## Minimi Quadrati Ricorsivi

Fino ad ora abbiamo studiato due diversi metodi per l'identificazione dei modelli:

- **Minimi quadrati**, utilizzato per l'identificazione dei modelli ARX, in cui i dati a disposizione vengono elaborati tutti insieme per ottenere la stima dei parametri.
- **Massima verosimiglianza**, utilizzato per l'identificazione dei modelli ARMAX, la cui stima è ottenuta per affinamenti progressivi: ad ogni iterazione i dati vengono elaborati tutti insieme per valutare il vettore dei parametri.

Ciò che accomuna questi due metodi, non a caso chiamati **"metodi di identificazione a lotti",** è la loro particolarità nello stimare i parametri del modello elaborando i dati tutti insieme (in un unico lotto), ovvero: terminata la fase di acquisizione dati inizia la fase di elaborazione da cui si ottiene la stima dei parametri.
Un' ulteriore caratteristica di questi metodi è che non permettono di fare una **stima online**.
Occorre infatti aspettare N campioni prima di poter fare l'identificazione del sistema.
Esistono molte situazioni invece in cui la stima deve essere eseguita in tempo reale.
Per questo tipo di problemi, assumono particolare importanza le tecniche di stima ricorsiva**,** in cui l'aggiornamento dei parametri viene effettuato on-line, man mano che i dati vengono acquisiti; infatti, utilizzando **algoritmi ricorsivi**, le fasi di acquisizione e di elaborazione dei dati procedono simultaneamente.
Nei problemi di identificazione in cui i dati arrivano progressivamente, memorizzare tutte le informazioni e ricalcolare la stima ad ogni istante di campionamento può essere eccessivamente costoso dal punto di vista computazionale.

Vi sono 3 metodi di identificazione ricorsiva:
**1.Minimi quadrati ricorsivi (RLS – Recursive Least Squares)** : si usa per l'identificazione dei modelli ARX
**2.Massima verosimiglianza ricorsiva (RML – Recursive Maximum Likehood)** : è usato per l'identificazione dei modelli ARMAX.
3. **Minimi quadrati estesi (ELS – Extended Least Squares)**: è usato per stimare i modelli ARMAX.

**Minimi quadrati ricorsivi**
Il metodo dei **minimi quadrati ricorsivi** per poter aggiornare "**in linea**" i parametri del sistema di interesse, modifica l'algoritmo dei minimi quadrati di batch, fornendone una formulazione ricorsiva che consenta di aggiornare la stima al passo precedente, correggendola mediante un termine che dipende dall'innovazione apportata dall'ultimo dato acquisito.
Il calcolo della stima , infatti, può essere impostato in modo che il risultato al passo k si ottenga aggiornando quello ricavato al passo k – 1 ,senza dover riconsiderare tutti i dati globalmente.
L'informazione passata, condensata in $\vartheta(k-1)$, viene corretta aggiungendovi un termine proporzionale all'errore di predizione, cioè alla differenza tra l'osservazione y(k) e il valore predetto $\hat{y}(k \mid k-1)$.
Il metodo si utilizza per la stima dei modelli AR ed ARX e prevede di ottenere tre diverse forme ricorsive per esprimere la stima dei parametri, in un determinato istante, partendo dalla forma base del *metodo dei minimi quadrati*.

Dell'algoritmo RLS sono disponibili tre forme:
- **RLS Forma I:** non si implementa mai nella pratica, poiché richiede inversione di matrici e può provocare problemi numerici;
- **RLS Forma II:** è stabile ma si applica solo nel caso di pochi parametri o quando si ha a disposizione un'elevata potenza di calcolo;
- **RLS Forma III:** si applica quando si hanno risorse limitate.

