CAPITOLO 20

Oscillazioni e onde meccaniche

Brian Dunne / Shutterstock

1 Oscillazioni attorno all'equilibrio

I **moti oscillatori** dei corpi, come la corda pizzicata di una chitarra o un lampione scosso dal vento, hanno alcune caratteristiche comuni:

- inizialmente il corpo è fermo in una posizione di equilibrio;
- quando viene spostato e lasciato libero, il corpo si muove avanti e indietro passando per la posizione di equilibrio.

Joshua David Treisner / Shutterstock

Questo moto è causato da una forza di richiamo che tende a riportare il corpo nella posizione di equilibrio stabile:

un corpo è in **equilibrio stabile** quando, allontanato dalla posizione di equilibrio, tende a tornare in essa per effetto di una forza di richiamo.

Il moto oscillatorio è un **moto periodico**, perché si ripete con regolarità nel tempo: durante un'oscillazione completa il corpo ritorna nella posizione iniziale con la stessa velocità iniziale. Le caratteristiche fondamentali di un moto periodico sono il periodo e la frequenza:

- il **periodo** T è il tempo necessario per compiere un'oscillazione completa;
- la **frequenza** f è il numero di oscillazioni che avvengono in un secondo.

Frequenza e periodo sono legati dalla relazione

$$f = \frac{1}{T} \tag{1}$$

Nel Sistema Internazionale il periodo si misura in *secondi* e la frequenza in *hertz* (Hz): $1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$. Un corpo oscilla con la frequenza di 1 Hz quando compie una oscillazione al secondo.

QUANTO? Il periodo del mi cantino

La corda più sottile di una chitarra è detta mi cantino: quando è pizzicata, oscilla (se correttamente accordata) con una frequenza $f = 330$ Hz e quindi compie un'oscillazione completa in

$$T = \frac{1}{330\ \text{Hz}} = 3{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{s}$$

2 Il moto armonico

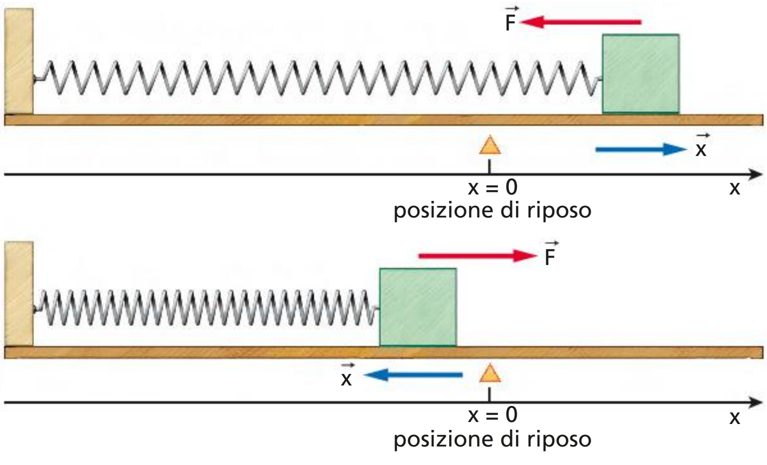
Il tipo più importante di moto periodico è il **moto armonico**, che si presenta in una innumerevole quantità di fenomeni naturali. Per esaminarne le caratteristiche studiamo in dettaglio il moto di un **oscillatore armonico**, cioè di un sistema costituito da una massa che si muove sotto l'azione della forza di richiamo elastica di una molla.

L'oscillatore armonico

Consideriamo una massa m fissata all'estremo libero di una molla di costante elastica k. La massa si muove su un piano orizzontale privo di attriti. La posizione di equilibrio della massa è quella in cui la molla è a riposo. Quando la molla è allungata o accorciata, sulla massa si esercita una forza di richiamo elastica data dalla relazione

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

dove $\vec{x}$ è lo spostamento della massa dalla posizione di equilibrio.



La forza ha sempre il verso opposto allo spostamento perché è una forza di richiamo che tende a riportare il corpo nella posizione di equilibrio.

L'accelerazione della massa è data dal secondo principio della dinamica:

$$-k\vec{x} = m\vec{a}$$

ossia

$$\vec{a} = -\frac{k}{m}\vec{x} \tag{2}$$

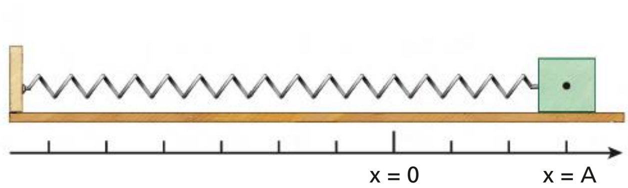
La soluzione dell'equazione (2) è la legge oraria, cioè la relazione $\vec{x} = \vec{x}(t)$ che lega l'istante di tempo t e la posizione della massa e che contiene tutta l'informazione necessaria per descrivere il moto.

Per risolvere l'equazione (2) sono necessari strumenti matematici molto complessi, per cui ci limitiamo a delineare le caratteristiche principali del moto della massa quando parte da $x = A$ con velocità iniziale nulla.

Il moto è limitato

1 All'istante iniziale il sistema massa-molla ha un'energia cinetica nulla e un'energia totale uguale a quella potenziale

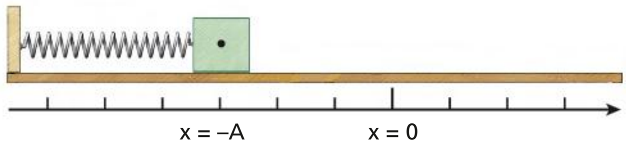
$$U = \frac{1}{2}kA^2$$



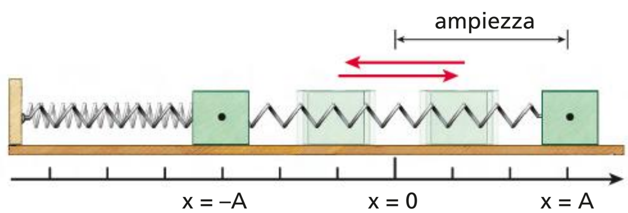
2 Durante il moto l'energia totale si conserva, quindi il punto più lontano in cui può arrivare la molla è $x = -A$; infatti in questo punto il sistema ha energia potenziale

$$U = \frac{1}{2}kA^2$$

ed energia cinetica nulla, cioè è fermo.

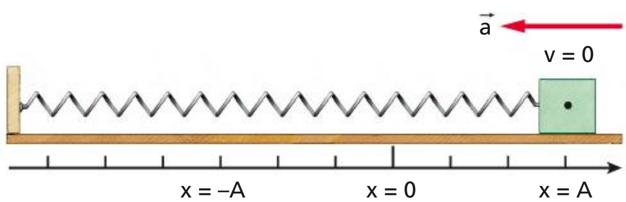


3 Lo spostamento massimo A è detto **ampiezza** del moto.

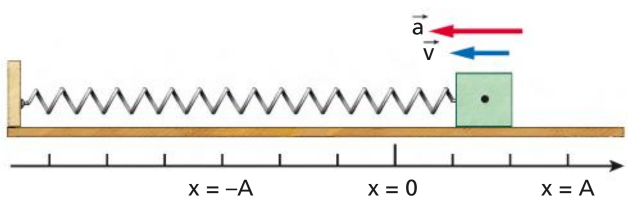


Il moto è oscillatorio

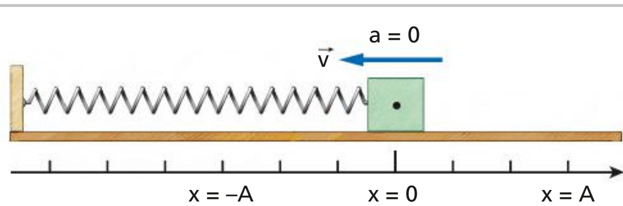
1 La massa parte con $v = 0$ dal punto $x = A$. L'accelerazione è nel verso negativo delle x.



