I Frattali: La Geometria della Natura

(Alberto Renieri – Associazione "I Sette")

1. Introduzione

È la vigilia di Natale. Sto dando gli ultimi ritocchi al presepe. Accanto alla grotta metto un bel rametto caduto dalla quercia che abbiamo in giardino. Mia moglie, guardando il presepe, mi dice: "è proprio bello, e quel rametto sembra proprio un albero". Sì, nel suo piccolo sembra proprio un albero. E sembrano proprio alberi quei singoli rami più grandi di quella quercia, dai quali partono tanti rametti come quello del presepe. Non è un caso, è la "geometria della natura". Quella quercia, come tutte le querce del mondo, come quasi tutte le specie di alberi del mondo, presenta una particolare proprietà: ogni sua parte assomiglia al tutto, cioè ha la proprietà di *"auto-similarità"*.

2. Auto-Similarità, Frattali, Invarianza di Scala e Dimensione

Gli alberi non sono certo l'unico esempio di "auto-similarità", più in generale le piante sono tipicamente oggetti auto-simili. Come esempio in fig. 1 sono riportate una "felce" generata al computer per auto-similarità e una foto di una felce reale.

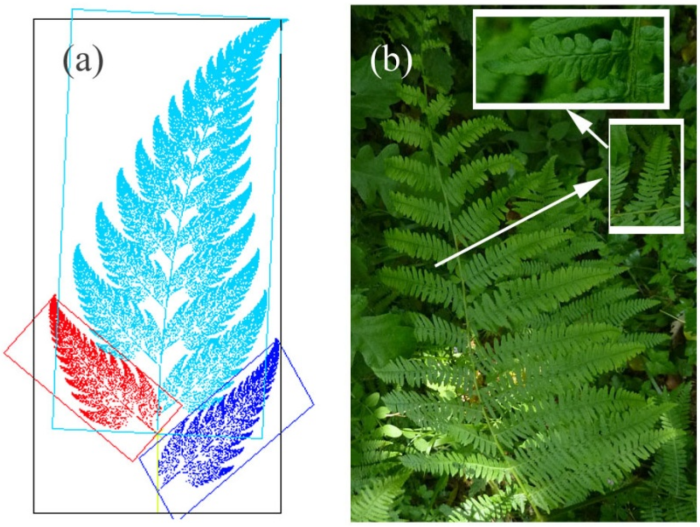

Fig.1 – (a) Immagine di una felce generata al computer per auto-similarità; (b) Foto di una felce reale.

Ogni singolo componente della foglia è simile alla foglia completa, ma ogni componente è a sua volta composto da sub-componenti simili a lui e alla foglia completa, e così via.

La *Brassica botrytis* o cavolfiore romano (fig. 2) è un altro esempio vivente di frattale naturale. ogni cespo del cavolfiore è una copia fedele dell'intero cavolfiore. Se osserviamo un cespo del cespo del cavolfiore sotto una lente di ingrandimento appare a sua volta indistinguibile dall'intero cavolfiore.

Fig. 2 – Cavolfiore romano

Le felci e cavolfiori romani sono begli esempi di auto-similarità, pur non potendo esserlo esattamente. La proprietà di auto-similarità prima o poi cessa di valere per un oggetto reale, se non altro perché alla fine si raggiunge la dimensione atomica! Ovviamente per una felce o per un cavolfiore l'auto-similarità cessa ben prima di arrivare agli atomi, ma in altri casi (non legati al mondo vivente) ci si arriva molto più vicino, come, ad esempio, in un liquido quando si arriva al punto di ebollizione (vedi successivo par. 4).

