore g (zone iso-gravimetriche)].

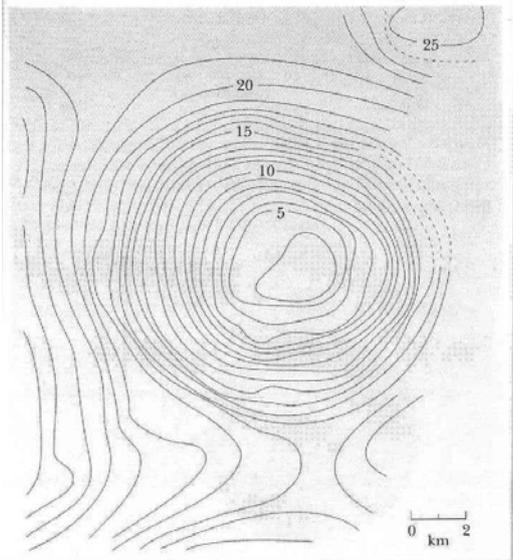


FIGURA 3. Curve isogravimetriche presso un giacimento

Bibliografia: Cerruti. L'accelerazione di gravità locale. Monografia 7. Mostra sulla metrologia. Torino/84

La misurazione dell'accelerazione di gravità

La misura assoluta di g avviene studiando fenomeni fisici attraverso la misurazione di grandezze fondamentali come la lunghezza ed il tempo (esempi tipici sono la caduta dei gravi, oppure oscillazioni di un pendolo).

Diamo una descrizione del principio su cui si basa la misura di g mediante le misurazioni del periodo di oscillazioni di un pendolo: in particolare del *pendolo reversibile* ideato da **Kater**.

Pendolo semplice. Richiami.

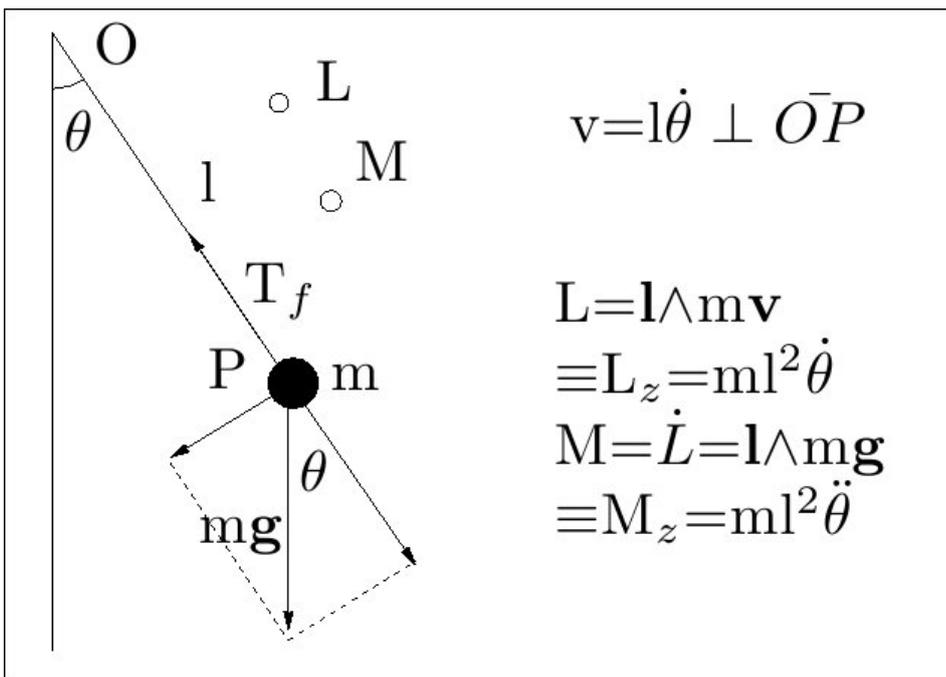


FIGURA 3.

Ricaviamo l'equazione di moto del pendolo semplice usando la seconda equazione cardinale del moto. (in grassetto le quantità vettoriali). Ci riferiamo alla Figura 3.

Nel vuoto e in assenza di attriti, le forze agenti sopra un punto materiale P di massa m sono la tensione del filo \mathbf{T}_f e la forza peso: rispetto al polo O la tensione del filo ha momento nullo, mentre il momento della forza peso \mathbf{M}_o e' perpendicolare al foglio e ha modulo $|\mathbf{M}_o| = m g l |\text{sen } \theta|$. Se si considera un asse z perpendicolare al foglio e orientato verso chi osserva la figura, la componente del momento della forza peso \mathbf{M}_o rispetto a tale asse e' $M_z = - m g l \text{sen } \theta$ (il segno negativo deriva dal fatto che la forza peso tende a produrre una rotazione oraria per $\theta > 0$ ed una rotazione antioraria per $\theta < 0$).

Poichè il momento della quantità di moto vale: $\mathbf{L}_o = m l^2 \boldsymbol{\omega}$, la componente di \mathbf{L}_o secondo l'asse z e': $m l^2 \omega = m l^2 d\theta/dt$

Dall' equazione $\mathbf{M}_o = d\mathbf{L}_o/dt$, considerando le componenti z dei due membri, si ricava:

L'equazione e' integrabile facendo uso di funzioni ellittiche ed il moto del pendolo risulta un moto oscillatorio di periodo:

$$T = (2\pi\sqrt{l/g}) \{ 1 + (\frac{1}{2})^2 \text{sen}^2(\theta_0/2) + (3/8)^2 \text{sen}^4(\theta_0/2) + \dots \}, \text{ dove } \theta_0 = \text{ampiezza oscillazione.}$$

T non dipende da m ma solo da l , g , e θ_0 .

Per piccole oscillazioni se θ e' piccolo $\text{sen } \theta \approx \theta$, $d^2\theta/dt^2 + \omega^2 \theta = 0$, il moto del pendolo e' armonico semplice $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0)$ di periodo $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}$

{ θ_0 = elongazione massima al tempo $(\omega t + \phi_0) = 0$; ϕ_0 = fase al tempo $t = 0$; ω = pulsazione }.