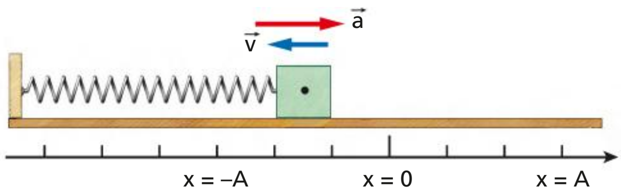
2 Nel tratto da A a 0 l'accelerazione è nello stesso verso della velocità, che quindi aumenta.



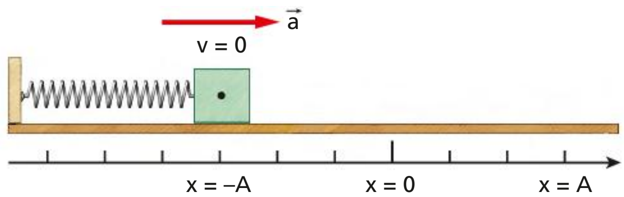
3 Nel punto $x = 0$ l'accelerazione è nulla, mentre la velocità è diretta nel verso negativo delle x.



4 Nel tratto da 0 a $-A$ l'accelerazione ha verso opposto rispetto alla velocità, che quindi diminuisce.

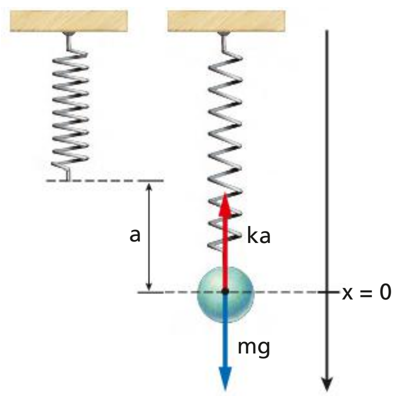


5 Nel punto $x = -A$ l'accelerazione è nel verso positivo delle x e la velocità è nulla.



Il moto si ripete con le stesse caratteristiche da $x = -A$ a $x = A$. Dopo aver compiuto un'oscillazione completa, il moto continua indefinitamente.

Il moto di una massa che oscilla in verticale, appesa a una molla, ha le stesse caratteristiche del moto visto in orizzontale. L'unica differenza è che la posizione di equilibrio è quella in cui la molla si è allungata di un tratto a tale che la forza elastica ka equilibra il peso mg. Quindi lo spostamento x della massa deve essere riferito alla posizione di equilibrio del sistema.



Il moto armonico

Esistono molti sistemi fisici che sono descritti da un'equazione analoga alla (2) e che quindi sono caratterizzati dall'avere moti simili fra loro. Si dà la seguente definizione.

Si dice **moto armonico** il moto di un corpo che ha accelerazione direttamente proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio e verso opposto.

Il sistema formato da una massa che oscilla fissata all'estremo libero di una molla si chiama **oscillatore armonico**. Si dimostra che

la legge oraria di un oscillatore armonico, che parte da $x = A$ con velocità nulla, è

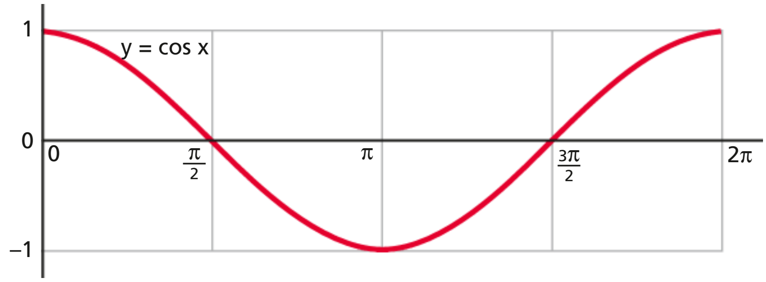
$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \tag{3}$$

DENTRO LA LEGGE

- A è l'ampiezza del moto e si misura in metri.
- L'argomento della funzione coseno è un numero privo di dimensioni; infatti:

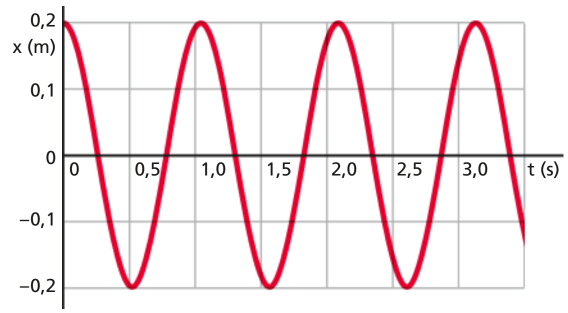
$$\left(\frac{\mathrm{N/m}}{\mathrm{kg}}\right)^{1/2}\mathrm{s} = \left(\frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s^2}}\cdot\frac{1}{\mathrm{m}}\cdot\frac{1}{\mathrm{kg}}\right)^{1/2}\mathrm{s} = \left(\frac{1}{\mathrm{s^2}}\right)^{1/2}\mathrm{s} = \frac{1}{\mathrm{s}}\,\mathrm{s} = 1$$

- La funzione $y = \cos x$ è una funzione periodica con periodo 2π e assume valori compresi fra -1 e 1. Il grafico di $y = \cos x$ per $0 \le x \le 2\pi$ è rappresentato in figura.



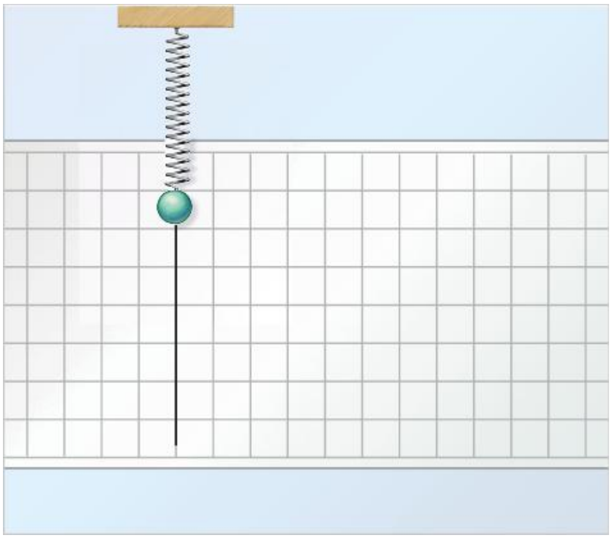
Esempio

Supponiamo che l'oscillatore armonico considerato in precedenza abbia $m = 2$ kg e $k = 60$ N/m e parta all'istante $t = 0$ s dal punto $x = 0{,}2$ m con $v = 0$ m/s. La sua legge oraria è quella mostrata in figura.

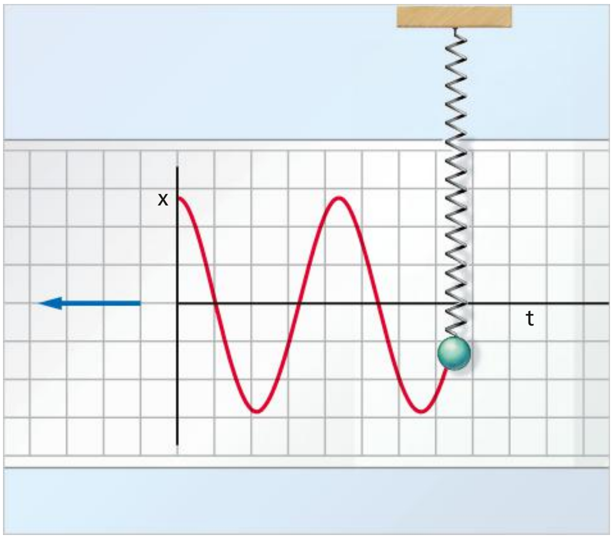


Con qualche accorgimento si può tracciare la legge oraria di un oscillatore.

1 Si fissa un pennarello alla massa appesa alla molla, in modo che la punta lasci la traccia su un foglio. Si mette in oscillazione la massa nell'istante in cui si inizia a muovere il foglio verso sinistra con velocità costante.



2 Lo spostamento del foglio è proporzionale al tempo trascorso, quindi sull'asse orizzontale possiamo immaginare che sia rappresentato il tempo. Ogni punto della traccia ha quindi due coordinate (t, x), dove t è il tempo trascorso e x lo spostamento dalla posizione di equilibrio.



STRUMENTI MATEMATICI

Risoluzione numerica dell'equazione del moto di un oscillatore armonico

Risolvere l'equazione del moto di un oscillatore armonico $a = -(k/m)\,x$ è molto complesso, perché l'accelerazione e la posizione non sono numeri ma sono funzioni del tempo. Possiamo però determinare una soluzione numerica per la legge oraria del moto $x = x(t)$ e tracciare il grafico approssimato del suo andamento nel tempo. Per impostare la risoluzione numerica, facciamo le seguenti ipotesi:

- il tempo è discreto, cioè procede «a scatti» di piccoli intervalli $\mathrm{d}t$ a partire dall'istante iniziale t_0;
- le accelerazioni rimangono costanti durante ogni intervallo di tempo (in realtà cambiano con la posizione x);
- le velocità rimangono costanti durante ogni intervallo di tempo (in realtà cambiano fra gli istanti iniziale e finale di un intervallo di tempo).

Scegliamo di calcolare lo spostamento durante ogni intervallo di tempo utilizzando la velocità che la massa ha all'istante finale dell'intervallo: in questo particolare caso questa scelta evita di accumulare errori di approssimazione elevati.

Con queste ipotesi si può impostare la risoluzione numerica del problema del moto mediante la seguente procedura iterativa, in cui il valore di una grandezza è calcolato a partire dai valori precedenti di essa e delle grandezze da cui dipende.

Procedura iterativa			
t_0	x_0	v_0	$a_0 = -(k/m)\,x_0$
$t_1 = t_0 + \mathrm{d}t$	$x_1 = x_0 + v_1\,\mathrm{d}t$	$v_1 = v_0 + a_0\,\mathrm{d}t$	$a_1 = -(k/m)\,x_1$
$t_{k+1} = t_k + \mathrm{d}t$	$x_{k+1} = x_k + v_{k+1}\,\mathrm{d}t$	$v_{k+1} = v_k + a_k\,\mathrm{d}t$	$a_{k+1} = -(k/m)\,x_{k+1}$

Questa procedura può essere eseguita su un foglio elettronico come quello del tabulato A.

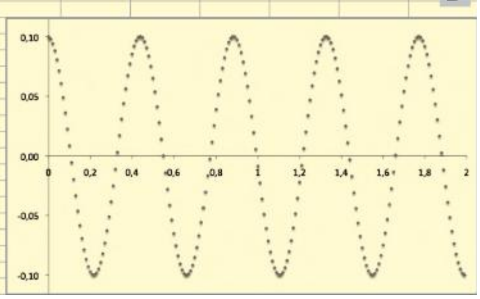
A

◇	A	B	C	D	E	F	G
1	**Legge oraria dell'oscillatore armonico**						
2					a=-(k/m)x		
3	m=	0,5	kg				
4	k=	100	N/m				
5	x_0=	0,1	m	t	x	v	a
6	v_0=	0	m/s	=0	=$B$4	=$B$5	=-$B$7*E6
7	dt=	0,01	s	=D6+$B$6	=E6+F7*$B$6	=F6+G6*$B$6	=-$B$7*E7
8	k/m=	=B4/B3	N/m^2	=D7+$B$6	=E7+F8*$B$6	=F7+G7*$B$6	=-$B$7*E8
9				=D8+$B$6	=E8+F9*$B$6	=F8+G8*$B$6	=-$B$7*E9
10				=D9+$B$6	=E9+F10*$B$6	=F9+G9*$B$6	=-$B$7*E10

Il calcolo è relativo a un oscillatore armonico con $m = 0{,}5$ kg e $k = 100$ N/m lasciato partire da $x = 0{,}1$ m con velocità iniziale nulla. Con i dati numerici inseriti, l'aspetto del foglio con i valori al posto delle formule è quello del tabulato B. Il grafico mostra la legge oraria dell'oscillatore armonico.

B

◇	A	B	C	D	E	F	G
1	**Legge oraria dell'oscillatore armonico**						
2						a=-(k/m)x	
3	m=	0,5	kg				
4	k=	100	N/m				
5	x_0=	0,1	m				
6	v_0=	0	m/s	t	x	v	a
7	dt=	0,01	s	0	0,100	0,000	-20,000
8	k/m=	200	N/m^2	0,01	0,098	-0,200	-19,600
9				0,02	0,094	-0,396	-18,808
10				0,03	0,088	-0,584	-17,640
11				0,04	0,081	-0,760	-16,119
12				0,05	0,071	-0,922	-14,276
13				0,06	0,061	-1,064	-12,147
14				0,07	0,049	-1,186	-9,775
15				0,08	0,036	-1,284	-7,208
16				0,09	0,022	-1,356	-4,496
17				0,1	0,008	-1,401	-1,695
18				0,11	-0,006	-1,418	1,140
19				0,12	-0,020	-1,406	3,953



IN LABORATORIO

Moti nel piano: pendolo e moto circolare uniforme

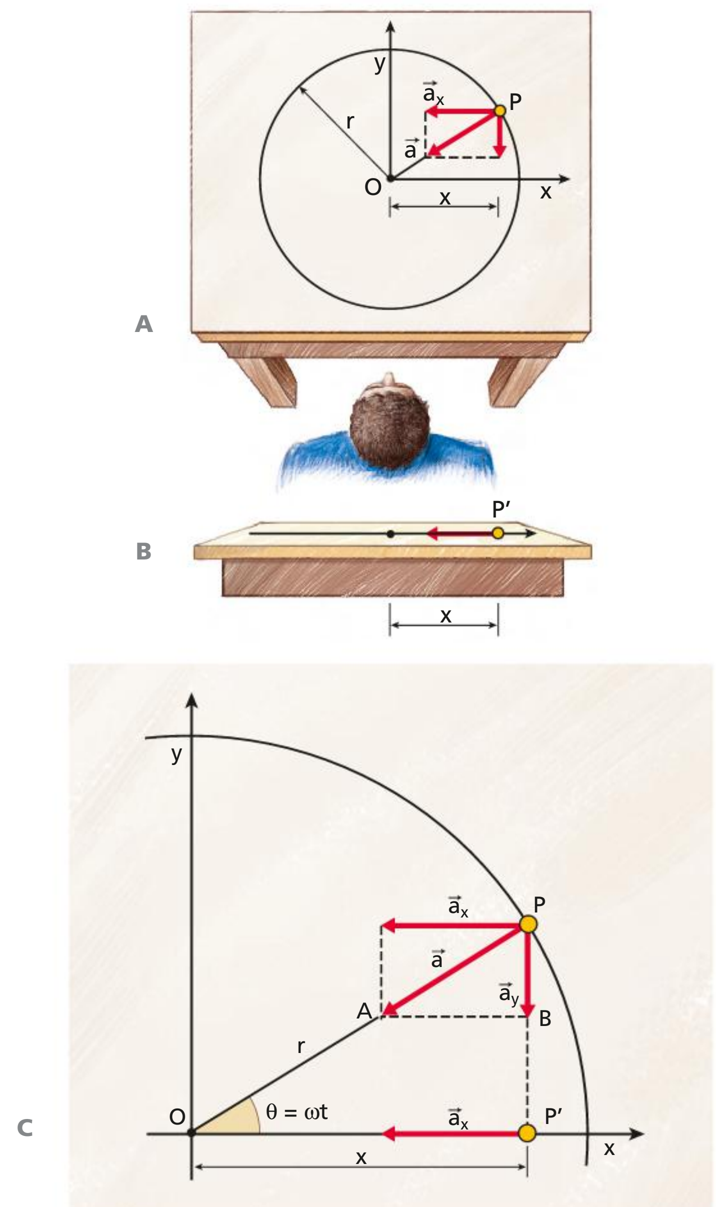
- Video (1 minuto)
- Test (3 domande)

3 Relazioni tra moto circolare uniforme e moto armonico

Il moto circolare uniforme ha una relazione molto stretta col moto armonico. Vale infatti il seguente risultato:

> la proiezione di un moto circolare uniforme lungo un diametro della traiettoria è un moto armonico.

