Analisi di algoritmi ricorsivi: equazioni di ricorrenza

corso di laurea in **Matematica**

Informatica Generale, **Ivano Salvo**

Lezione **9(a)** **[24/10/23]**

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Analisi minimo ricorsivo

Vediamo l'algoritmo per calcolare il minimo di un vettore in forma **ricorsiva**.

Il caso base è costante così come il calcolo di del minimo tra due numeri (elemento corrente e risultato ricorsivo di `minV`).

La chiamata ricorsiva si applica a un vettore di lunghezza n – 1.

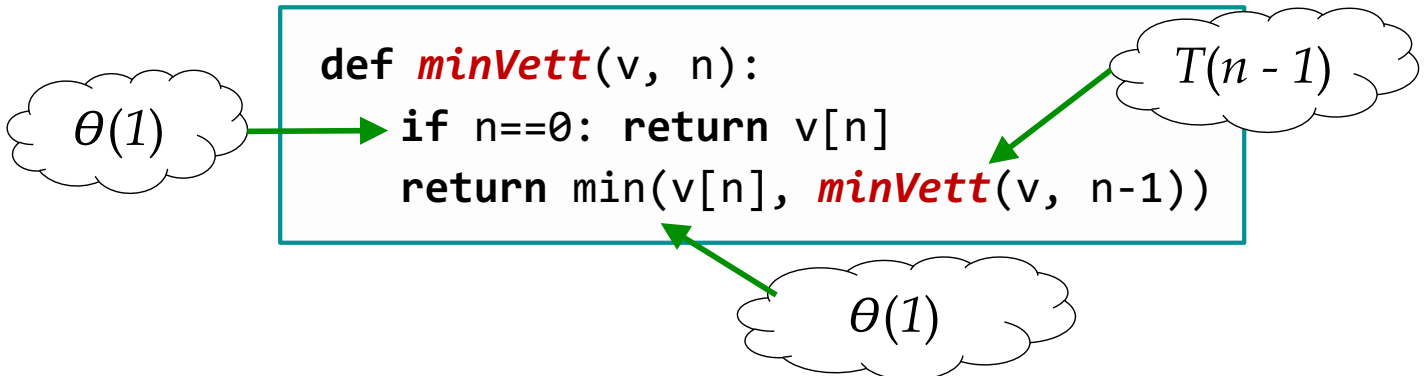
Abbiamo quindi la **relazione di ricorrenza**:

$$T(n) = T(n - 1) + \Theta(1) \qquad T(1) = \Theta(1)$$

Qui, è necessario (e sufficiente) applicare il metodo iterativo.

$T(n) = T(n - 1) + \Theta(1) = T(n - 2) + \Theta(1) + \Theta(1) = \ldots$

$= \sum_{i=1, \ldots, n} \Theta(1) = \Theta(n)$



insertSort ricorsivo

Vediamo l'algoritmo insertionSort in forma **ricorsiva** (notate la concisione ☺)

Certo, bisogna scrivere **`insert`**. ➧ **Esercizio**.

Il caso base è costante mentre **`insert`** ha costo (pessimo) $\mathcal{O}(n)$.

La chiamata ricorsiva si applica a un vettore di lunghezza $n - 1$.