Il valore di $g = 4\pi^2 l/T^2$ si può ottenere dalla misura di l e T . La trattazione del pendolo semplice comporta: filo inestensibile e senza massa; m puntiforme.

Dal punto di vista pratico, come nel caso di una misurazione, questo non e' realizzabile ed abbiamo sempre a che fare con pendoli composti.

Pendolo composto.

Fig. 4a

Fig. 4b

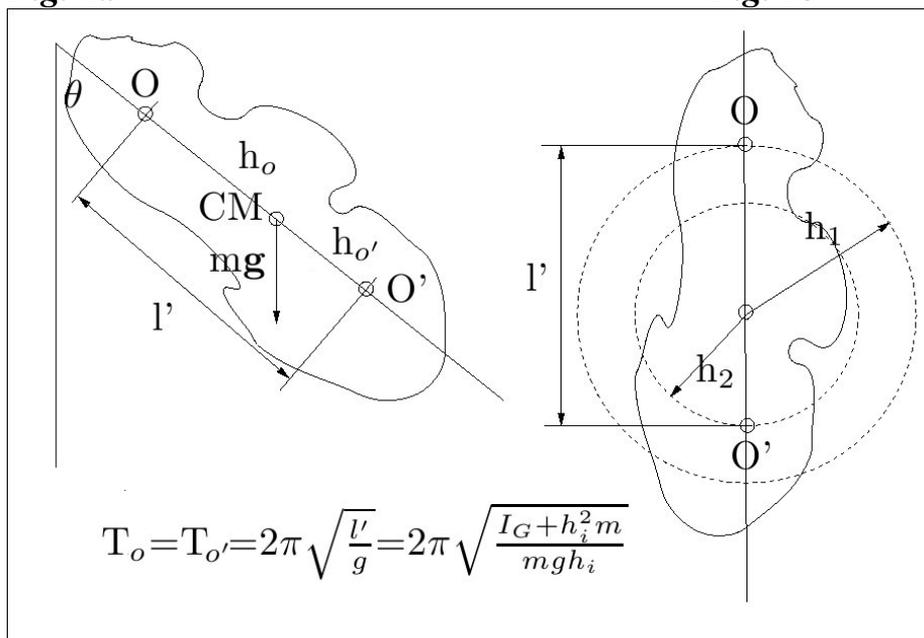


FIGURE: 4a,4b

Si consideri un corpo solido vincolato a ruotare attorno all'asse di traccia O [vedi figura 4°] ortogonale al foglio, asse di sospensione, rispetto al quale il corpo abbia momento di inerzia I_o .

Il suo moto è governato dalla *II equazione cardinale* del moto:

La risultante dei momenti delle forze esterne, agenti sopra un sistema materiale, rispetto ad un polo arbitrario fisso O è eguale alla derivata rispetto al tempo dei momenti delle quantità di moto rispetto allo stesso polo O.

$$\mathbf{M}_O^{(E)} = d\mathbf{L}_O/dt$$

Per la dinamica del corpo rigido, se indichiamo con M_z la componente di $\mathbf{M}_O^{(E)}$ secondo l'asse di rotazione z e con $L_z = I_z \omega_z$ la componente di \mathbf{L}_O lungo lo stesso asse avremo:

$$M_z = dL_z/dt = I_z d^2\theta/dt^2 \quad \{ I_z \text{ e } \omega_z \text{ rispettivamente : momento di inerzia e componente della velocità angolare rispetto all'asse } z \text{ di rotazione } \}$$

$$\text{Riferendoci al corpo che ruota attorno ad O: } M_o = I_o d^2\theta/dt^2$$

Nel caso del vuoto e senza resistenze passive, agiscono solo la forza peso e le forze vincolari che rispetto ad O hanno momento nullo.

Nel caso di un corpo gravitazionale di densità uniforme, M_o può essere espresso come il momento della risultante delle forze applicate al CM del corpo: $|M_o| = m g h_o \sin \theta$

{ m = massa totale del corpo; θ = angolo formato dal piano verticale e da quello congiungente l'asse di sospensione ed il centro di massa; h_o = distanza del CM da tale asse. }

$$\text{L'equazione diventa : } I_o d^2\theta/dt^2 = - m g h_o \sin \theta$$

{ il segno meno indica che il momento è di richiamo ossia tende a diminuire θ }

Se si introduce l'approssimazione, accettabile nella maggioranza dei casi pratici, che la massima apertura angolare θ_0 sia sufficientemente piccola ($<10-15$ gradi) in modo che $\sin \theta \approx \theta$, l'equazione diventa:

$$d^2\theta/dt^2 = - (m g h / I_o) \theta \quad \text{e quindi } d^2\theta/dt^2 + \omega^2 \theta = 0$$

Essa è l'equazione di un moto armonico semplice di pulsazione $\omega = \sqrt{[(m g h / I_o)]}$

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi_0)$$

$$\text{Il periodo di oscillazione risulta: } T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{[I_o / (m g h_o)]}$$

T dipende in generale dalla forma e dalla distribuzione delle masse rispetto al punto di sospensione O, dal momento di inerzia I_o rispetto all'asse di sospensione, dal valore della costante di accelerazione di gravità g e dall'ampiezza massima dell'oscillazione (per oscillazioni non piccole).

Nel caso particolare in cui il pendolo sia semplice $T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{(l' / g)}$ non dipende dalla massa ma solo dalla lunghezza l . Dato quindi un pendolo fisico, risulta ad esso associato un pendolo semplice sincrono (eguali periodi) di lunghezza $l' = I_o / (m h_o)$ detta **lunghezza ridotta** del pendolo fisico. Il valore di g si può esprimere come:

$$g = 4 \pi^2 (I_o / m h_o T^2) = 4 \pi^2 l' / T^2$$

Ciò permette di misurare g a partire dalla misura del periodo T e della massa m , dalla conoscenza di h_o e del momento di inerzia I_o del pendolo. Nella pratica questo procedimento non viene utilizzato principalmente perchè le misure di grandezze meccaniche quali il momento di inerzia I_o , sono di difficile esecuzione e sono meno precise di quelle effettuate su altre grandezze a parità di complessità dell'apparato sperimentale.

Pendolo reversibile

Il pendolo reversibile elimina queste difficoltà, riducendo la misura a quella di una serie di lunghezze e di intervalli di tempo. Si usa il pendolo di Kater (figura 5: pendolo in uso in laboratorio).

La lunghezza ridotta di un pendolo gode di una interessante proprietà: sulla retta ortogonale all'asse di sospensione e passante per O e per il CM si fissi un punto O' a distanza l' da O. (Figura 4a)

L'asse parallelo all'asse di sospensione e passante per O' si dirà asse di oscillazione del pendolo e risulterà reciproco dell'asse di sospensione, nel senso che T non muta cambiando fra loro le funzioni di O e O' : $T_o = T_{o'} = 2\pi\sqrt{l'/g}$ se il segmento $OO' = l'$ { l' = lunghezza ridotta }.

Infatti partiamo dall'ipotesi che i periodi di oscillazione siano eguali rispetto ad O e O' ed uguali a quello di lunghezza ridotta l' :

$$T_o = 2\pi\sqrt{I_o/(mgh_o)}; T_{o'} = 2\pi\sqrt{I_{o'}/(mgh_{o'})}; T = 2\pi\sqrt{l'/g}$$

$$2\pi\sqrt{I_o/(mgh_o)} = 2\pi\sqrt{I_{o'}/(mgh_{o'})} = 2\pi\sqrt{l'/g} \text{ e quindi}$$

$$I_o/(mgh_o) = I_{o'}/(mgh_{o'}) = l'/g$$

Da questa si ottengono due equazioni : $I_o = l' m h_o$

$$I_{o'} = l' m h_{o'}$$

Ricordando il teorema di Steiner $I_o = I_G + m h_o^2$

$$I_{o'} = I_G + m h_{o'}^2$$

{ I_G = momento di inerzia rispetto ad un asse parallelo all'asse di sospensione passante per il CM }

$$\text{si ottiene : } I_G + m h_o^2 = l' m h_o$$

$$I_G + m h_{o'}^2 = l' m h_{o'}$$

sottraendo membro a membro si ottiene:

$$m(h_o^2 - h_{o'}^2) = l' m (h_o - h_{o'}) \text{ e quindi: } m(h_o - h_{o'})(h_o + h_{o'}) = l' m (h_o - h_{o'})$$

supposto $h_o \neq h_{o'}$ si ottiene semplificando:

$$h_o + h_{o'} = l'$$

La lunghezza ridotta l' del pendolo composto corrisponde alla lunghezza effettiva di un pendolo semplice di eguale periodo T .

Non e' sufficiente l'eguaglianza dei due periodi $T_o = T_{o'}$ perchè gli assi O e O' siano reciproci, ma G non si deve trovare ad eguale distanza dai due assi: $h_o \neq h_{o'}$

Nota 1. (Fig 4b): Il moto del pendolo composto e' identico per tutti i possibili assi di rotazione paralleli a quello dato e distanti da G h_1 . Esistono due fasci di rette parallele all'asse u passante per G, costituenti due cilindri circolari (cilindri coniugati) aventi u come asse comune e di raggi h_1 e h_2 tali che il periodo delle oscillazioni attorno ad una qualsiasi di queste rette, considerate come asse di sospensione, e' lo stesso; $(h_1 + h_2) = l'$ lunghezza ridotta del pendolo composto.

Di conseguenza, lungo la congiungente OO' si hanno due coppie di punti coniugati aventi egual periodo.

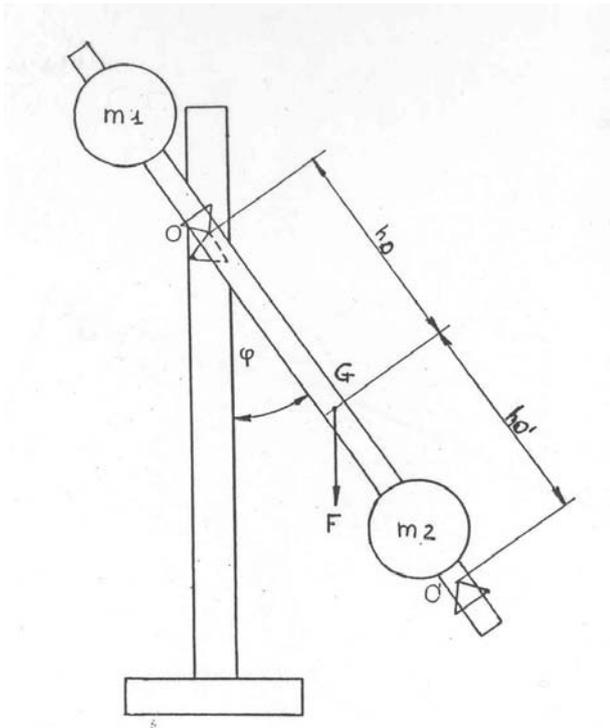


FIGURA 5. Schema pendolo reversibile in uso.

La reciprocità dei due assi a distanza l' e' sfruttata nel **pendolo reversibile**.

Il pendolo fisico che viene utilizzato in laboratorio (Fig. 5) e' composto da un'asta dotata di due coltelli di sospensione ortogonali all'asta a sezione triangolare, i quali sono posti, in posizione fissa, da parti opposte rispetto al centro di massa, G. Lungo l'asta possono venire posizionate due masse scorrevoli.

Il tutto viene montato su un dispositivo di sostegno in modo che l'asta risulti verticale.

E' realizzato in modo tale che i centri di massa delle varie parti costituenti siano allineate su di una retta intersecante gli assi definiti dai coltelli.

In tale modo l'oscillazione del pendolo avviene, nei limiti sperimentali, su di un piano verticale, ortogonale all'asse di rotazione e passante per il centro di massa del sistema.

Se l'asta risulta simmetrica e le masse scorrevoli eguali in massa e forma la condizione $h_o \neq h_o'$ si esprime semplicemente nel fatto che le disposizioni delle masse non devono essere simmetriche rispetto al baricentro dell'asta.

Esso ha due assi di sospensione O e O' (i due coltelli), due masse scorrevoli m_1 e m_2 lungo l'asta mediante le quali e' possibile variare la distribuzione di massa, e quindi la posizione di G, ed il periodo di oscillazione del pendolo.

Tenendo fissa la massa m_1 (**massa fissa**: posta all'esterno dei due coltelli) e facendo scorrere m_2 (**massa mobile**) lungo l'asse si variano l_o, l_o', h_o, h_o' e quindi i periodi: $T_o = 2\pi \sqrt{[I_o / (m g h_o)]}$ e $T_{o'} = 2\pi \sqrt{[I_o / (m g h_o')]}$

Se si riesce a trovare una disposizione per cui i due periodi $T_o, T_{o'}$ per i due assi O e O' coincidono, allora la distanza tra i due coltelli (l') e' proprio la lunghezza ridotta del pendolo per la quale si ha la relazione: $T = 2\pi \sqrt{(l' / g)}$, da cui si risale a:

$$g = 4 \pi^2 l' / T^2$$

Le misure necessarie si riducono ad una misura di lunghezza: l' = distanza tra i coltelli e una misura di tempo T = periodo di oscillazione comune in O e O'.

Le misure e i periodi di oscillazione vengono effettuate utilizzando alternativamente i due coltelli di sospensione, col variare della posizione sull'asta della massa scorrevole.

Modo di sperimentare. Analisi dati (vedere apposite schede)

Si lascia fissa una delle due masse (massa fissa) e si allontana l'altra (massa mobile) a passi di circa 10 cm dalla posizione precedente. Si indichi con d la distanza tra la massa fissa e mobile (misurata tra due apposite tacche). Si fa oscillare il pendolo in O, e successivamente in O', senza spostare le masse. Prima di modificare la distanza d tra le due masse m_1 e m_2 si annota in tabella tale distanza insieme ai periodi T_o e T_o'

Si procede così di seguito finché le due masse sono a distanza massima tra di loro.

Si costruisce il grafico $T_o(d)$ e $T_o'(d)$. [vedi grafici su carta millimetrata in appendice 1]

La teoria ci dice che: $T_o = 2\pi\sqrt{[(I_G + mho^2)/(mgho)]}$; $T_o' = 2\pi\sqrt{[(I_G + mho'^2)/(mgho')]}$

Poiché lo spostamento delle masse lungo l'asta verso il coltello O' corrisponde ad un aumento della distanza ho del baricentro da O, i periodi T_o e T_o' riportati in funzione di d o di ho e ho' dovrebbero seguire una legge del tipo:

$$T(ho) = (2\pi/\sqrt{g})/\sqrt{[(I_G/mho) + ho]} \text{ e } T(h'o) = (2\pi/\sqrt{g})/\sqrt{[(I_G/mho') + ho']}$$

Il periodo tende ad assumere valore infinito se l'asse di sospensione approssima il centro di massa e un andamento con legge \sqrt{ho} se si allontana da esso.

Per $ho \rightarrow 0$ $T(ho) \rightarrow \infty$; per $ho \rightarrow \infty$ $T \approx (2\pi/\sqrt{g})\sqrt{ho}$

Il periodo di oscillazione del pendolo presenta un minimo nelle condizioni

$$dT/dho = d/dho \{ \sqrt{[(I_G/mho) + ho]} \} = 0 \text{ : ossia } T = T_{\min} \text{ per } ho = \sqrt{I_G/m};$$

$$T_{\min} = 2\pi\sqrt{[(2m/g)(I_G/m)^{1/2}]}$$

Il pendolo può presentare lo stesso periodo per due valori rappresentati dai valori $T = T(ho) = cost = T(ho')$ [vedi nota 1 pag9]

L'andamento dei periodi di oscillazione sui due coltelli O ed O' al variare della massa mobile ha andamento, in prima approssimazione, parabolico. Graficare $T_o(d)$ e $T_o'(d)$. L'intersezione delle due curve ottenute dall'interpolazione dei dati sperimentali indicano approssimativamente due possibili posizioni della massa mobile che danno luogo a periodi di oscillazione eguali. Si sceglie una di queste e si posiziona la massa mobile in prossimità di quella prescelta. Si ripete il procedimento di misurazione per la determinazione dei periodi T_o e T_o' facendo ora variare d di passo pari a 2-3 cm. Si costruisce un nuovo grafico interpolando ora linearmente gli andamenti $T_o(d)$ e $T_o'(d)$. L'intersezione delle due curve (rette) ci fornisce il valore T^* che assume il pendolo quando oscilla sui due coltelli con isocronismo. Si ripete il procedimento per la seconda intersezione. Si valuta la consistenza dei due valori T_o^* e $T_o'^*$ come valore di periodo si può assumere il loro valore medio.

Si può procedere alla misura di T^* in maniera del tutto **empirica**, posizionando la massa mobile nel punto di intersezione delle rette e rimisurando, in tale punto, il valore del periodo T_o e T_o' . L'incertezza di queste ultime misure è pari alla sensibilità del cronometro. Come valore di T^* si assume la media dei due valori misurati: T_o e T_o' , dopo il controllo della consistenza dei due valori stessi. Si ripete il procedimento per la seconda intersezione. Eseguito un test di compatibilità, come valore del periodo si assume la media dei due valori T^* ottenuti. Questo metodo, interamente empirico, è quello per primo da seguire e con il quale si perviene alla determinazione di g .

Valutazione delle incertezze.

Il valore di g si ottiene dalla:

$$g = 4\pi^2 l' / T^{*2}$$

L'incertezza sul valore della lunghezza l' è data dall'errore di sensibilità del metro che viene usato per determinare la distanza l' tra i coltelli del pendolo.

Preliminarmente, quando si rilevano i tempi mediante l'uso della fotocellula, per determinare le incertezze di ogni singola misurazione di $T_o(d_i)$ o $T_o'(d_i)$ si devono effettuare prove ripetute di $T(d_i)$ in una data posizione della massa mobile. Se i valori $T(d_i)$ non variano, si assume come errore sulla singola misura di ogni $T(d_i)$ l'errore di sensibilità del cronometro. In caso contrario la Dev.

Standard delle misure fornirà il valore dell'errore della singola misura su ogni T (di) , che comunque non potrà essere inferiore alla sensibilità del cronometro.

Per i valori di T* , ottenuti dalla misura interamente empirica, σ_{T^*} si ottiene assumendo come errori di T₀ e T₀, σ_{T_0} , σ_{T_0} , l'errore di sensibilità del cronometro.

Nel caso T* si ottenga come valore dell'intersezione delle due rette, l'incertezza sulla misura dei periodi T* e' data propagando l'errore sul valore dell'intersezione T* = f(a,b,c,d) con a,b,c,d, i parametri delle due rette che interpolano i dati. Si ricordi che gli errori su parametri , ad es: a e b , possono essere correlati . $\sigma_{T^*} = \sqrt{ [(\delta T^*/\delta a)^2 \sigma_a^2 + \dots] }$

NOTA: Se in luogo della rilevazione dei tempi mediante l'uso di fotocellule ed errori di sensibilità di circa 1 millesimo di secondo, si rilevassero i tempi manualmente con un cronometro (ad es. centesimale) in singoli valori di T(di) si determinerebbe molto bene , mediando se il caso su un grande numero di oscillazioni. In tale caso una misura preliminare di N oscillazioni ripetuta piu' volte fornisce l'errore σ_{tN} su N oscillazioni. L'errore sul periodo si assume come: $\sigma_{T_i} = \sigma_{tN} / N$. Le N oscillazioni si assume siano isocrone.

Il valore di g si ottiene dalla :

$$g = 4 \pi^2 l' / T^{*2}$$

L'incertezza relativa su g assumendo indipendenti gli errori su l e T *vale:

$$\sigma_g / g = \sqrt{ [(\sigma_l / l')^2 + (2 \sigma_{T^*} / T^*)^2] }$$

oppure

$$\sigma_g = \sqrt{ [(\delta g / \delta l)^2 \sigma_l^2 + (\delta g / \delta T^*)^2 \sigma_{T^*}^2] } = \sqrt{ [(4 \pi^2 / T^{*2})^2 \sigma_l^2 + (- 8 \pi^2 l' / T^{*3})^2 \sigma_{T^*}^2] }$$

Se si desidera che i due termini diano contributi analoghi all'errore su g , l'errore % su T* deve essere metà di quello su l' .

Un modo alternativo e' quello di procedere alle(9 o 10) misurazioni di T₀ e T₀' ottenute spostando la massa mobile con passo regolare di 10 cm. Con il metodo dei minimi quadrati si ottengono quindi le migliori curve(parabole o cubiche) che interpolano gli andamenti T₀(d_i) e T₀'(d_i).

Si ottengono per es. nel caso di parabole due funzioni

$$T_0(d) = A + B d + C d^2 \text{ e } T_0'(d) = A' + B' d + C' d^2.$$

Si valutano i valori di T* dalle due intersezioni delle due parabole. Prima di mediare i due valori se ne valuta la compatibilità.

Come errori sui singoli valori di T₀(d_i) e T₀'(d_i) si assume l'errore di sensibilità del cronometro. Come errore su T* = f(A,B,C, A', B',C') ricavato dalla intersezione delle due curve si deve propagare in f l'errore sui parametri ottenuti dal fit delle due curve. (vedere il file di Mathematica fornito come supporto per questo procedimento, e le figure in appendice 2). Il test del χ^2 fornisce l'indicazione se le curve sperimentali sono ben interpolate da parabole, in caso contrario si procede ad interpolare con cubiche ed a ripetere il procedimento per valutare i valori T* con gli errori.

Possibili Errori Sistemati

L'espressione $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ vale solo nel limite di oscillazione di ampiezza infinitesima, mentre una formula che meglio approssima la realtà e':

$T = (2\pi \sqrt{l/g}) \{ 1 + (1/2)^2 \text{sen}^2(\theta_0/2) + \dots \} = T_0 \{ 1 + (1/2)^2 \text{sen}^2(\theta_0/2) + \dots \}$ la quale mostra come il periodo sia una funzione leggermente crescente di θ (ampiezza dell'oscillazione). L'uso della formula di prima approssimazione per determinare g comporta quindi una sottostima che diviene tanto piu' sensibile quanto maggiore e' θ_0 , in quanto si usa in luogo di T₀ la durata T di una oscillazione reale avente ampiezza non nulla e perciò sempre superiore a T₀.

Per un angolo di 10 gradi la correzione e' dell'ordine di 2 parti su 10³
Valutare la correzione per le misure ottenute.

La medesima misura e' affetta anche da un altro errore sistematico originato dal fatto che il pendolo non ruota oscillando attorno al filo orizzontale del coltello di sospensione, ma compie un moto in cui il profilo del taglio del coltello (approssimativamente un cilindro di raggio di curvatura minimo dell'ordine di centesimi di millimetro) rotola sul piano di appoggio. La formula corretta risulta $T = T_0 \sqrt{1 - r/a}$ (in cui r e' il raggio di curvatura del filo del coltello ed a la distanza del centro di massa dal punto di appoggio) Si ha che il T reale e' sempre inferiore a T_0 il che comporta una sovrastima di g { per: $r = 5 \cdot 10^{-2}$ mm; $a = 500$ mm la correzione e' dell'ordine di $\sqrt{1 - 10^{-4}}$
 $= \sqrt{0.9999} = 0.99995$

La correzione risulta di alcune parti su 10⁵

Abbiamo assunto il moto del pendolo nel vuoto trascurando la spinta di Archimede e l'attrito dell'aria. Nel caso di pendolo semplice, indicando con V il volume della massa m , ρ la densità del corpo e ρ_a quella dell'aria, l'espressione:

$$m l^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - m g l \sin \theta \quad \text{va sostituita con:}$$

$$(V \rho) l^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - V (\rho - \rho_a) g l \sin \theta$$

$$\text{da cui } \frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \left\{ \frac{\rho - \rho_a}{\rho} \right\} g \sin \theta$$

ed il periodo diventa:

$$T = T_0 \sqrt{[\rho - \rho_a] / \rho} \approx T_0 (1 + \rho_a / 2\rho)$$

Per valori: $\rho_a = 1.29 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$; $\rho = 7.9 \text{ g/cm}^3$ la correzione e' dell'ordine di 8 parti su 10⁵

Ne caso del pendolo semplice si è assunta una massa puntiforme m oscillante a distanza l , con filo in estensibile e privo di massa.