Per dimostrarlo consideriamo un corpo puntiforme P che si muove con velocità costante lungo una circonferenza di raggio r posta su un piano orizzontale (figura A). Osservando da una direzione tangente al piano, la proiezione P' del corpo P si muove lungo l'asse x (figura B).



In un generico istante t, l'accelerazione $\vec{a}_x$ con cui si muove P' è legata all'accelerazione centripeta a cui è sottoposto P (figura C nella pagina precedente). Infatti i triangoli OPP' e ABP sono simili, perché hanno gli angoli corrispondenti uguali. Quindi i lati sono in proporzione; in particolare

$$\frac{AB}{OP'} = \frac{AP}{OP}$$

ossia

$$\frac{a_x}{x} = \frac{a}{r} \quad \Rightarrow \quad a_x = \frac{a}{r}\,x$$

Notiamo che $\vec{a}_x$ ha il verso opposto a $\vec{x}$, quindi l'equazione che lega accelerazione e spostamento del punto P' diventa

$$a_x = -\frac{a}{r}\,x$$

L'accelerazione centripeta a di un corpo in moto circolare uniforme con velocità angolare ω su una circonferenza di raggio r è

$$a = \omega^2 r$$

Sostituendo nella relazione precedente si ha

$$\boxed{a_x = -\,\omega^2 x} \qquad (4)$$

L'accelerazione a_x è proporzionale all'opposto dello spostamento, quindi

il moto di P' è un moto armonico.

Questo risultato consente di determinare il periodo del moto di P': infatti coincide con quello del moto circolare di P, nel quale la velocità angolare è legata al periodo T dalla relazione

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

e quindi $T = 2\pi/\omega$. Ricordando poi che la frequenza f è legata al periodo T dalla relazione $f = 1/T$, concludiamo che la frequenza del moto armonico di P' è

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Queste relazioni valgono per qualunque moto armonico. Quindi possiamo affermare che

un corpo soggetto a un'accelerazione

$$a_x = -\,\omega^2 x$$

si muove lungo l'asse x con **moto armonico** avente periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (5)$$

e frequenza

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (6)$$

Periodo e frequenza dell'oscillatore armonico

L'oscillatore armonico di massa m e costante elastica k ha un'accelerazione, data dalla (2),

$$\vec{a} = -\frac{k}{m}\vec{x}$$

Si muove quindi di moto armonico. Vogliamo determinare periodo e frequenza di questo moto. Confrontando le equazioni (2) e (4) otteniamo ω:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= -\frac{k}{m}x \\ a_x &= -\omega^2 x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7}$$

Nel moto armonico la grandezza ω è detta **frequenza angolare** o **pulsazione**.

Sostituendo nelle relazioni (5) e (6) otteniamo in definitiva che

un oscillatore armonico di massa m e costante elastica k soggetto a un'accelerazione

$$\vec{a} = -\frac{k}{m}\vec{x}$$

si muove lungo l'asse x con **moto armonico** avente periodo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{8}$$

e frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{9}$$

QUANTO? Una soluzione esatta

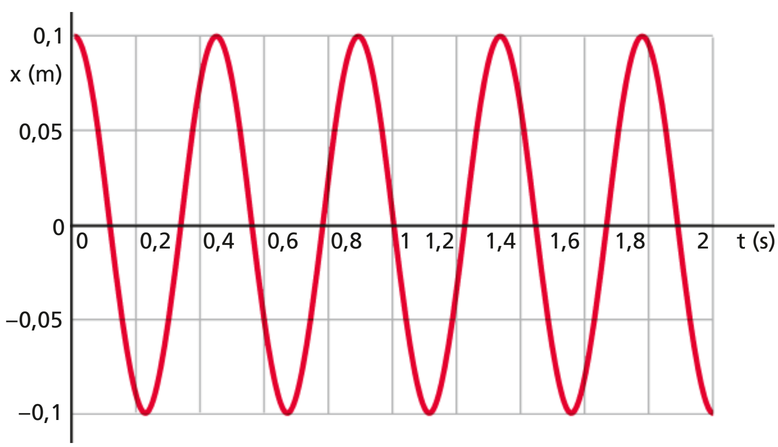
Per un oscillatore armonico con $m = 0{,}5$ kg e $k = 100$ N/m, come quello visto nel paragrafo precedente, si ha:

$$T = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{\frac{0{,}5\ \text{kg}}{100\ \text{N/m}}} = 0{,}44\ \text{s} \qquad f = \frac{1}{0{,}44\ \text{s}} = 2{,}3\ \text{Hz}$$

Se è lasciato partire da $x = 0{,}1$ m con velocità iniziale nulla, la sua legge oraria è

$$x = 0{,}1\cos\left(\sqrt{\frac{100}{0{,}5}}\,t\right) \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}1\cos(14\,t)$$

Il grafico della legge oraria è rappresentato nella figura seguente.

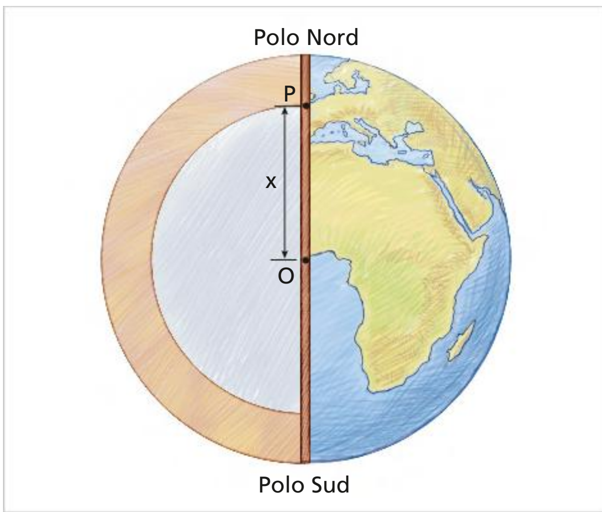


MINDBUILDING Oscillando fra i Poli

Supponiamo si possa praticare un foro nella Terra che vada dal Polo Nord al Polo Sud e si possa trascurare l'attrito dell'aria. Lasciando cadere una massa nel foro dal Polo Nord, dopo quanto tempo arriverebbe al Polo Sud? Ovviamente ciò è irrealizzabile: le trivellazioni più profonde arrivano a poco più di 10 km di profondità. Inoltre, l'interno della Terra è un luogo decisamente... inospitale, con temperature e pressioni elevatissime. Il problema teorico però può essere risolto utilizzando le proprietà della gravitazione e del moto armonico.

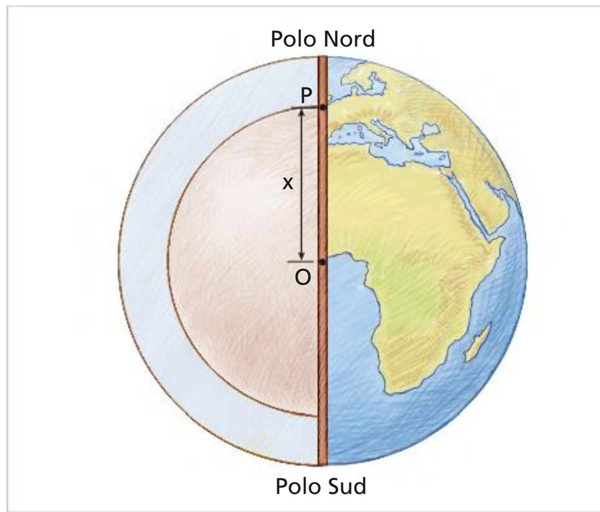
Consideriamo una massa m in un punto P che dista x dal centro della Terra.

1 Come ha dimostrato Newton, un corpo nel punto P non risente di alcuna attrazione da parte del guscio sferico terrestre esterno a P.



2 Quindi il corpo è attratto solo dalla massa terrestre M' interna alla sfera che ha raggio $OP = x$ con una forza

$$F = G\frac{mM'}{x^2}$$



La massa M' è legata al raggio x e alla densità media della Terra ρ dalla relazione

$$M' = V\rho = \frac{4}{3}\pi x^3 \rho$$

Quando il corpo si avvicina al centro O della Terra, cioè quando x diminuisce, la massa che lo attrae diminuisce, fino ad annullarsi quando il corpo è in O $(x = 0)$. L'attrazione gravitazionale del corpo di massa m collocato in P è quindi

$$F = G\frac{M'm}{x^2} = G\frac{\frac{4}{3}\pi x^3 \rho m}{x^2} = \frac{4}{3}\pi G\rho m x$$

L'attrazione è una forza di richiamo ed è diretta verso O, quindi la inseriamo con il segno negativo nel secondo principio della dinamica:

$$-\frac{4}{3}\pi G\rho m x = m a_x \quad \Rightarrow \quad a_x = -\frac{4}{3}\pi G\rho x$$

L'accelerazione è proporzionale all'opposto dello spostamento, quindi il corpo si muove con moto armonico avente frequenza angolare

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}$$

e compie un'oscillazione completa nel tempo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4}{3}\pi G\rho}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Inserendo i valori della densità media della Terra ($\rho = 5{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$) e della costante G si ha

$$T = \sqrt{\frac{3 \cdot 3{,}14}{(6{,}7 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2})(5{,}5 \cdot 10^3\ \mathrm{kg/m^3})}} = 5{,}1 \cdot 10^3\ \mathrm{s}$$

ossia circa $1^{\mathrm{h}}\,24'$. La caduta dal Polo Nord al Polo Sud corrisponde a mezza oscillazione e quindi durerebbe circa $42'$.

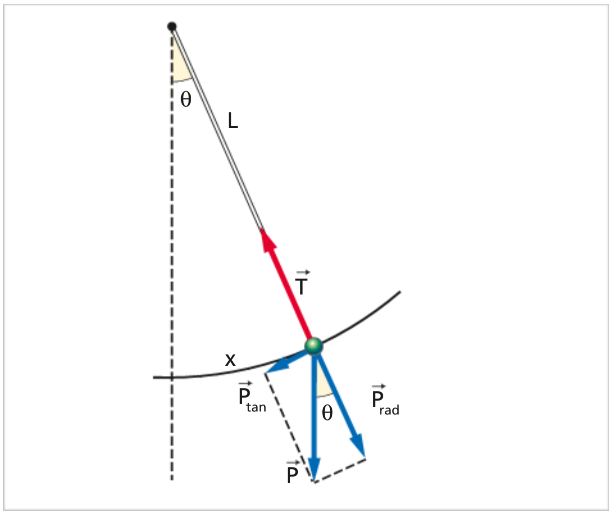
4 Il pendolo

Il **pendolo** è un sistema formato da un piccolo corpo appeso all'estremo di un filo inestensibile e di massa trascurabile. Quando è spostato di un angolo θ dalla verticale e lasciato andare, il corpo oscilla attorno alla sua posizione di equilibrio. Se gli attriti sono trascurabili, il moto del corpo è periodico. Più precisamente:

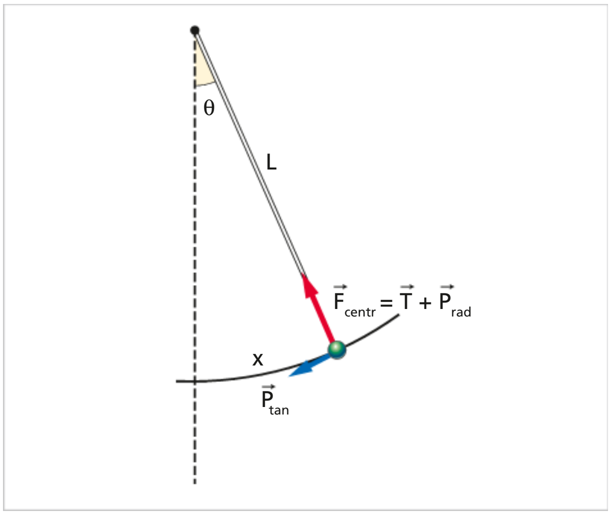
per piccole oscillazioni, cioè quando l'angolo massimo di oscillazione è molto piccolo, il moto del pendolo è un moto armonico.

Per dimostrarlo dobbiamo verificare che l'accelerazione del corpo è proporzionale allo spostamento cambiato di segno. Determiniamo per prima cosa le forze a cui è sottoposto il corpo nel suo moto lungo un arco di circonferenza di raggio L.

1 Quando è spostato di un angolo θ rispetto alla verticale, sul corpo agiscono due forze: la tensione $\vec{T}$ del filo e il peso $\vec{P} = m\vec{g}$, che può essere scomposto nei componenti $\vec{P}_{\mathrm{rad}}$ parallelo al filo e $\vec{P}_{\mathrm{tan}}$ perpendicolare al filo e quindi tangente alla traiettoria circolare.



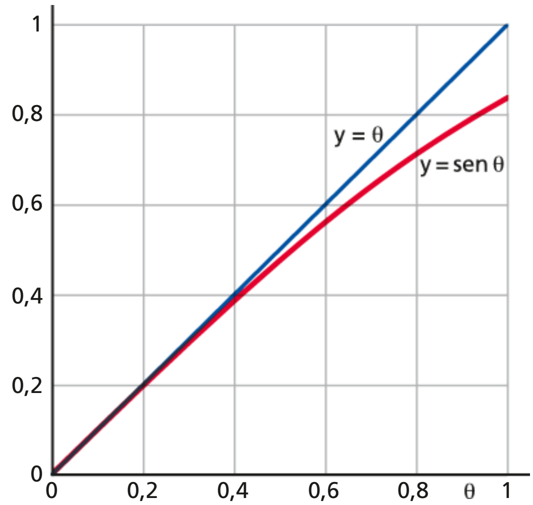
2 La risultante delle forze $\vec{F}_{\mathrm{centr}} = \vec{T} + \vec{P}_{\mathrm{rad}}$ lungo la direzione del filo assicura la forza centripeta che mantiene il corpo nella traiettoria circolare.
L'accelerazione del corpo in direzione tangente all'arco x della traiettoria è invece causata dalla forza $\vec{P}_{\mathrm{tan}}$.



Quindi il corpo si muove lungo l'arco x sotto l'azione della forza totale

$$F = -mg \operatorname{sen}\theta$$

Il segno meno è dovuto al fatto che $\vec{P}_{\tan}$ è una forza di richiamo perché tende a riportare il corpo nella posizione di equilibrio ($\theta = 0°$): quindi è diretta in verso opposto allo spostamento. L'espressione della forza può essere semplificata nel caso di piccole oscillazioni, cioè di oscillazioni in cui l'angolo θ rimane molto piccolo. Come mostra il grafico, la differenza fra il valore di θ e di $\operatorname{sen}\theta$ è praticamente trascurabile quando $\theta < 0{,}2$ rad ossia $\theta < 10°$.



Quindi per piccole oscillazioni $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ e la forza tangenziale diviene

$$\vec{P}_{\tan} = -mg\theta$$

Il corpo si muove lungo un arco di raggio L: lo spostamento x lungo l'arco è legato alla misura dell'angolo θ (in radianti) dalla relazione $\theta = x/L$. Sostituendo nell'equazione precedente si ha, in definitiva:

$$\vec{P}_{\tan} = -\frac{mg}{L}x \tag{10}$$

La forza è proporzionale allo spostamento ma ha verso opposto ad esso: concludiamo quindi che il pendolo nelle piccole oscillazioni si muove di moto armonico.

Isocronismo del pendolo

Consideriamo un pendolo di massa m e lunghezza L. Nel caso di piccole oscillazioni la massa è soggetta alla forza F data dalla (10) e la sua accelerazione tangenziale a è data dal secondo principio della dinamica:

$$-\frac{mg}{L}x = ma \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{g}{L}x$$

L'accelerazione del pendolo non dipende dalla sua massa: la forza di richiamo è proporzionale alla massa, proprio come nel caso della caduta libera. Possiamo quindi concludere che, nel caso di piccole oscillazioni, le caratteristiche del moto del pendolo non dipendono dalla sua massa.