Le figure che godono della proprietà di auto-similarità sono chiamate *"frattali"*. I frattali, rispetto alle figure della geometria classica, hanno la caratteristica peculiare che, se ne ingrandiamo anche una piccola parte, riproduciamo in scala una figura simile a quella di partenza. Questa proprietà dei frattali prende così anche il nome di *"invarianza di scala"*, cioè se osserviamo un frattale al microscopio, via via che aumentiamo gli ingrandimenti, cioè cambiamo "scala", ci troviamo di fronte ad immagini più o meno simili. Dal punto di vista geometrico i frattali hanno poi una caratteristica veramente speciale, la "dimensione". La dimensione di una figura geometrica è collegata a quanti parametri (coordinate) sono necessari per caratterizzarla. Sappiamo tutti che un punto ha dimensione zero, cioè è privo di dimensioni, una linea ha dimensione 1, cioè è unidimensionale, una superficie, per esempio un triangolo o un cerchio, ha dimensione 2 (è bidimensionale), un solido, ad esempio un cilindro o un cubo, ha dimensione 3 (è tridimensionale), e qui ci si ferma (almeno nel nostro spazio a tre dimensioni!). I frattali hanno una dimensione che può essere non solo intera (0,1,2,3) ma anche, in molti casi, frazionaria (compresa tra 0 e 3), ovvero si possono avere, ad esempio, anche frattali di dimensione 1,5 o 2,4 oppure 0,3. Il concetto di dimensione frazionaria fu introdotto nel lontano 1918 da Felix Hausdorf, e quando si parla di "dimensioni frattali" ci si riferisce usualmente alle "dimensioni di Hausdorf " [1]. La dimensione di un frattale ne determina le proprietà più rilevanti, e tali proprietà, possono anche venire ben sfruttate in molti campi, dall'astronomia alla medicina fino, addirittura, alla finanza!

3. La neve

La natura che ci circonda è ricca di frattali. Abbiamo già parlato delle piante, ma anche il mondo inanimato ci appare in larga parte frattale. Ad esempio una linea di costa, il profilo dei monti, la distribuzione delle goccioline d'acqua nelle nuvole. Sicuramente uno dei più bei frattali che troviamo in natura sono i fiocchi di neve, come quello, ad esempio, riportato in fig. 3.

Fig. 3 – Fiocco di neve

Non esistono due fiocchi di neve identici, ogni fiocco si sviluppa secondo una sua propria geometria. Però hanno tutti la caratteristica dell’invarianza di scala. Partendo da una simmetria esagonale, dovuta alle proprietà molecolari dell’acqua, il fiocco cresce lungo i sei bracci principali generando altri bracci secondari simili a quelli di partenza, e poi da questi bracci secondari si sviluppano altri bracci più piccoli, sempre simili a quelli precedenti, e così via. Possiamo costruire sul nostro computer un fiocco di neve seguendo un procedimento descritto nel 1904 dal matematico svedese Helge von Koch [2] per la realizzazione della celebre forma che prende il suo nome: “fiocco di neve di von Koch”, una delle prime curve frattali che si conoscano. La costruzione parte da un triangolo equilatero (vedi Fig. 4) di lato pari a 1; si divide ogni lato in tre parti uguali e sul terzo centrale di ogni lato si disegna un triangolo equilatero di lato pari a un terzo del lato iniziale. Si ottiene così la nota “stella di David”, di perimetro uguale a 4.