Valutate la correzione al valore di g se si assume una sfera di massa m e di raggio R , appesa al filo di lunghezza l e massa m_l . [Facendo uso del teorema di Steiner si valuti il momento di inerzia, rispetto all'asse di oscillazione. Si faccia uso dei valori di l , m , R riferiti al pendolo usato in Lab. 1. Come massa m_l si usi il valore realistico di $m_l = 1 \text{ g}$.]

Alcuni commenti conclusivi.

Kater dimostrò che il pendolo reversibile e' equivalente ad uno semplice di lunghezza l pari alla distanza tra due punti fissi. Questa distanza può essere misurata con grande precisione, ricorrendo eventualmente a metodi interferometrici. Pure il periodo T si determina molto bene, mediando se il caso su un grande numero di oscillazioni.

Le eventuali vibrazioni del terreno non influenzano apprezzabilmente il risultato finale, essendo il valore medio delle loro ampiezze nullo se consideriamo il tempo di misurazione. L'attrito dell'aria si può eliminare lavorando sotto vuoto.

La migliore accuratezza che fu ottenuta con questo metodo e' dell'ordine di poche parti in 10⁶. Le cause di questa limitazione sono da ricercarsi negli effetti di attrito nei punti di sospensione del pendolo, tra coltello e supporto e, inoltre, nella presenza di flessioni dell'asta che altera il momento di inerzia del pendolo e nello stesso tempo applica una coppia al punto di vincolo.

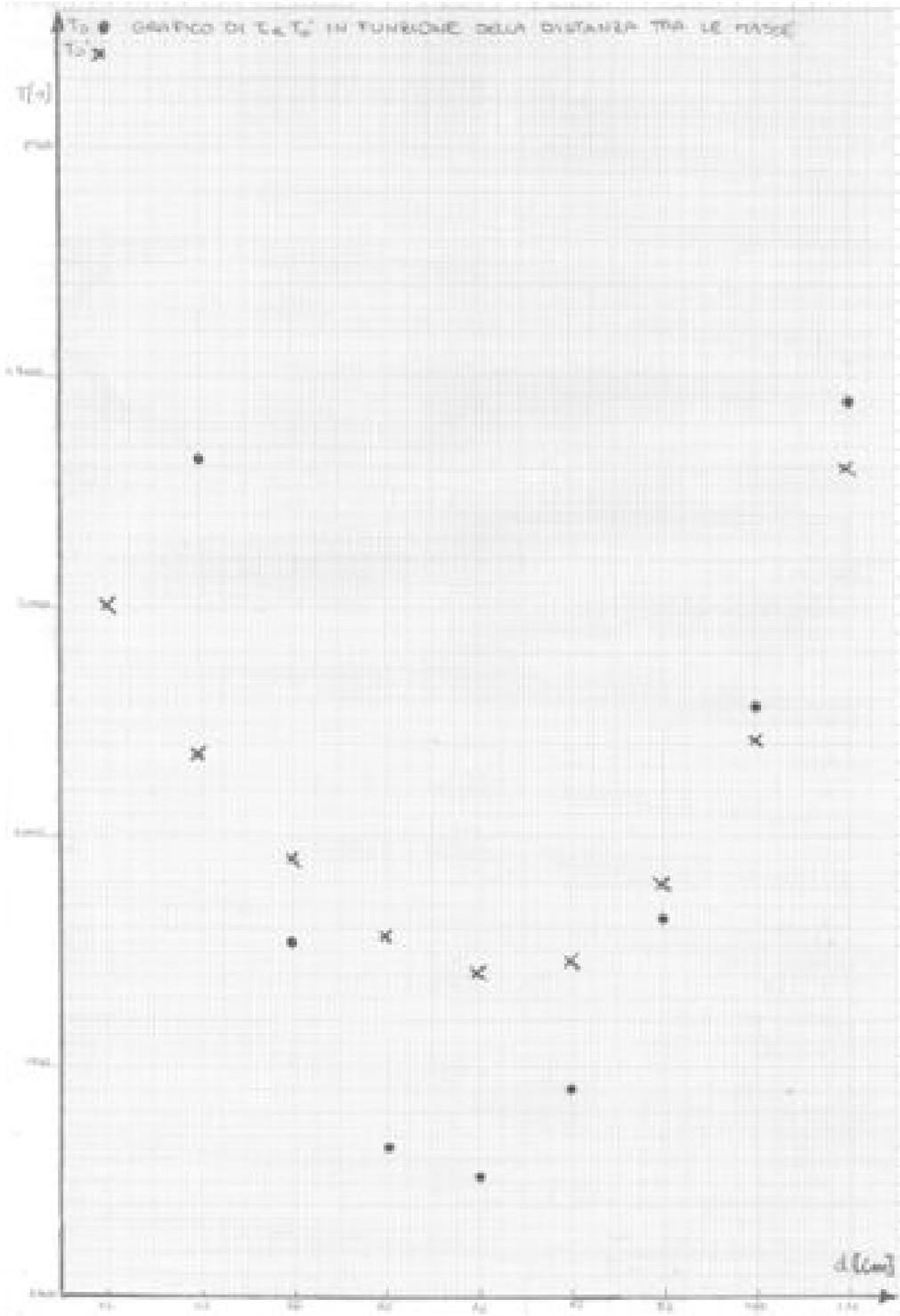
Le difficoltà incontrate nella valutazione di queste cause di errore hanno limitato l'impiego di questo metodo di misurazione fino alla prima metà del nostro secolo.

Questo e' avvenuto contemporaneamente allo sviluppo di tecniche di misurazione di intervalli sempre più brevi, che ha reso possibile l'introduzione di misurazioni basate sulla caduta libera dei gravi.

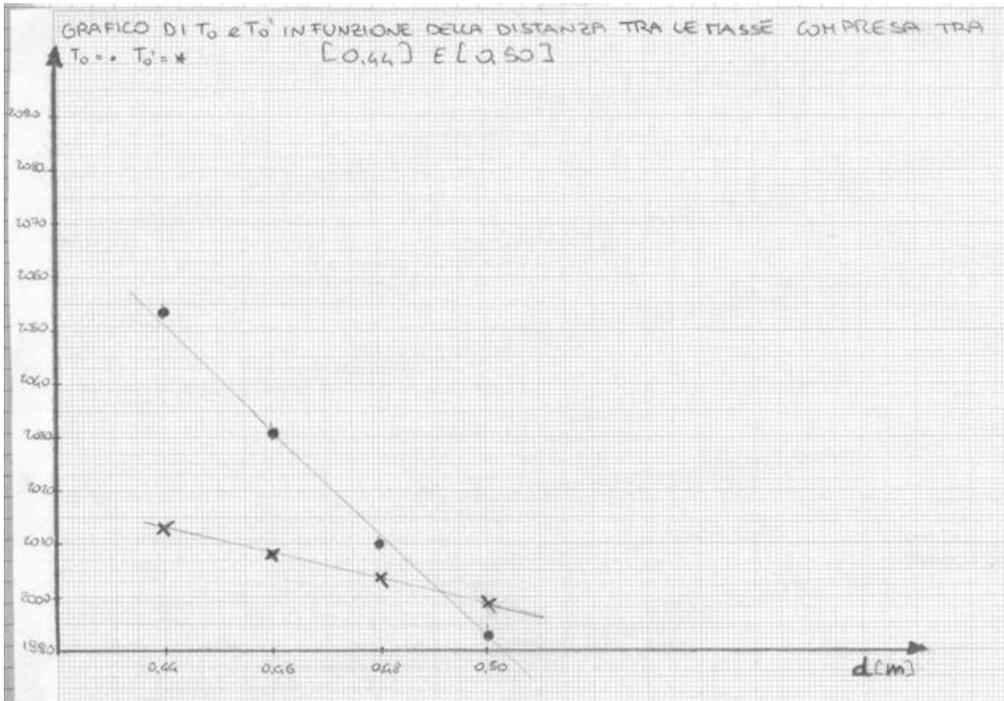
Appendice 1:

Riportiamo in seguito alcuni esempi di grafici:

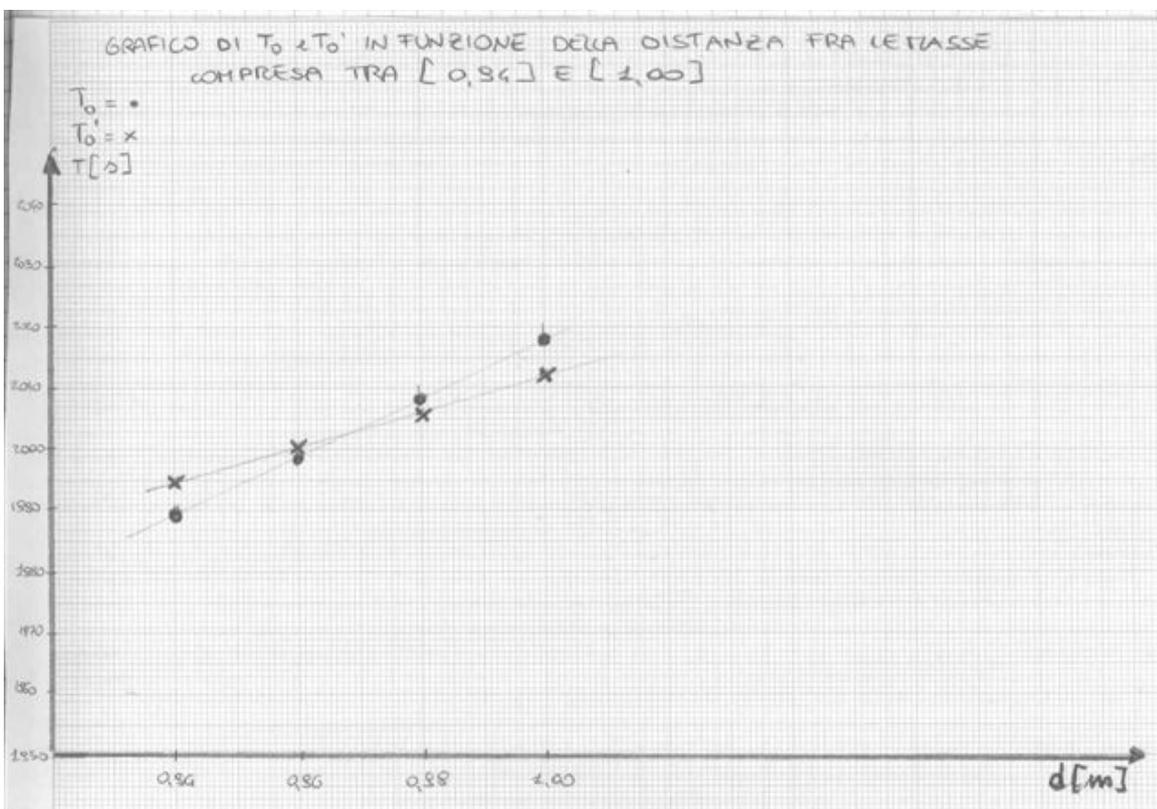
- I) Valori dei periodi di oscillazione T_0 e T_0' per diversi valori della distanza d tra le masse (angolo di oscillazione 2° gradi)



II) Periodi di oscillazione del pendolo T_0 e T_0' in funzione della distanza d tra le masse in un intorno della prima posizione di reciprocità:



III) Periodi di oscillazione del pendolo T_0 e T_0' in funzione della distanza d tra le masse in un intorno della seconda posizione di reciprocità:



Appendice 2:

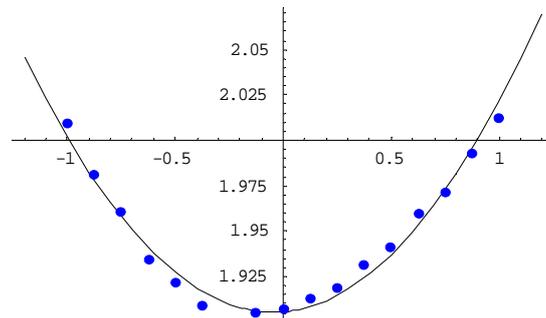


Fig 1: andamento del periodo attorno al coltello O in funzione del tempo. I punti sono interpolati, previa traslazione dell'asse delle ascisse nel baricentro dei valori d_i , con una parabola (vedi programma di Mathematica)

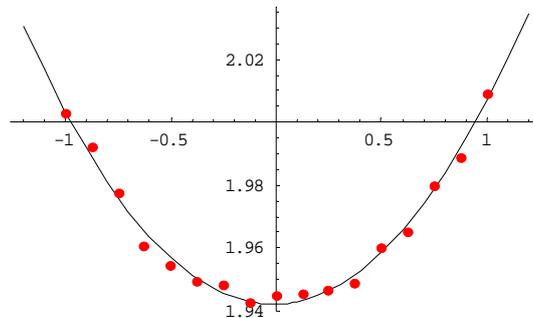


Fig2: andamento del periodo attorno al coltello O¹ in funzione del tempo. I punti sono interpolati, previa traslazione dell'asse delle ascisse nel baricentro dei valori d_i , con una parabola (vedi programma di Mathematica)

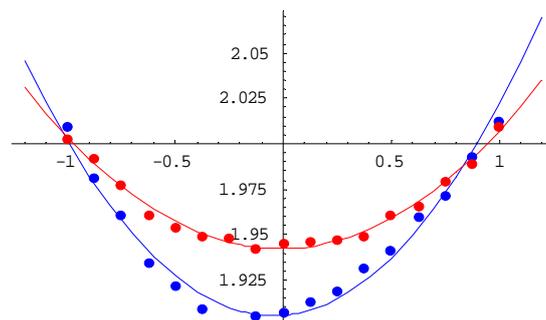


Fig 3: calcolo del valore del periodo in corrispondenza dell'intersezione delle due parabole

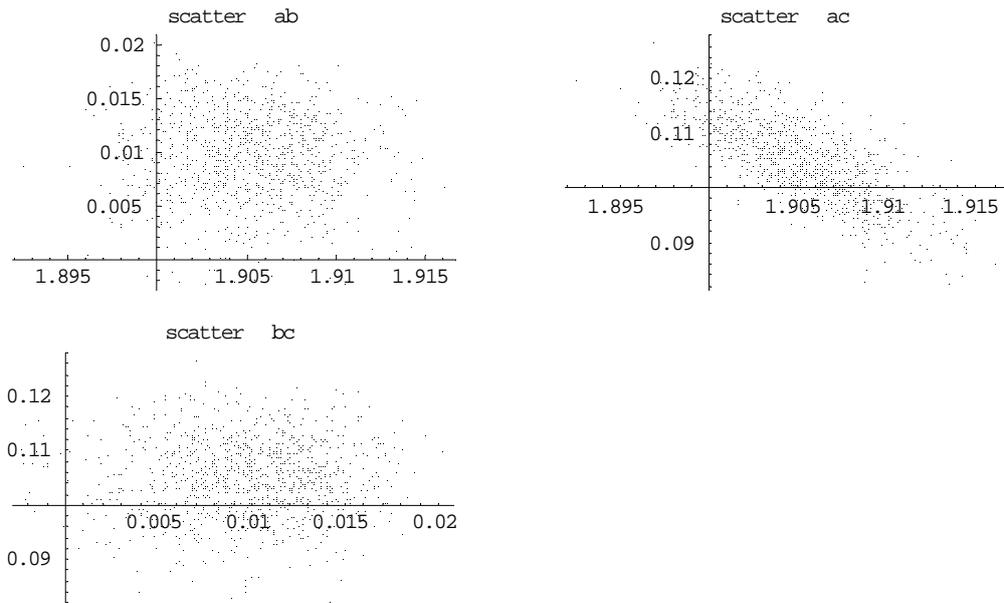


Fig 4: correlazione tra i coefficienti dei parametri di una parabola $T=A+ Bd+Cd^2$ ottenuti col metodo dei minimi quadrati. La figura riporta il coefficiente di correlazione (covarianza) tra i parametri A-B, A-C, B-C. Come si nota i coefficienti di correlazione A-B e B-C sono fra di loro scorrelati, infatti il diagramma mostra un coefficiente di correlazione prossimo a 0 . I coefficienti A e C sono invece correlati come mostrato dal diagramma che indica una correlazione diversa da 0 e negativa. La correlazione pari a 0 tra i coefficienti A e B e tra i coefficienti B e C è ottenuta grazie alla traslazione dell'asse delle ascisse nel baricentro delle d_i

Preso la serie di punti $T(d_i) \pm \sigma_i$ e interpolandoli si ottiene una parabola di coefficienti A_i, B_i, C_i . Facendo variare ogni valore d_i entro l'errore σ_i secondo, una distribuzione gaussiana, si ottiene un'altra serie di dati che interpolati forniscono altri coefficienti A_i, B_i, C_i . Il procedimento si ripete N volte ottenendo una serie del valore degli stessi con $i=1 \dots N$.

I diagrammi riportati sopra si ottengono mettendo in correlazione i vari coefficienti ottenuti.