Il moto del pendolo è un moto armonico: infatti la sua equazione ha la stessa struttura della relazione (4), cioè $a = -\omega^2 x$, in cui

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

A partire dalla pulsazione possiamo determinare la frequenza del pendolo mediante la (6):

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} \tag{11}$$

Dalla relazione $T = 1/f$ segue che il pendolo compie una oscillazione completa in un intervallo di tempo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{12}$$

Nella relazione precedente non compare l'ampiezza dell'oscillazione. Vale quindi la **legge di isocronismo del pendolo**:

per piccole oscillazioni, il periodo di un pendolo non dipende dall'ampiezza delle oscillazioni.

QUANTO? Quanto dura 1 metro?

Un pendolo di 1 m di lunghezza ha un periodo di

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2 \cdot 3{,}14\sqrt{\frac{1\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m}/\text{s}^2}} = 2\ \text{s}$$

Mezza oscillazione dura 1 s, quindi 1 s è la metà del periodo di... 1 m!

5 Energia e oscillatore armonico

Oscillazioni senza attrito

Consideriamo un oscillatore armonico con massa m e costante elastica k che si muove secondo la legge oraria

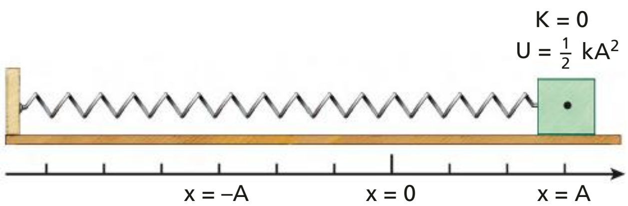
$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

Quando l'attrito è assente o trascurabile, la massa oscilla indefinitamente fra le posizioni $x = +A$ e $x = -A$. L'energia totale E dell'oscillatore è la somma dell'energia cinetica K e dell'energia potenziale elastica U:

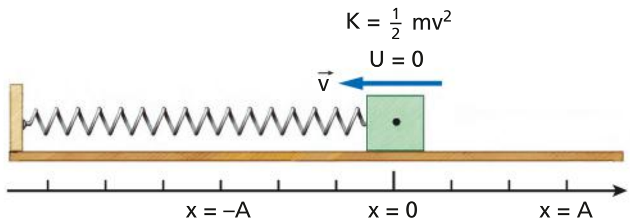
$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (13)$$

La forza elastica è conservativa, per cui l'energia totale dell'oscillatore rimane costante: durante il moto l'energia si trasforma continuamente da potenziale a cinetica e viceversa.

1 Nei punti $x = +A$ e $x = -A$ in cui si inverte il moto, la massa è ferma e l'energia è tutta potenziale.



2 Nel punto $x = 0$ la molla non è né allungata né accorciata, per cui l'energia è tutta cinetica.



In particolare, nei punti $x = +A$ e $x = -A$ si ha

$$E = \frac{1}{2} kA^2 \tag{14}$$

quindi

l'energia totale di un oscillatore armonico è proporzionale al quadrato dell'ampiezza dell'oscillazione.

La velocità è massima per $x = 0$, dove l'energia è solo cinetica e pari a

$$\frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2$$

Quindi per la conservazione dell'energia si ha

$$\frac{1}{2} m v_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

da cui si ricava

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

In un generico punto del moto, la conservazione dell'energia stabilisce che

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2$$

Il modulo della velocità è quindi

$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

e dipende dal punto x in cui si trova la massa.

QUANTO? **Una vecchia conoscenza...**

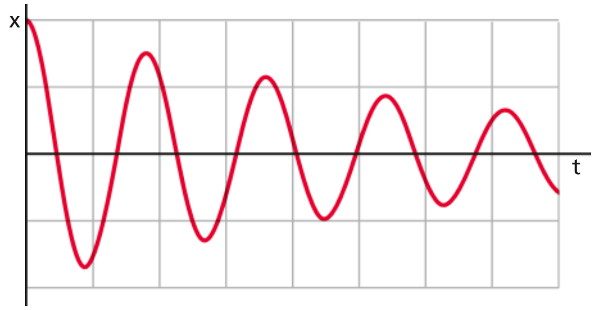
Nel caso già analizzato di un oscillatore armonico con $m = 0{,}5$ kg e $k = 100$ N/m, lasciato andare da $x = 0{,}1$ m con velocità iniziale nulla, si ha

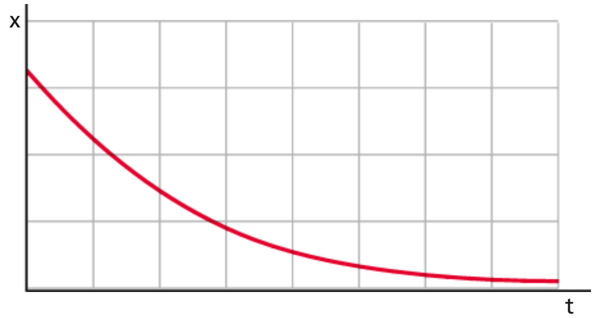
$$E = \frac{1}{2}(1 \cdot 10^2 \text{ N/m})(1 \cdot 10^{-1} \text{ m})^2 = 0{,}5 \text{ J}$$

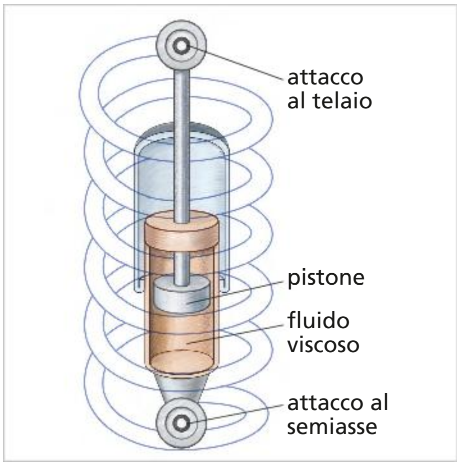
$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 10^2 \text{ N/m}}{0{,}5 \text{ kg}}}(1 \cdot 10^{-1} \text{ m}) = 1{,}4 \text{ m/s}$$

Oscillazioni in presenza di attrito

Nella realtà l'attrito non è eliminabile: quindi ogni moto prima o poi cessa. Nel caso di un moto armonico, l'ampiezza decresce fino ad annullarsi quando il corpo si ferma nella posizione di equilibrio. Questo moto è detto **moto armonico smorzato**. L'energia meccanica iniziale del moto è dissipata dall'attrito con fluidi come l'aria o nello sfregamento fra superfici in moto relativo.







Quando l'attrito è piccolo, il corpo prima di fermarsi compie varie oscillazioni con ampiezze decrescenti (figura in alto a sinistra). Lo smorzamento aumenta anche il periodo dell'oscillazione, ma l'effetto è molto modesto e quindi in genere è trascurabile.

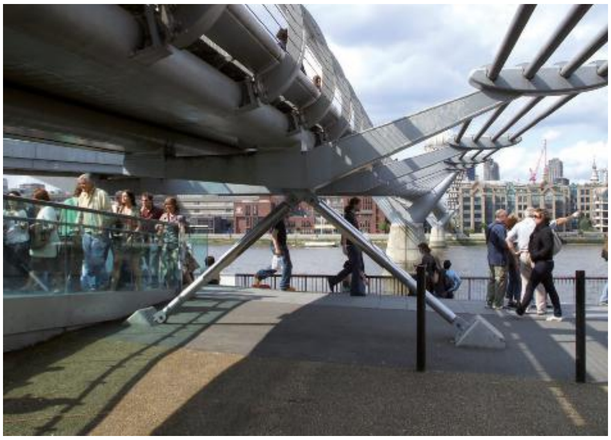
Quando l'attrito è molto grande, il corpo raggiunge la posizione di equilibrio senza alcuna oscillazione: si parla in questo caso di **smorzamento critico** (figura in alto a destra).

Lo smorzamento critico è realizzato da vari dispositivi che hanno lo scopo di eliminare nel più breve tempo possibile oscillazioni non desiderate. In molti casi si tratta di ammortizzatori (figura a fianco) costituiti da un pistone che si muove all'interno di un cilindro pieno di olio: il fluido oppone resistenza allo spostamento del pistone e quindi garantisce una grande forza dissipativa.

1 L'ammortizzatore all'interno della molla genera una forza d'attrito elevata che assicura il necessario smorzamento al telaio della moto.

Terekhov Igor / Shutterstock

2 Per smorzare le oscillazioni del Millennium Bridge sul Tamigi sono stati installati particolari smorzatori che dissipano energia meccanica.



Dave Farrance / Wikimedia Commons

Risonanza

Un oscillatore armonico con massa m e costante elastica k oscilla con la frequenza

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

detta **frequenza propria** o **naturale**. Per mantenerlo in oscillazione è necessaria una forza esterna che integri l'energia dissipata per attrito. Sotto l'azione di una forza esterna l'oscillatore compie **oscillazioni forzate**. La forza eccitatrice esterna deve essere periodica, proprio come le spinte necessarie per mantenere in moto un'altalena. Si dimostra che

il maggior trasferimento di energia all'oscillatore si realizza quando la forza eccitatrice ha la frequenza uguale alla frequenza propria dell'oscillatore.

In questa situazione l'ampiezza A del moto armonico, che è legata all'energia dell'oscillatore dalla relazione $E = (1/2)\,kA^2$, aumenta nel tempo. Questo fenomeno è detto **risonanza**. A seconda dei casi, la risonanza può essere un effetto utile o dannoso.

1 La risonanza permette al padre di mantenere in moto la bambina con una piccola forza applicata con la stessa frequenza dell'altalena.

Cabania / Shutterstock

2 Il Tacoma Narrows Bridge è stato distrutto dal vento che lo ha sollecitato con forze aventi frequenze molto vicine alla sua frequenza propria.

wordpress.com

Un esempio recente di effetti indesiderati della risonanza si è avuto sul Millennium Bridge, il ponte pedonale sul Tamigi inaugurato il 10 giugno 2000. Dopo due giorni il ponte fu chiuso a causa delle forti oscillazioni laterali dovute alla risonanza indotta dal passaggio dei pedoni. Per limitare le oscillazioni forzate del ponte sono stati inseriti smorzatori che dissipano l'energia trasmessa in modo inconsapevole dai pedoni.

Adrian Pingstone / Wikimedia Commons

6 Onde meccaniche

Esistono solo due modalità di trasmissione dell'energia meccanica: spostare corpi e generare onde.

1 Durante un temporale le raffiche di vento muovono gli ombrelli: il moto di traslazione dell'aria trasferisce energia cinetica agli ombrelli.

SVLuina / Shutterstock

2 Il fragore di un tuono mette in movimento i nostri timpani, che non ricevono energia da un «vento» d'aria che si sposta, ma da un'onda che si propaga per kilometri.

Martin Fischer / Shutterstock

L'aspetto distintivo di un'onda è proprio questo:

> un'onda si propaga nello spazio, trasferendo energia ma non materia.

In tutti i momenti della nostra vita interagiamo con qualche tipo di onda. Attraverso la vista e l'udito riceviamo segnali dal mondo esterno sotto forma di onde luminose (luce) e onde sonore (suono).

Pur nella loro diversità, innumerevoli fenomeni naturali sono di tipo ondulatorio: per esempio, le increspature del mare e i terremoti. L'analisi delle proprietà generali delle onde permette di comprendere le caratteristiche comuni di questi fenomeni.

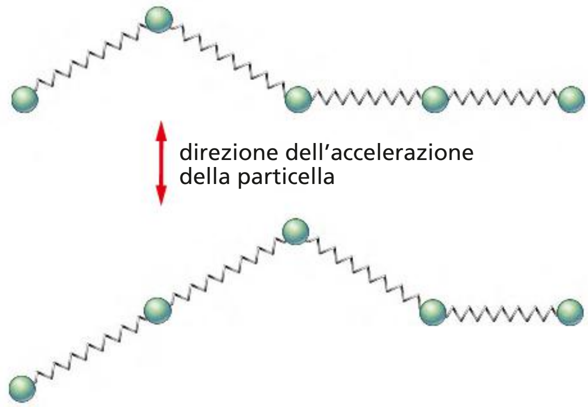
Caratteristiche delle onde meccaniche

Prendiamo in considerazione le **onde meccaniche**, cioè le onde che si propagano in un mezzo materiale. Le particelle del mezzo sono sottoposte a forze di richiamo, che tendono a riportarle nella loro posizione di equilibrio quando se ne allontanano.

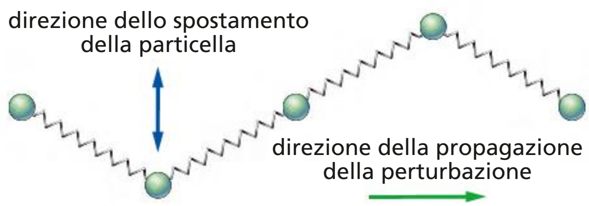
Per esaminare le caratteristiche delle onde, consideriamo un semplice modello di mezzo materiale: una corda elastica formata da particelle connesse mediante molle.

1 Un agente esterno, detto anche **sorgente**, sposta alcune particelle dalla posizione di equilibrio, creando una perturbazione del mezzo.

2 Queste particelle tendono a tornare nella posizione di equilibrio per effetto delle forze di richiamo esercitate dalle particelle vicine. Per reazione, sulle particelle vicine si esercitano forze che le allontanano dalle posizioni di equilibrio. In questo modo la perturbazione si propaga nel mezzo.



3 Ogni particella oscilla attorno alla sua posizione di equilibrio: il suo spostamento medio è quindi nullo. Però, oscillando, la particella trasmette energia alle particelle vicine: in questo modo l'energia si trasmette attraverso il mezzo.



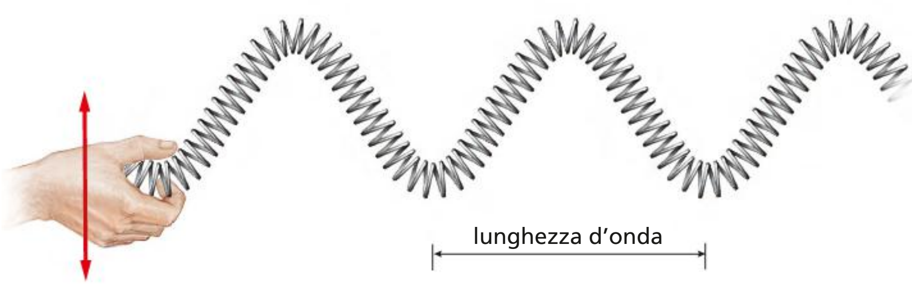
In generale:

un'onda è una perturbazione che si propaga in un mezzo e che trasporta energia ma non materia.

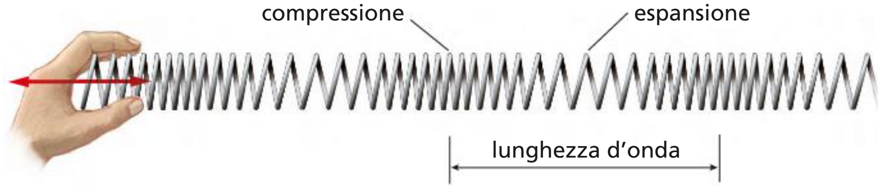
Onde trasversali e onde longitudinali

Esistono due tipi fondamentali di onde meccaniche, che possiamo facilmente generare su una molla molto lunga appoggiata su un tavolo.

1 Spostiamo un estremo avanti e indietro in direzione perpendicolare alla molla: si propaga una perturbazione formata da oscillazioni delle spire in direzione perpendicolare a quella della molla.



2 Spostiamo un estremo avanti e indietro in direzione parallela alla molla: in questo caso la perturbazione consiste in una serie di espansioni e compressioni delle spire lungo la direzione della molla.



In generale si distinguono:

- **onde trasversali**, quando le particelle del mezzo oscillano in direzione perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda;
- **onde longitudinali**, quando le particelle del mezzo oscillano nella stessa direzione di propagazione dell'onda.

Come vedremo, la luce è formata da onde trasversali, mentre il suono è costituito da onde longitudinali.

Onde superficiali

Le onde si propagano sulla superficie dei liquidi sotto l'azione di due forze di richiamo: la tensione superficiale e la gravità.

1 Si formano **onde capillari** quando la forza di richiamo dominante è la tensione superficiale.

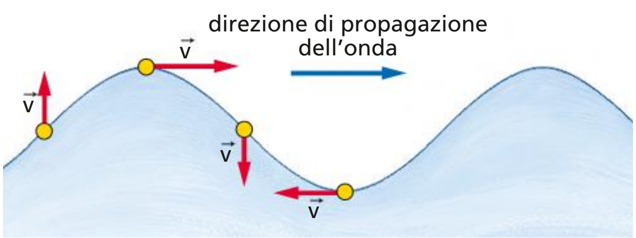
Massimo Romeni

2 Le onde marine sono **onde di gravità**: la tensione superficiale contribuisce in modo trascurabile alla forza di richiamo, che è quindi dovuta solo alla gravità.

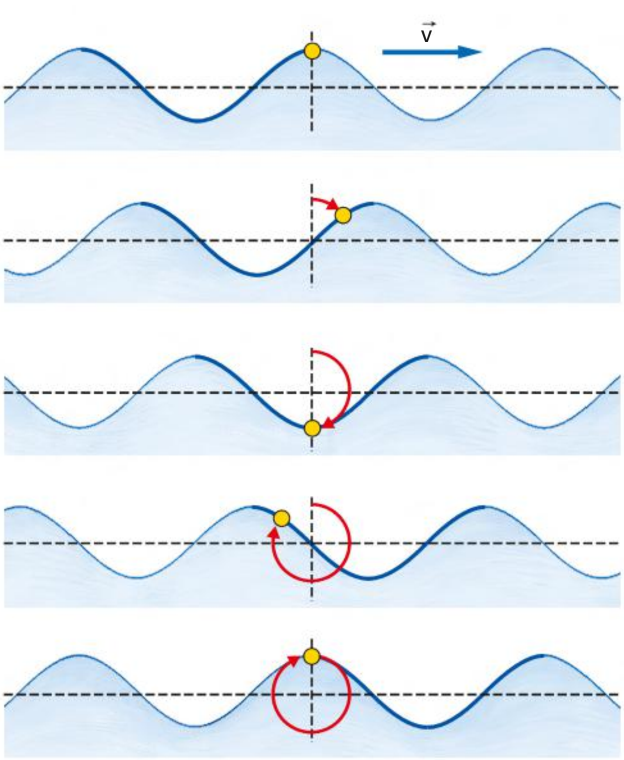
Tatiana Grozetskaya / Shutterstock

Le onde superficiali sono una combinazione di onde trasversali e onde longitudinali.

1 La direzione della velocità v di una particella cambia nel tempo a seconda della porzione d'onda in cui si trova.



2 Questo accade perché i liquidi sono incomprimibili: le particelle si devono muovere dalla cresta al ventre dell'onda e viceversa, spostandosi su traiettorie non rettilinee. In prossimità della superficie queste traiettorie sono circonferenze.



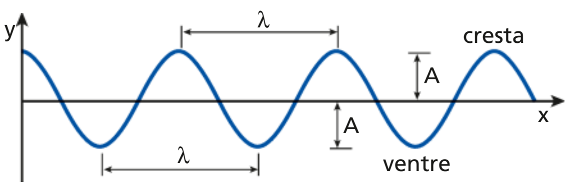
7 Dall'oscillazione delle particelle del mezzo alla propagazione dell'onda

La descrizione di un'onda è complessa perché:

- i punti del mezzo investiti dall'onda oscillano in modo coordinato e danno luogo a quelle configurazioni spaziali che sono la forma dell'onda;
- ogni punto del mezzo oscilla attorno alla sua posizione di equilibrio con un moto periodico.

Distinguiamo quindi due rappresentazioni dell'onda.

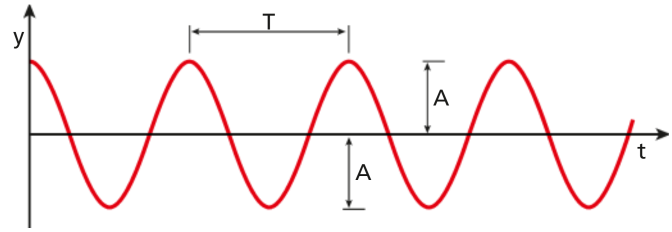
Rappresentazione spaziale dell'onda. Dà la forma dell'onda in un dato istante e corrisponde alla *fotografia* dell'onda.



In essa si distinguono:

- l'**ampiezza** A dell'onda, cioè il massimo spostamento dalla posizione di equilibrio delle particelle del mezzo;
- la **lunghezza d'onda** λ, che è la distanza fra due punti identici e successivi dell'onda, come per esempio due creste o due ventri: dopo una lunghezza uguale a λ, l'onda si ripete identica.

Rappresentazione temporale dell'onda. Dà lo spostamento in funzione del tempo di una data particella del mezzo. In altri termini, è la legge oraria del moto di una particella del mezzo investita dall'onda.



In essa si distinguono:

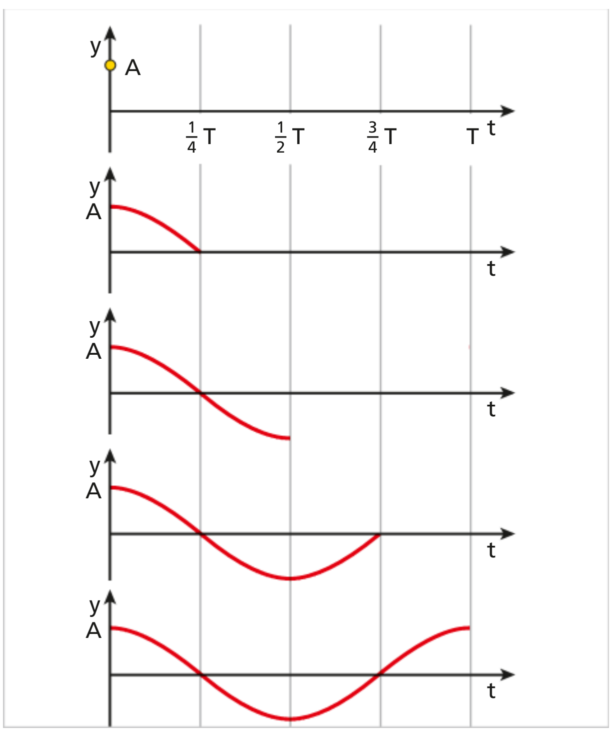
- l'**ampiezza** A dell'onda, cioè il massimo spostamento dalla posizione di equilibrio della particella del mezzo;
- il **periodo** T, che è l'intervallo di tempo in cui un punto del mezzo compie un'oscillazione completa.

In un'onda bisogna quindi distingure due moti che coinvolgono le particelle di un mezzo in cui si propaga un'onda:

- il *moto locale* di oscillazione di ciascuna particella del mezzo;
- il *moto globale* di avanzamento dell'onda che è l'effetto combinato dei moti delle singole particelle del mezzo.

I grafici seguenti mettono in relazione i due moti.

1 **Rappresentazione temporale**. La legge oraria durante un'oscillazione completa di una particella P del mezzo a partire dalla posizione iniziale di coordinate $x = 0$ e $y = A$.



2 **Rappresentazione spaziale.** Fotografie della forma dell'onda in corrispondenza degli istanti di tempo indicati nella legge oraria (a sinistra): notiamo l'oscillazione della particella P sulla retta $x = 0$.