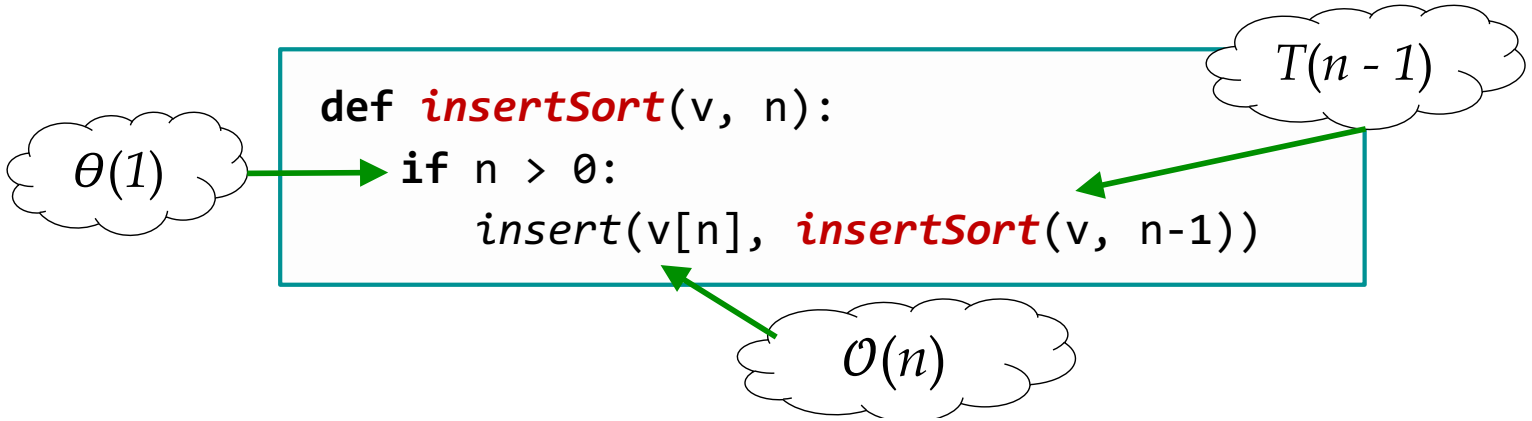
Abbiamo quindi la **relazione di ricorrenza**:

$$T(n) = T(n - 1) + \mathcal{O}(n) \qquad T(1) = \Theta(1)$$

Anche qui, è necessario (e sufficiente) applicare il metodo iterativo.

$T(n) = T(n - 1) + \mathcal{O}(n) = T(n - 2) + \mathcal{O}(n - 1) + \mathcal{O}(n) + \Theta(1) = \ldots$

$= \sum_{i=1, \ldots, n} \mathcal{O}(i) = \mathcal{O}(n^2)$ (Formula di Gauss)



Metodo di sostituzione

Questo è il metodo **più potente**, ma **più pericoloso** ☺ e direi, destinato a un **pubblico adulto**.

Idea: **ipotizzare una soluzione** e **verificare** che soddisfi l'equazione.

Difficoltà:

- formulare una **buona ipotesi** (usualmente serve **esperienza**)
- evitare i tranelli della notazione asintotica (occorre eliminare Θ, $\mathcal{O}$, e $\mathbf{\Omega}$ e considerare **esplicitamente le costanti**)

Vediamo nel caso di ***`mergeSort`***.

a) si **elimina la notazione asintotica**, in quanto le costanti nascoste potrebbero essere diverse. Otteniamo quindi: $T(n)=2\,T(n/2) + c\,n$ e $T(1) = d$ con $c, d > 0$.

b) **Formuliamo l'ipotesi** $T(n) = \Theta(n \log n)$ e

c) **mostriamo separatamente** per **induzione su *n*** che $T(n)=\mathcal{O}(n \log n)$ e $T(n) = \Omega(n \log n)$.

$\mathcal{O}(n \log n)$ e $\Omega(n \log n)$ a loro volta **lasciano la libertà di fissare delle costanti**: sono nella forma $k\,n \log n + h$ per **costanti arbitrarie** k e h.

Metodo di sostituzione: esempio

- $T(n) = \mathcal{O}(n \log n)$: significa trovare opportune costanti h, k per cui:

Caso Base: $T(1) = d \leq k\,1 \log 1 + h$. Ciò è vero per opportuna scelta di $h > d$ (h deriva dall'eliminazione della notazione asintotica!)