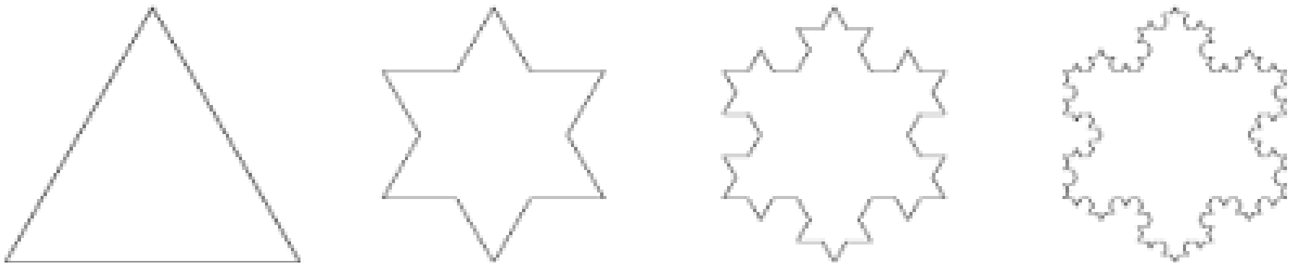

Fig. 4 – Fiocco di neve di von Koch

Si ripete il processo su ognuno dei dodici lati e così all’infinito. I cultori di giochi matematici potranno facilmente derivare le relazioni matematiche che portano all’area e al perimetro del fiocco di neve di von Koch dopo infinite iterazioni. Ebbene la particolarità di questa figura è che, alla fine, l’area in essa racchiusa è finita, mentre il perimetro è infinito! Non ci addentreremo nella matematica frattale, ma riportiamo, come esempio, la dimensione frattale $\mathscr{D}$ del fiocco di neve di von Koch che è data da:

$$\mathscr{D} = \log N / \log R = \log 4 / \log 3 = 1{,}262$$

La formula su riportata è l’espressione generale della dimensione secondo Hausdorf, dove N è il numero di pezzi nei quali può essere spezzato il frattale in modo che ogni pezzo sia simile al frattale iniziale e R è il fattore di riduzione (nel caso che consideriamo dividiamo ogni volta i lati per tre). La dimensione del fiocco di neve di von Koch è dunque intermedia tra una linea e una superficie. Più la dimensione si avvicina a 2 più il frattale tenderà a ben ricoprire uniformemente una superficie. Se si avvicina ad 1 assomiglierà sempre più a una semplice linea.

4. Transizioni di fase (acqua in ebollizione)

Rimaniamo nell'ambito dell'acqua per osservare un altro fenomeno descritto dalla geometria frattale: l'acqua in ebollizione.

Nell'acqua che bolle la fase vapore e la fase liquida cercano di accaparrarsi l'acqua: cosicché, all'equilibrio, questa lotta porta ad una configurazione critica, nella quale un bolla di vapore contiene gocce d'acqua all'interno di ciascuna delle quali c'è una piccola bolla di vapore che contiene gocce d'acqua all'interno di ciascuna delle quali ... Il risultato è che abbiamo bolle di tutte le dimensioni e, se osservassimo il tutto ad un microscopio vedremmo sempre lo stesso panorama indipendentemente dall'ingrandimento. È questa la fase, ben conosciuta a chi cuoce la pasta, nella quale l'acqua perde la sua trasparenza diventando praticamente bianca, in grado di riflettere luce di tutti i colori (e dunque in totale bianca) proprio perché contiene bolle di tutte le dimensioni. In questo caso è la forma e distribuzione delle bolle di vapore ad essere descritta da un frattale. Questo fatto non si limita all'acqua al punto di ebollizione ma è comune a tutte le transizioni di fase (solidificazione, liquefazione, transizioni di materiali magnetici,…)

5. I frattali nel nostro corpo

Abbiamo visto frattali presenti nel mondo inanimato e nelle piante. E gli animali? E noi? Siamo anche noi in qualche parte frattali? La risposta è sì. Chi ha applicato tra i primi la geometria frattale ai processi fisiologici è stato Ary Goldberger e i suoi collaboratori della Harvard Medical School [3]. Gli esempi sono molti (i villi intestinali, i capillari, gli alveoli nei polmoni,…), qui ne riporteremo solo uno: il battito cardiaco, come "processo" frattale.

Si è portati naturalmente a pensare che uno stato di buona salute sia quello nel quale le funzioni organiche seguono un ritmo regolare, mentre uno stato patologico sia associato a forme di irregolarità. Niente di più falso. Prendiamo il ritmo cardiaco. Esso è determinato da un insieme di stimoli e di controreazioni che, in un soggetto sano, portano ad una grande irregolarità e "caoticità". È proprio il caos "deterministico" che è indice che l'organismo funziona correttamente. La perdita di questo stato di caos si associa all'insorgenza di una eccessiva regolarità, di una precisa periodicità, indice di una patologia in atto come insufficienza cardiaca, aritmia, fibrillazione… In questi casi patologici la curva che descrive l'andamento della frequenza del ritmo cardiaco è un curva "regolare", come, ad esempio, quella riportata in fig. 7(A).

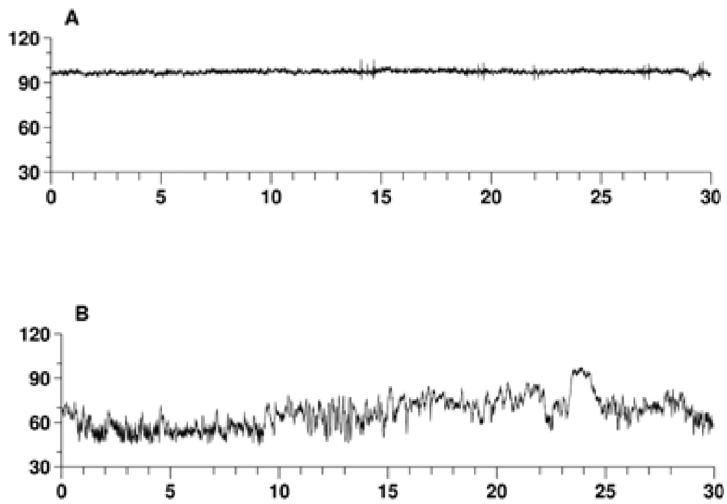

Fig.7 – Evoluzione nel tempo (asse orizzontale in minuti) della frequenza del ritmo cardiaco (asse verticale in pulsazioni al minuto).

(A) Soggetto con patologia in atto
(B) Soggetto sano

(da Goldberger)

Nel caso di un soggetto in buona salute è la curva che descrive l'andamento della frequenza nel tempo ad essere "matematicamente patologica" (fig. 7B). Si può dimostrare che tale curva è un frattale. Se andiamo ad esaminare l'evoluzione della frequenza su tempi più lunghi troviamo sempre lo stesso tipo di "panorama accidentato". In pratica osservando uno di questi tracciati non è possibile risalire alla scala temporale, in quanto ogni porzione della curva è simile alla curva intera. Invece di rappresentare l'andamento temporale del ritmo cardiaco se ne può riportare lo "spettro" in frequenza (denominato "trasformata di Fourier "). Via via che si misura lo spettro su tempi sempre più lunghi, la curva appare sempre più minutamente "frastagliata". Anche in questo caso, come per il fiocco di neve di Koch, la lunghezza della curva che descrive lo spettro della frequenza del ritmo cardiaco, in un dato intervallo di frequenze, tende verso l'infinito man mano che si allunga il tempo di misura, mentre l'area sotto di essa continua ad avere un valore finito. Fra l'altro è proprio questa proprietà (l'essere un frattale) che viene sfruttata anche in alcuni apparecchi casalinghi di misura della pressione e del battito cardiaco, al fine di dare un segnale di allarme se il battito mostra caratteristiche patologiche (cioè se è estremamente regolare e non è più descritto da un frattale).

6. E quindi uscimmo a riveder le stelle

Il numero di stelle nell'universo è immenso. Newton ipotizzava addirittura un universo infinito con un numero di stelle parimenti infinito. Ma se le stelle sono veramente così tante (anche se non in numero infinito come pensava Newton), come mai di notte noi, ma anche Dante e Virgilio uscendo dall'inferno (Fig. 8), le vediamo distintamente, invece di vedere una luminosità diffusa data dalla sovrapposizione di tutti questi innumerevoli astri?

Fig. 8 – Gustave Dorè – Dante e Virgilio escono dall'inferno. Dante, Inferno, Canto XXXIV.

Il fatto è che le stelle, o meglio le galassie, non sono distribuite più o meno uniformemente nell'universo, ma presentano una distribuzione frattale, con grandi addensamenti ed immensi "buchi" (si veda [4] per una trattazione accurata e completa sui "frattali nel cosmo"). Questo fa sì che si possano vedere *distintamente e separatamente* (anche utilizzando i più potenti strumenti di osservazione!) i singoli oggetti presenti nel cosmo, come si può vedere nella bella immagine di fig. 9, ottenuta nell'ambito del progetto SDSS (Sloan Digital Sky Survey [5])

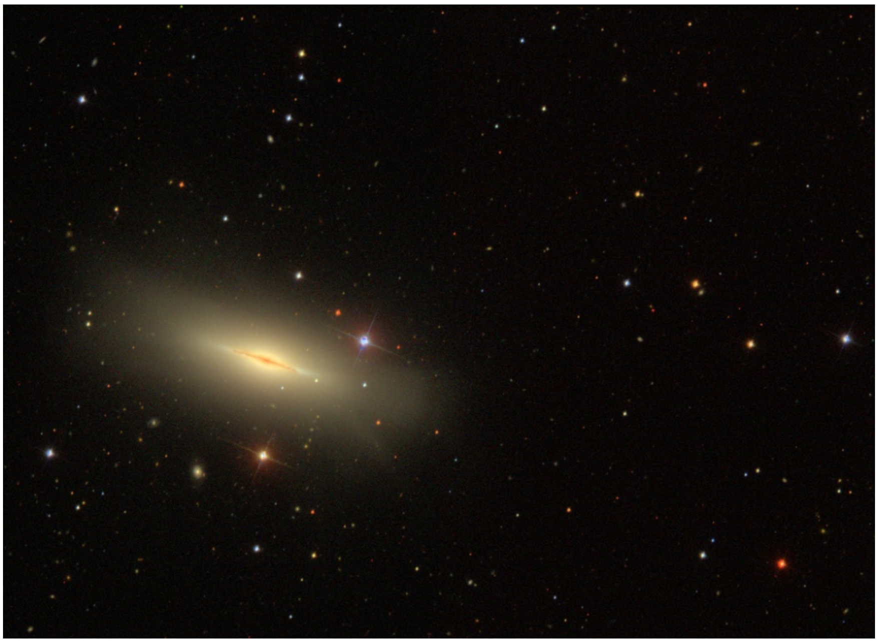

Fig. 9 – In questa immagine dello spazio profondo vediamo distintamente i singoli oggetti (Sloan Digital Sky Survey)

Tecnicamente questo effetto di distinta visibilità è dovuto al fatto che la dimensione frattale della distribuzione delle galassie (che è stata misurata sperimentalmente proprio nell'ambito del progetto SDSS) è circa 2, da confrontare con la dimensione frattale di una distribuzione più o meno omogenea, che è invece pari a 3. Se le galassie fossero state distribuite in modo uniforme nell'universo la loro dimensione frattale sarebbe dunque stata circa 3 e avremmo avuto proiettato sulla volta celeste una figura di dimensione 2, cioè una superficie, ovvero avremmo avuto di notte un cielo uniformemente illuminato. È proprio quello che accade per le nuvole. È stato appurato che le goccioline d'acqua che le compongono presentano una distribuzione frattale di dimensione vicina a 3. La sua proiezione ha dunque dimensione 2, è una superficie, per cui le nuvole ci compaiono compatte, non hanno "buchi": ci oscurano dunque il sole, ci fanno ombra, come la superficie di un ombrello! Ma che vuol dire che nella distribuzione frattale delle galassie ci sono nel cosmo "immensi buchi"? Significa che le galassie si raggruppano (a causa della forza di attrazione gravitazionale) in ammassi immensi separati da enormi regioni vuote ancora più grandi degli ammassi, ma anche gli ammassi si raggruppano in ammassi di ammassi separati da regioni vuote ancora più enormi, e così via. Ovviamente questo processo non procede all'infinito in quanto il cosmo è un aggetto "fisico" e non "matematico"e dunque la sua "auto similarità" non è "perfetta" ma ha bensì un limite superiore (la totalità delle galassie) e inferiore (la singola galassia).

7. Conclusioni

Il termine frattale fu coniato negli anni Settanta da Benoît Mandelbrot [6]. Prima di lui i frattali (che dunque allora non si chiamavano ancora così) erano studiati solo a livello matematico e considerati oggetti "mostruosi", come la famosa curva scoperta da Peano nel 1890 che "ricopre" interamente un quadrato, che è bidimensionale, e il fiocco di neve di von Koch (1904) che abbiamo già incontrato nel paragrafo 3. Famoso è diventato "l'insieme di Mandelbrot" (fig. 10), frattale che, per la sua bellezza, ormai si trova spesso riprodotto in una varietà di diverse situazioni, che spesso non hanno gran che a che fare con la matematica o la fisica. Si può dimostrare che l'insieme di Mandelbrot ha dimensione frattale $\mathscr{D} = 2$, come la curva di Peano, cioè è una curva che ha la stessa dimensione di una superficie! Ben si capisce perché tali "oggetti" venivano considerati "mostruosi".

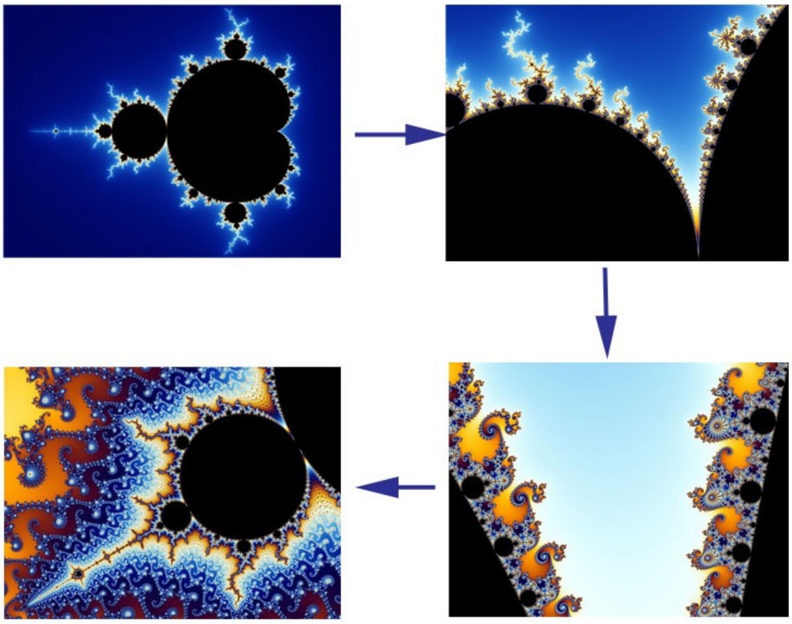

Fig. 10 – Insieme di Mandelbrot.

Successivi ingrandimenti (riportati come indicato dalle frecce) conducono a repliche simili alla figura iniziale (da Wikipedia)

Mandelbrot è riuscito a dare significato fisico a queste figure geometriche dall'apparenza così "esotica", rendendole comprensibili e utilizzabili. Per Mandelbrot, infatti, occorre superare la visione galileiana, che vede nei *"triangoli, cerchi ed altre figure geometriche"* la lingua nella quale è scritto il libro dell'universo. Per Mandelbrot, i triangoli, i cerchi e le altre figure geometriche della geometria classica sono di scarso aiuto nel descrivere le forme naturali in quanto "l*e nuvole non sono sfere, le montagne non sono coni, le coste non sono cerchi, la corteccia dell'albero non è levigata, né un fulmine viaggia in linea retta".*

Referenze

[1] Si veda, ad es., M. Maurice Dodson, Simon Kristensen, *Hausdorff Dimension and Diophantine Approximation*, in Proc. Sympos. Pure Math., 72, Part 1, p. 305—347, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004; K. J. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985

[2] H. von Koch, *Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire*, Archiv för Matemat., Astron. och Fys. 1, p. 681-702, 1904.

[3] Si veda, ad es., B. West and A. Goldberger, American Scientist 1987,75 (4): p.354- 365.

[4] Y.Baryshev and P. Teerikorpi, *Discovery of Cosmic Fractals*, Word Scientific, Singapore, 2003.

[5] La cartografia prodotta dal progetto SDSS è a disposizione di astronomi (professionisti e amatori) nel sito: http://www.sdss.org

[6] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*; W. H. Freeman & Co (1982)