Il procedimento è il seguente:

- Si considera l'espressione base dei minimi quadrati

$$\hat{\vartheta}(t) = S(t)^{-1}\sum_{i=1}^{t}\varphi(i)y(i) \qquad (1) \qquad\qquad dove \quad S(t) = \sum_{i=1}^{t}\varphi(i)\varphi(i)^T$$

- Si riscrive il termine $\sum_{i=1}^{t}\varphi(i)y(i)$ come somma tra i dati al tempo $t$ ed i dati negli istanti precedenti, a partire dall'istante *t-1* , ottenendo

$$\sum_{i=1}^{t}\varphi(i)y(i) = \sum_{i=1}^{t-1}[\varphi(i)y(i)] + \varphi(t)y(t) \qquad (2)$$

  Stesso discorso può essere fatto per il termine *S(t)* , perciò

$$S(t) = S(t-1) + \varphi(t)\varphi(t)^T \qquad\qquad da\ cui \quad S(t-1) = S(t) - \varphi(t)\varphi(t)^T \qquad (3)$$

$$in\ cui \qquad S(t-1) = \sum_{i=1}^{t-1}\varphi(i)\varphi(i)^T$$

- Si scrive la (1) esprimendola al tempo *t-1* , per stimare i parametri all'istante *t-1*

$$\hat{\vartheta}(t-1) = S(t-1)^{-1}\sum_{i=1}^{t-1}\varphi(i)y(i) \qquad\qquad da\ cui \quad \sum_{i=1}^{t-1}\varphi(i)y(i) = S(t-1)\hat{\vartheta}(t-1) \qquad (4)$$

- Si sostituisce l'espressione (4) nella (2) e si ha:

$$\sum_{i=1}^{t}\varphi(i)y(i) = S(t-1)\hat{\vartheta}(t-1) + \varphi(t)y(t) \qquad (5)$$

- Si sostituisce l'espressione (3) nella (5) e si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{t}\varphi(i)y(i) = [S(t) - \varphi(t)\varphi(t)^T]\hat{\vartheta}(t-1) + \varphi(t)y(t) \qquad (6)$$

- Si sostituisce l'espressione (6) nella (1) e si può scrivere

$$\hat{\vartheta}(t) = S(t)^{-1}\{[S(t) - \varphi(t)\varphi(t)^T]\hat{\vartheta}(t-1) + \varphi(t)y(t)\} \qquad (7)$$

- Si sciolgono le parentesi nell'espressione (7) ottenendo

$$\hat{\vartheta}(t) = S(t)^{-1}S(t)\hat{\vartheta}(t-1) - S(t)^{-1}\varphi(t)\varphi(t)^T\hat{\vartheta}(t-1) + S(t)^{-1}\varphi(t)y(t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \hat{\vartheta}(t) = \hat{\vartheta}(t-1) + S(t)^{-1}\varphi(t)\left[-\varphi(t)^T\hat{\vartheta}(t-1) + y(t)\right] \qquad (8)$$

che risulta essere l'espressione ricorsiva cercata.

- Studiando l'espressione (8) si definiscono i due termini $K(t)$ ed $\varepsilon(t)$ come segue:

$$K(t) = S(t)^{-1}\varphi(t) \qquad e \qquad \varepsilon(t) = -\varphi(t)^T\hat{\vartheta}(t-1) + y(t)$$

A questo punto può essere ottenuta la ***prima forma*** del metodo dei *minimi quadrati ricorsivi* :

$$\begin{aligned}
&\vartheta_t = \vartheta_{t-1} + K(t)\varepsilon(t) && \textit{ricorsione base}\\
&K(t) = S(t)^{-1}\varphi(t) && \textit{definizione}\\
&\varepsilon(t) = y(t) - \varphi(t)^T\hat{\vartheta}_{t-1} && \textit{definizione}\\
&S(t) = S(t-1) + \varphi(t)\varphi(t)^T && \textit{ricorsione ausiliaria}
\end{aligned}$$

Come si può osservare, se l'errore di predizione $\varepsilon(t)$ è nullo al tempo *t* allora il termine di aggiornamento della stima $k(t)\varepsilon(t)$ risulta nullo e la stima non viene modificata.
Al contrario, se l'errore di predizione $\varepsilon(t)$ non è nullo al tempo *t* allora la stima sarà modificata di una quantità pari al termine di aggiornamento che prende il nome di *guadagno dell'algoritmo*.