Passo Induttivo:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2\,T(n/2) + cn && = \{\textbf{induzione}\} \\ &\leq 2\,(k\,n/2 \log n/2 + h) + cn && = \{\textbf{svolgo}\} \\ &= k\,n \log n/2 + 2h + cn && = \{\textbf{logaritmo}\} \\ &= k\,n\,(\log n - 1) + 2h + cn && = \{\textbf{svolgo}\} \\ &= k\,n \log n - k\,n + 2h + cn = k\,n\,log\,n + h + h + cn - kn \end{aligned}$$

che è minore di $k\,n\,log\,n + h$ a patto che $h + cn - kn$ sia negativa, cioè se $cn + h \leq k\,n$ e posso scegliere semplicemente $k \geq c$ a questo fine.

- $T(n) = \Omega(n \log n)$. Troviamo opportune costanti h', k' per cui:

Caso Base: $T(1) = d \geq k\,1 \log 1 + h'$ (esempio $h' = 0$).

Passo Induttivo: (scelgo subito $h' = 0$).

$$\begin{aligned} T(n) &\geq \{\textbf{induzione}\}\ 2\,k'\,(n/2 \log n/2) + cn = \{\textbf{svolgo \& log}\} \\ &= k'\,n \log n - k'\,n + cn \end{aligned}$$

che è maggiore di $k'\,n\,log\,n$ a patto che $cn - k'n$ sia **positiva**, cioè per $cn \geq k'n$ e quindi per $c \geq k'$.

Teorema Principale

Quando **divido** in il problema originale in b **istanze** e ne **risolvo** a, si può trovare (**quasi sempre**) la **soluzione generale** dell'equazione di ricorrenza:

$$T(n) = a\,T(n/b) + \theta(f(n)) \qquad T(1) = \theta(1)$$

Esempi:

- in `mergeSort` abbiamo $a = b = 2$ e $f(n) = n$.
- nella **ricerca binaria**, invece $a = 1$, $b = 2$, e $\theta(f(n)) = 1$.

Teorema [**Principale** o dell'**Esperto o Master Theorem**]. *Dati* $a \geq 1$ *e* $b > 1$ *e una funzione asintoticamente positiva* $f(n)$ *e un'equazione di ricorrenza nella forma* $T(n) = a\,T(n/b) + \theta(f(n))$ *e* $T(n)=\theta(1)$, *vale che:*

1. *se* $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ *per qualche* $\varepsilon > 0$ *allora* $T(n) = n^{\log_b a}$

2. *se* $f(n) = \theta(n^{\log_b a})$ *allora* $T(n) = n^{\log_b a} \cdot \log n$

3. *se* $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ *per qualche* $\varepsilon > 0$ *e se* $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ *per qualche* $c < 1$ (*per n sufficientemente grande*) *allora* $T(n) = \theta(f(n))$

Difficoltà del Teorema Principale

Il teorema principale prescrive, per risolvere un'equazione di ricorrenza nella forma:

$$T(n) = a\,T(n/b) + \theta(f(n)) \qquad\qquad T(1) = \theta(1)$$

di **confrontare** tra loro, le funzioni:

$$f(n) \qquad n^{\log_b a}$$

e (in prima approssimazione) la complessità è **governata** dalla **maggiore delle due**.

Attenzione: alle condizioni $f(n) = \mathcal{O}(n^{\log_b a - \varepsilon})$ e $f(n) = \boldsymbol{\Omega}(n^{\log_b a + \varepsilon})$ che significano che $f(n)$ deve essere **polinomialmente più piccola** oppure **polinomialmente più grande**.

Ciò significa che tra i casi **1** e **2** e tra i casi **2** e **3** c'è una **zona grigia** in cui il Teorema Principale **non ci assiste**.

Esempio: $T(n) = 2\,T(n/2) + \theta(n \log n)$ e $T(1) = \theta(1)$. In questo caso ho che $a = b = 2$ e $\log_2 2 = 1$, $n^1 = n$ e $n = \mathcal{O}(n \log n)$, ma **non c'è nessun ε per cui $n \log n > n^{1+\varepsilon}$** (in quanto asintoticamente ho che $\log n < n^{\varepsilon}$ per ogni $\varepsilon > 0$, calcolate ad esempio $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{\varepsilon}} = 0$).