Nella **RLS Forma I**, la matrice S(t) diverge. Pertanto si definisce una matrice R(t) alternativa,riscrivendo l'algoritmo RLS in un'altra forma , introducendo :

$$R(t) = \left(\frac{1}{t}\right)S(t)$$

Prendendo la "ricorsione ausiliaria" della **RLS Forma I** e dividendo i due membri per **"t"** , si ottiene:

$$\left(\frac{1}{t}\right)S(t) = \left(\frac{1}{t}\right)S(t-1) + \left(\frac{1}{t}\right)\varphi(t)\varphi(t)^T \quad \rightarrow \quad \left(\frac{t-1}{t}\right)\left(\frac{1}{t-1}\right)S(t-1) + \left(\frac{1}{t}\right)\varphi(t)\varphi(t)^T$$

In seguito si ricava l'espressione ricorsiva per la $R(t)$:

$$R(t) = \left(\frac{t-1}{t}\right)\left(\frac{1}{t-1}\right)S(t-1) + \left(\frac{1}{t}\right)\varphi(t)\varphi(t)^T \quad \rightarrow \quad R(t-1) + \left(\frac{1}{t}\right)\left[\varphi(t)\varphi(t)^T - R(t-1)\right]$$

A questo punto si definisce la ***seconda forma*** del metodo dei *minimi quadrati ricorsivi* , che viene ricavata a partire dalla matrice

$$R(t) = \left(\frac{1}{t}\right)S(t) = \left(\frac{1}{t}\right)S(t-1) + \left(\frac{1}{t}\right)[\varphi(t)\varphi(t)^T]$$

E si può scrivere come:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_t = \vartheta_{t-1} + K(t)\varepsilon(t) && \textit{ricorsione base}\\
&K(t) = \left(\frac{1}{t}\right)R(t)^{-1}\varphi(t) && \textit{definizione}\\
&\varepsilon(t) = y(t) - \varphi(t)^T\vartheta_{t-1} && \textit{definizione}\\
&R(t) = R(t-1) + [\varphi(t)\varphi(t)^T - R(t-1)] && \textit{ricorsione ausiliaria}
\end{aligned}$$

Le espressioni ottenute considerando le due forme presentate non vengono utilizzate nella pratica in quanto in entrambi i casi bisogna invertire ad ogni istante una matrice quadrata, in un caso $S(t)$ e nell'altro $R(t)$, di dimensioni pari al numero di parametri da stimare.
Questa operazione risulta estremamente dispendiosa in termini computazionali.

E'possibile ovviare a questo problema utilizzando il *"Lemma di inversione di matrice"* che conduce ad un'espressione in cui si effettua solo l'inversione di uno scalare.

**Lemma di inversione di matrice**
Si considerino quattro matrici F, G, H e K di dimensioni tali che la quntità *F+GHK* abbia senso.
Si supponga che le matrici F, H e (F+GHK) siano invertibili.
Allora si può scrivere: $(F+GHK)^{-1} = F^{-1} - F^{-1}G(H^{-1} + KF^{-1}G)^{-1}KF^{-1}$

Date due matrici $A \rightarrow (n*m) \quad e \quad B \rightarrow (h*k)$
La moltiplicazione $C = AxB$ ha senso se $m = h$ con $C \rightarrow n*k$.
La somma $C = A + B$ ha senso se $n = h \;\; e \;\; m = k$

Infatti ponendo $\quad F = S(t-1) \rightarrow (n*n), \quad G = \varphi(t) \rightarrow (n*1), \quad H = 1\,, \quad K = \varphi^T \rightarrow (1*n)$

si osserva che ha senso l'espressione F+GHK , poiché le dimensioni sono congruenti.
Si ottiene quindi:

$$S(t)^{-1} = S(t-1)^{-1} + S(t-1)^{-1}\varphi(t)[1+\varphi(t)^T S(t-1)^{-1}\varphi(t)]^{-1}S(t-1)^{-1}\varphi(t)^T$$

in cui il termine $1+\varphi(t)^T S(t-1)^{-1}\varphi(t)$ si riduce ad essere uno scalare.

Ricordando che i termi si ha che $S(t)^{-1}$ corrisponde all'inversione di uno scalare.

Considerando $V(t) = S(t)^{-1}$ si può scrivere la ***terza forma*** del *metodo dei minimi quadrati* come segue:

$$\begin{aligned}
&\vartheta_t = \vartheta_{t-1} + K(t)\varepsilon(t) && \textit{ricorsione base}\\
&K(t) = V(t)\varphi(t) && \textit{definizione}\\
&\varepsilon(t) = y(t) - \varphi(t)^T\vartheta_{t-1} && \textit{definizione}\\
&V(t) = V(t-1) - \beta_{t-1}^{-1}V(t-1)\varphi(t)\varphi(t)^T V(t-1) && \textit{ricorsione ausiliaria}\\
&\beta_{t-1} = 1 + \varphi(t)^T V(t-1)\varphi(t) && \textit{definizione}
\end{aligned}$$

Questa forma è quella che più si avvicina alle espressioni utilizzate nella realtà.
Infatti è possibile che la $V(t)$ perda le sue proprietà a causa di derive prodotte dal cumulo degli errori numerici.
Perciò si preferisce fattorizzare la matrice $V(t)$ e considerare di volta in volta i suoi dati aggiornati per poi riaggregarli manualmente mantenendo così la sua *simmetria* e la sua *definita positività*.
L'analisi dei fattori inoltre consente di testare, istante per istante, le caratteristiche della matrice $V(t)$ e verificare la bontà dell'algoritmo per poter prendere tempestivi provvedimenti in caso negativo.

Equivalenza tra LS e RLS
Gli algoritmi ricorsivi sono una versione rigorosa della formula dei minimi quadrati. Per avere una equivalenza effettiva (disturbata solo da errori numerici) , gli algoritmi devono essere opportunamente inizializzati considerando le seguenti espressioni:

$$V(t_0) = \left(\sum_{i=1}^{t_0} \varphi(t)\varphi(t)^T\right)^{-1} = S(t_0)^{-1} \qquad e \qquad \hat{\vartheta}_{t_0} = V(t_0)\sum_{i=1}^{t_0}\varphi(i)y(i)$$

Talvolta si tende ad evitare l'inversione della matrice $V(t_0)$ procedendo con una inizializzazione convenzionale in cui

$$V(0) = \alpha I \qquad e \qquad \hat{\vartheta}_0 = 0$$

Per preservare le proprietà della matrice *varianza della stima* $V(t)$ si deve assumere un $\alpha > 0$ ricordando che:

- $\alpha$ molto piccolo → si considera la parametrizzazione iniziale poco incerta. L'algoritmo evolve lentamente da tale parametrizzazione
- $\alpha$ elevato → si considera la parametrizzazione iniziale molto incerta. L'algoritmo si allontanerà rapidamente da tale valore

Sia $\bar{\vartheta}$ il vettore di parametri che descrive perfettamente il sistema. Ci chiediamo allora se esiste $\hat{\vartheta}$ tale che $\bar{\vartheta} = \hat{\vartheta}$. Se si verifica tale condizione, vuol dire che la stima ($\hat{\vartheta}$) è consistente, ossia che all'aumentare del campione N la stima tende al valore reale.

Posto $b = E[\hat{\vartheta}] - \bar{\vartheta}$ con $\hat{\vartheta} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T y_N$ e $y_N = \Phi\bar{\vartheta} + \xi_N$

E ricordando che $\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{bmatrix}$, sostituendo si ottiene

$$b = E\left\{(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T(\Phi\bar{\vartheta} + \xi_N)\right\} - \bar{\vartheta} = E\left\{(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\xi_N\right\} + \bar{\vartheta} - \bar{\vartheta} = E\left\{(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\xi_N\right\} \cong 0$$

In quanto il valore atteso del disturbo (rumore bianco) è nullo.

L'algoritmo RLS viene utilizzato in tutti quei campi pratici dove è necessario effettuare la stima dei parametri in tempo reale come;

- <u>Sistema di controllo automatico della rotta:</u> la frequenza e l'intensità dei disturbi che dipendono dalle condizioni atmosferiche determinano notevoli cambiamenti nelle dinamiche relative al moto della nave

- <u>Pazienti affetti dalla sindrome da stress respiratorio:</u> In terapia intensiva la conoscenza delle proprietà visco-elastiche del sistema respiratorio è di estrema importanza per rilevare significativi cambiamenti delle funzioni vitali del paziente e quindi per aggiustare il trattamento respiratorio