Teorema Principale: esempi caso 2

Vediamo un po' di esempi (abbiamo sempre $T(1) = \theta(1)$), cominciando dal calcolo di due algoritmi già visti:

Ricerca Binaria

In questo caso abbiamo $T(n) = T(n/2) + \theta(1)$.

Quindi $a = 1$, $b = 2$ e quindi $\log_2 1 = 0$.

Inoltre $f(n)$ è una costante, come anche $n^{log_b\, a} = n^0 = 1$.

Quindi $f(n)$ è $\theta(1)$, siamo nel caso **2**. del Teorema Principale e la soluzione è $T(n) = \theta(n^{log_b\, a} \log n) = \theta(\log n)$.

mergeSort

In questo caso abbiamo $T(n) = 2T(n/2) + \theta(n)$.

Quindi $a = 2$, $b = 2$ e quindi $\log_2 2 = 1$.

Inoltre $f(n) = n$, come anche $n^{log_b\, a} = n^1 = n$.

Siamo ancora nel caso **2**. del Teorema Principale e la soluzione è $T(n) = \theta(n^{log_b\, a} \log n) = \theta(n \log n)$.

Teorema Principale: esempi caso 1

Vediamo altri esempi (abbiamo sempre $T(1) = \theta(1)$), stavolta di algoritmi che **non vedrete** in questo corso:

Ricerca Binaria su matrice quadrata $n \times n$ ordinata

In questo caso abbiamo $T(n^2) = 3\,T(n^2/4) + \theta(1)$.

Quindi $a = 3$, $b = 4$ e $\log_4 3 = 0.79248\ldots$

Inoltre $f(n^2)$ è una costante, e quindi $f(n^2) = \mathcal{O}((n^2)^{0.79247\ldots})$.

Quindi siamo nel caso **1**. del Teorema Principale e la soluzione è $T(n^2) = \theta((n^2)^{log_4\,3}) = \theta(n^{1.58496\ldots})$.

Algoritmo di Strassen per il prodotto tra matrici

In questo caso abbiamo $T(n) = 7\,T(n/2) + \theta(n^2)$.

Quindi $a = 7$, $b = 2$ e quindi $\log_2 7 = 2.80735\ldots$

Inoltre $f(n) = n^2$, e quindi $f(n) = \mathcal{O}(n^{2.80735\ldots})$

Siamo ancora nel caso **1**. del Teorema Principale e la soluzione è $T(n) = \theta(n^{log_2\,7}) = \theta(n^{2.80735\ldots})$.

Teorema Principale: esempio caso 3

Vediamo un esempio (sempre $T(1) = \theta(1)$), di algoritmo misterioso che ha la relazione di ricorrenza:

$$T(n) = 4\,T(n/2) + n^{5/2}$$

Abbiamo a=4, b=2 e $\log_2 4 = 2$.

Inoltre $f(n) = n^{5/2} = \mathbf{\Omega}(n^{2+\varepsilon})$ per $0 < \varepsilon \leq ½$. Quindi siamo nel caso **3.** del Teorema Principale.

Occorre in questo caso verificare anche una condizione supplettiva, e cioè $a\,f(n/b) < c\,f(n)$ per qualche $c < 1$.

Nel nostro caso vale, in quanto: $4\,(n/2)^{5/2} < c\,n^{5/2}$, osservando che $2^{5/2}=4\sqrt{2}$, otteniamo che l'equazione è soddisfatta per $1/\sqrt{2} < c$, ed essendo $1/\sqrt{2} < 1$, esistono soluzioni.

Quindi, $T(n) = \theta(n^{5/2}) = \boldsymbol{\theta(n^2\sqrt{n})}$.

That's all Folks!

corso di laurea in **Matematica**

Informatica Generale, **Ivano Salvo**

Lezione **9(a)** **[24/10/22]**

SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA