PROBABILITA’

L’Origine dell’interesse per i concetti di probabilità e di calcolo delle probabilità si deve allo sviluppo dei giochi d’azzardo che si ebbe nel 1600.

In realtà giochi d’azzardo simili ad esempio al gioco dei dadi sono documentati sin dai tempi dell’antica civiltà egizia in cui si praticava lanciando una pietra e dell’antica Roma in cui il gioco dei dadi è documentato in alcuni scritti dell’età di Cicerone.

I primi studi sistematici sulla probabilità furono fatti da Pascal e Fermat (1654) che su richiesta di ricchi giocatori d’azzardo cominciarono a studiare i meccanismi che regolano tali giochi (dadi, corse, etc) e dare risposte a domande del tipo:

- In una lancio di due dadi quale è la somma che si ottiene più facilmente?
- Quante volte potrei vincere puntando su quella somma in 100 lanci di dadi?
- Conviene puntare in tutti i 100 lanci 1 moneta sull’uscita di questo numero per vincerne 2?
- In una corsa con 10 cavalli dello stesso livello quanti differenti ordini d'arrivo sono possibili?
- quale è la probabilità di indovinare i primi 3 al traguardo, secondo l'ordine?
- quale la probabilità di indovinare i primi 3, senza considerare il loro ordine?
- conviene scommettere 10 monete per guadagnarne 500 se indovino primo e secondo?
- è conveniente la scommessa provando a indovinare i primi due senza stabilire l'ordine?

La probabilità di un evento

- Ci sono avvenimenti che accadono con certezza;
- Ci sono avvenimenti che certamente non si verificheranno;
- Ci sono avvenimenti che potrebbero verificarsi, o anche no!
  - se in una scatola vi sono solo palline nere, estraendone una a caso siamo sicuri che è nera, mentre è impossibile estrarre una pallina bianca.
  - L’evento “vinco alla lotteria” è impossibile se non ho comprato biglietti,
  - L’evento “vinco alla lotteria” è certo se sono riuscito a comprare tutti i biglietti.
  - Se invece ho comprato un certo numero di biglietti, ma non tutti, l’evento potrà succedere oppure no.
    - Nel primo caso l’evento è **impossibile**;
    - Nel secondo caso l’evento è **certo**
    - Nel terzo caso invece si parla di evento possibile ma non certo
  - Ci sono quindi eventi che possono accadere, ma senza certezza.
  - Se la scatola del primo esempio contiene sia palline bianche sia palline nere,
    - l’estrazione di una pallina bianca è un evento possibile ma non certo, così come l’estrazione di una pallina nera e non possiamo sapere il colore della pallina estratta, perché l’estrazione è casuale.
- Un avvenimento che può accadere o non accadere in modo casuale è detto **EVENTO ALEATORIO**.
- È opportuno osservare che uno stesso evento può essere certo, aleatorio o impossibile a seconda del contesto in cui viene considerato.
- Stabilito però il contesto in cui si manifesta un evento aleatorio è possibile calcolare la probabilità che esso si verifichi o non si verifichi

Un esempio

Il fatto che certi eventi siano aleatori ha portato l'uomo a formulare scommesse sul loro accadere. Sono nati quindi i giochi di azzardo ed Il concetto di probabilità è nato proprio per effetto dello studio dei giochi d'azzardo!

Consideriamo il seguente gioco in cui abbiamo due diversi mazzi di carte:

- Il primo contiene 9 carte con figure e 7 carte senza figure;
- Il secondo è formato da 12 carte con figure e 6 senza figure.
- Se devi scegliere una carta da uno dei due mazzi e vinci se peschi una figura, da quale mazzo conviene scegliere la carta?
- Questo gioco è un evento di carattere aleatorio, in quanto il risultato non dipende da una legge precisa ma, di volta in volta, è imprevedibile.
- Chiamiamo casi possibili tutti i risultati che possono verificarsi.
- Per il primo mazzo i casi possibili sono 16, mentre per il secondo sono 18.
- Indichiamo con "favorevole" il caso in cui si verifica l'evento che fa vincere.
- Poiché per vincere bisogna estrarre una figura, i casi favorevoli sono tanti quante le carte con figure: 9 per il mazzo 1 e 12 per il mazzo 2.
- Consideriamo il rapporto fra i casi favorevoli e quelli possibili:
  - mazzo 1: $P1(F)= 9/16$
  - mazzo 2: $P2(F)= 12/18$.
- Poiché il secondo valore è maggiore del primo conviene scegliere di estrarre la carta dal secondo mazzo.
- Il quoziente tra casi favorevoli e casi possibili fornisce una stima sulla possibilità che si verifichi un determinato evento e viene chiamato probabilità di quell'evento

Definizione classica di probabilità

- La probabilità di un evento è il quoziente fra il numero dei casi favorevoli **f** e quello dei casi possibili **u**, quando essi sono tutti ugualmente possibili.

numero dei casi favorevoli

probabilità di E

$$p\,(E) = \frac{f}{u}$$

numero dei casi possibili

- Se un evento è impossibile, il numero dei casi favorevoli è 0; quindi:
  - $p(E)=f/u= 0/u=0$ → la probabilità di un evento impossibile è 0
- Se un evento è certo, il numero dei casi favorevoli è uguale a quello dei casi possibili;
  - quindi $p(E)= f/u= u/u = 1$ → La probabilità di un evento certo è 1
- Per gli eventi aleatori, il numero f dei casi favorevoli è compreso fra 0 e u:
  - $0 < f < u$ e quindi il rapporto f/u è compreso tra 0 e 1
  - la probabilità di un evento aleatorio è un numero compreso fra 0 e 1.

Un esempio

Nel lancio di un dado a sei facce consideriamo i seguenti eventi:

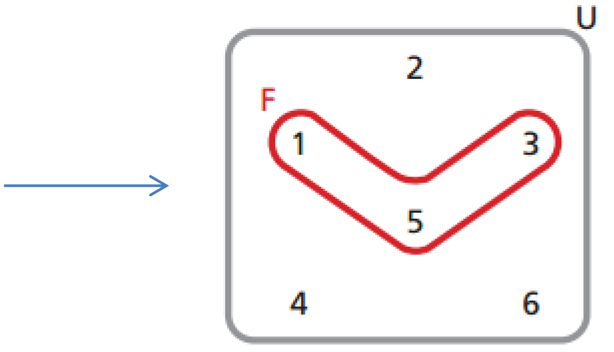
E_1 = «esce il 4»; E_2 = «esce un numero dispari»; E_3 = «esce un numero maggiore di 2».

Calcoliamo la probabilità di ciascun evento nell'ipotesi che il dado non sia truccato:

$p(E_1) = \frac{1}{6}$ (casi possibili 6, casi favorevoli 1);

$p(E_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (casi favorevoli: numeri 1, 3, 5);

$p(E_3) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (casi favorevoli: numeri 3, 4, 5, 6).



Consideriamo tra i tre esempi sopra l'evento «esce un numero dispari».
Per descrivere la situazione possiamo utilizzare il linguaggio degli insiemi.
I casi possibili sono 6, quindi l'insieme universo è U {1, 2, 3, 4, 5, 6}.
I casi favorevoli sono tre; infatti l'evento è verificato quando escono 1, 3, oppure 5.
Indichiamo con F l'insieme dei casi favorevoli: F {1, 3, 5}.

Poiché F è un sottoinsieme di U, il numero degli elementi di F è sempre minore o uguale al numero degli elementi di U.

Se l'insieme F non avesse elementi (insieme vuoto) allora l'evento sarebbe impossibile;
Se F coincide con l'insieme universo U, allora l'evento è certo.

RIASSUMENDO

- Un evento è un fatto che può accadere o meno.
  - Se avviene con certezza è detto evento certo,
  - Se non può mai accadere evento impossibile,
  - Altrimenti si parla di evento aleatorio
- La probabilità di un certo evento E, se i casi sono tutti ugualmente possibili, è il rapporto fra il numero dei casi favorevoli e quello dei casi possibili:

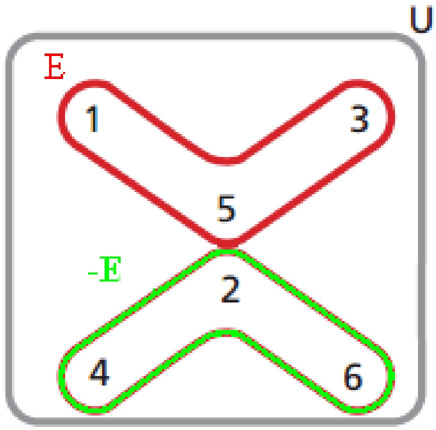
$$p(E) = \frac{\text{casi favorevoli}}{\text{casi possibili}}.$$

- La probabilità di un qualunque evento è un numero compreso fra 0 e 1:
  - Se l'evento è certo la sua probabilità è 1,
  - Se l'evento è impossibile la sua probabilità è 0,
  - Se l'evento è aleatorio la sua probabilità è maggiore di 0 e minore di 1.

La probabilità dell'evento contrario

- Dato un evento E, possiamo definire evento contrario ad E quell'evento che si verifica quando e solo quando non si verifica E
- indichiamo l'evento contrario di un evento E con il simbolo –E oppure con il simbolo $\overline{E}$
- ESEMPIO:

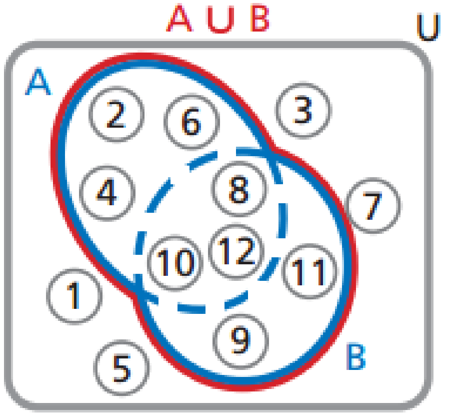
  Nel lancio di un dado, l'evento contrario dell'uscita di un numero dispari è l'uscita di un numero pari.



- La somma della probabilità di un evento E di quella del suo evento contrario $\overline{E}$ è uguale a 1.
  p(E) + p(-E) = 1. →→ p(-E)= 1-p(E)

Unione o Somma logica di Eventi

- Evento unione o somma logica:
  - Dati gli eventi E1, E2, relativi allo stesso insieme universo, il loro evento unione, che indichiamo con E1 U E2, è quell'evento che si verifica al verificarsi di almeno uno degli eventi dati.
- Esempio: Consideriamo il lancio di due dadi:
  - Consideriamo i due eventi:
    - E1 «esce un numero pari»
    - E2 «esce un numero maggiore di 7».
  - L'insieme dei casi favorevoli a E1 è A {2, 4, 6, 8, 10, 12}.
  - L'insieme dei casi favorevoli a E2 è B {8, 9, 10, 11, 12}.
  - L'evento E «esce un numero pari **o** maggiore di 7» è formato dai due eventi E1 ed E2, uniti dal connettivo logico «**o**».
  - I casi favorevoli di questo evento sono sia quelli di E1 che quelli di E2 perché l'evento si considera verificato se avvengono E1 o E2 (basta uno solo dei due)
  - questo evento è detto evento unione o somma logica di E1 ed E2.
  - L'evento E ha come casi favorevoli sia quelli dell'insieme A sia quelli dell'insieme B. L'insieme che lo rappresenta è quindi l'unione dei due insiemi:
    - A U B {2, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12}.



Eventi compatibili ed incompatibili

- In generale due eventi, relativi allo stesso insieme universo, si dicono incompatibili se il verificarsi di uno esclude il verificarsi contemporaneo dell'altro.
- In caso contrario si dicono compatibili.
- Esempio: sempre con riferimento al dado,
  - l'uscita di un numero pari e quella dell'uscita di un numero dispari sono incompatibili;
  - l'uscita di un numero pari e quella di un numero maggiore di 5 sono compatibili
- Se due eventi, E1 ed E2, sono incompatibili, la probabilità del loro evento unione è uguale alla somma delle loro probabilità:
  - $p(E1 \cup E2) = p(E1) + p(E2)$.
- Se due eventi E1 ed E2 sono compatibili, la probabilità del loro evento unione è uguale alla somma delle loro probabilità, diminuita della probabilità del loro evento intersezione.
  - $p(E1 \cup E2) = p(E1) + p(E2) - p(E1 \cap E2)$.

Esempi

- Estraendo una carta da un mazzo di 40, qual è la probabilità che sia un re o una carta di oro?
  - Il connettivo "o" ci fa pensare alla **somma logica**, quindi all'operazione di **unione** di eventi. Ma in questo caso i due eventi sono **compatibili**, giacché può uscire un re di oro. Quindi

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = \frac{4}{40} + \frac{10}{40} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}$$

- Lanciando un dado, qual è la probabilità che esca un 6 o un numero dispari?
  - Il connettivo "o" ci fa pensare alla **somma logica**, quindi all'operazione di **unione** di eventi. Inoltre i due eventi sono **incompatibili**, dato che 6 è un numero pari. Quindi la probabilità della somma logica degli eventi è data dalla somma delle probabilità dei singoli eventi elementari, cioè:

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

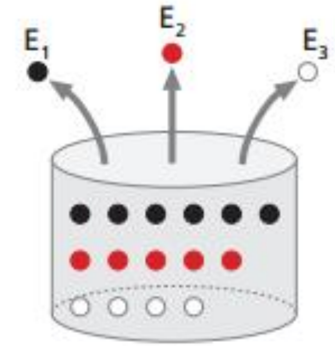
Esempio

Un'urna contiene 6 gettoni neri, 5 rossi e 4 bianchi. Estraendo un gettone a caso si può verificare uno dei seguenti eventi:

E_1 = «estrazione di un gettone nero»;

E_2 = «estrazione di un gettone rosso»;

E_3 = «estrazione di un gettone bianco».



Le probabilità sono: $p(E_1) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$; $p(E_2) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$; $p(E_3) = \frac{4}{15}$.

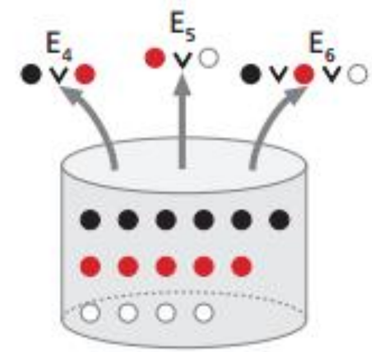
Questi eventi sono fra loro incompatibili, perché se uno si verifica, non si verifica contemporaneamente nessuno degli altri due.

Calcoliamo, applicando il teorema, la probabilità degli eventi seguenti:

E_4 = «estrazione di un gettone nero o rosso»;

E_5 = «estrazione di un gettone rosso o bianco»;

E_6 = «estrazione di un gettone nero o rosso o bianco».

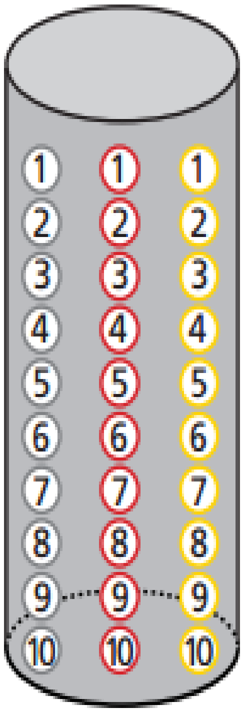


$$p(E_4) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15};$$

$$p(E_5) = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5};$$

$$p(E_6) = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} + \frac{4}{15} = \frac{15}{15} = 1.$$

Esempio



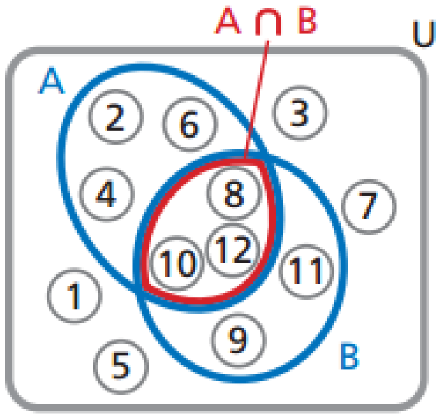
Dentro un'urna vi sono 30 palline: 10 bianche numerate da 1 a 10, 10 rosse e 10 gialle numerate allo stesso modo.
Calcoliamo la probabilità che, estraendone una a caso, venga estratta una pallina gialla o pari.

Il numero totale di palline è 30. La probabilità che venga estratta una gialla è $p(G) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.
Le palline con numero pari sono 5 per ogni colore, quindi 15. La probabilità che venga estratto un numero pari è $p(P) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.
Gli eventi sono compatibili; i casi favorevoli a entrambi gli eventi (pallina gialla e pari) sono 5. La probabilità dell'evento cercato è

$$p = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{30} = \frac{2}{3}.$$

Intersezione o prodotto logico di eventi

- Evento intersezione o prodotto logico:
  - Dati gli eventi E1 ed E2, relativi allo stesso insieme universo, il loro evento intersezione, che indichiamo con E1 ∩ E2, è l'evento che si verifica quando si verificano contemporaneamente entrambi gli eventi dati.
- Esempio: Consideriamo il lancio di due dadi:



  - Consideriamo i due eventi:
    - E1 «esce un numero pari»
    - E2 «esce un numero maggiore di 7».
  - L'insieme dei casi favorevoli a E1 è A {2, 4, 6, 8, 10, 12}.
  - L'insieme dei casi favorevoli a E2 è B {8, 9, 10, 11, 12}.
  - L'evento E «esce un numero pari **e** maggiore di 7» è formato dai due eventi E1 ed E2, uniti dal connettivo logico «**e**».
  - I casi favorevoli di questo evento sono solo quelli comuni ad E1 ed E2 perché l'evento si considera verificato se avvengono sia E1 che E2
  - questo evento è detto evento intersezione o prodotto logico di E1 ed E2.
  - L'evento E ha come casi favorevoli quelli contemporaneamente favorevoli ad A e B. L'insieme che lo rappresenta è quindi l'intersezione dei due insiemi:
    - A∩B = {8, 10, 12}.

La probabilità condizionata: Eventi dipendenti

Consideriamo l'estrazione da un urna che contiene 12 palline numerate da 1 a 12 ed i due eventi:

E1 «esce un multiplo di 3»; E2 «esce un numero minore di 9».

- L'insieme universo è dato da U {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12},
- quello dei casi favorevoli a E1 è A {3, 6, 9, 12}, quello dei casi favorevoli a E2 è B {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.
- La probabilità di E1 è: p(E1) = 4/12= 1/3
- In una estrazione si è verificato l'evento E2. E' stato quindi estratto un numero minore di 9
- Cosa possiamo dire, ora, della probabilità che il numero estratto sia multiplo di 3?
- il fatto che E2 si sia verificato ci dà alcune informazioni in più sulla possibilità che si verifichi E1.
- Indichiamo con P(E1/E2) la probabilità che si verifichi E1, calcolata nell'ipotesi che E2 si sia verificato,
- Questa probabilità prende il nome di probabilità dell'evento E1 condizionata al verificarsi dell'evento E2
- Per calcolare la probabilità condizionata teniamo presente che:
  - poiché supponiamo che l'evento E2 si sia verificato, l'insieme universo U per il calcolo di P(E1/E2) è dato dai risultati favorevoli a E2, cioè U ' B {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8};
  - i casi favorevoli per il calcolo della P(E1/E2) devono essere ricercati solo all'interno del nuovo insieme universo;
  - Essi sono dati dall'intersezione tra i casi favorevoli per E1 (insieme A) e quelli per E2 (insieme B).
  - L'insieme F dei casi favorevoli è quindi {3, 6}.
  - Dunque p(E1/E2) è data dal rapporto tra il numero di elementi di F e il numero di elementi di U:
  - p (E1/E2) = 2/8 =1/4 .
- La probabilità di E1 senza il verificarsi dell'evento E2 è 1/3 , mentre quella di E1 condizionata a E2 è 1/4
- Concludiamo che in questo caso p(E1) è diversa da p(E1/E2).

In questo caso si dice che l'evento E1 è condizionato dall'evento E2 e che E1 ed E2 sono eventi dipendenti

Gli eventi indipendenti

- Consideriamo ora un altro caso con i due eventi:
- E1 «esce un multiplo di 3»; E3 «esce un numero pari».
- Supponiamo che si è verificato l'evento E3 rappresentato dall'insieme C {2, 4, 6, 8, 10, 12} cioè che sia stato estratto un numero pari
- i casi possibili che il numero uscito sia anche multiplo di 3, cioè che si sia verificato anche l'evento E1 condizionato dall'evento E3, sono 6 e quelli favorevoli 2, cioè {6, 12}.
- La probabilità di E1 condizionata a E3 è: $p(E1/E3)=2/6=1/3$.
- A differenza del primo caso, in questo esempio le due probabilità sono uguali, $p(E1) = p(E1/E3)$.
- Due eventi, E1 ed E2, si dicono dipendenti se $p(E1)$ è diversa dalla probabilità condizionata $p(E1/E2)$.
- Gli eventi E1 ed E2 si dicono indipendenti se $p(E1)$ è uguale alla probabilità condizionata $p(E1/E2)$
- Le definizioni si interpretano come segue: due eventi sono indipendenti se il verificarsi di uno non modifica la probabilità che anche l'altro si verifichi.

ESEMPIO:

- Lanciamo contemporaneamente una moneta e un dado, e consideriamo i due eventi «esce testa» ed «esce il numero 2». Fra i due eventi non c'è nessun legame, ognuno si può verificare indipendentemente dall'altro.
- In altri termini, la probabilità che esca testa sulla moneta non influenza la probabilità che esca il numero 2 sul dado. Questi sono eventi indipendenti.

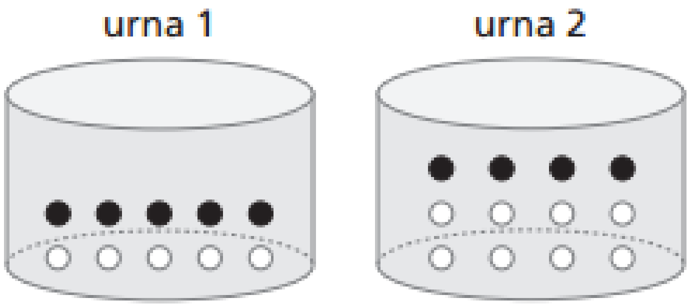
La probabilità degli eventi indipendenti

- Consideriamo un sacchetto che contiene tre gettoni con i numeri 1, 2, 3. Dal sacchetto estraiamo un primo gettone e registriamo il numero uscito, poi lo rimettiamo nel sacchetto ed estraiamo un secondo gettone.
- Ci domandiamo quale sia la probabilità che in due estrazioni successive vengano estratti due numeri dispari?
- I casi possibili si possono ottenere mediante un semplice elenco delle possibili uscite:
  - 1-1 1-2 1-3 2-1 2-2 2-3 3-1 3-2 3-3
  - I casi favorevoli corrispondono alle coppie (1; 1), (1; 3), (3; 1), (3; 3); quindi sono 4.
  - La probabilità così valutata è quindi $P(E)=4/9$
- L'evento composto E «escono due numeri dispari» può anche essere visto come l'evento intersezione dei seguenti due eventi semplici:
  - E1 = «il primo numero è dispari»; E2= «il secondo numero è dispari»
- E1 ed E2 sono indipendenti; infatti, dopo la prima estrazione, il gettone è rimesso nel sacchetto e la situazione iniziale viene ripristinata.
- Poiché i numeri dispari sono 2 e i casi possibili 3, le probabilità di E1 ed E2 sono: $p(E1)=2/3$, $p(E2)$ $2/3$.
- Come si può vedere $p(E)=P(E1)*P(E2)= 2/3*2/3=4/9$
- **Questa è una regola generale:** Se due eventi, E1 ed E2, sono indipendenti, la probabilità del loro evento intersezione è uguale al prodotto delle loro probabilità $p(E1 \cap E2) = p(E1) * p(E2)$.

Esempio

Due urne contengono:

- urna 1: 5 palline bianche e 5 nere;
- urna 2: 8 palline bianche e 4 nere.



Viene estratta una pallina da ogni urna. Qual è la probabilità che siano entrambe nere?
L'evento «vengono estratte due palline nere» è composto dai due eventi semplici:

E_1 = «viene estratta una pallina nera dall'urna 1»;

E_2 = «viene estratta una pallina nera dall'urna 2».

Si ha: $p(E_1) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ e $p(E_2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Gli eventi sono indipendenti; quindi la probabilità dell'evento intersezione è:

$$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \cdot p(E_2) = p_1 \cdot p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

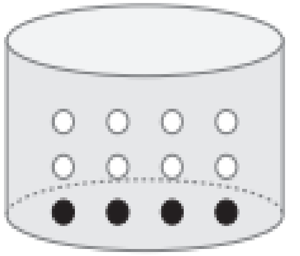
La probabilità per gli eventi dipendenti

Consideriamo un sacchetto con tre gettoni che hanno i numeri 1, 2, 3 e gli eventi E1 «il primo estratto è dispari», E2 «il secondo estratto è dispari», e supponiamo che, dopo la prima estrazione, il gettone non venga rimesso nel sacchetto.

- In questo caso gli eventi sono dipendenti, infatti la probabilità della seconda estrazione dipende dall'evento della prima estrazione che modifica la composizione del sacchetto.
- I due eventi semplici non hanno lo stesso insieme universo: nella prima estrazione U contiene 3 elementi, nella seconda ne contiene solo 2.
- p(E1)=2/3 , perché i numeri dispari sono 2 su 3.
- Calcoliamo la probabilità condizionata p (E2/E1), ossia la probabilità che si abbia E2 supposto che sia avvenuto E1.
  - Se si è verificato E1, significa che è stato estratto un numero dispari;
  - nel sacchetto rimangono due gettoni uno dispari ed uno pari
  - La probabilità di estrarre un altro numero dispari è: p (E2/E1) =1/2.
  - Calcoliamo, ora, la probabilità dell'evento composto E «i numeri estratti sono entrambi dispari».
  - Poiché la prima volta si estrae un gettone fra tre e la seconda uno fra i due rimanenti, i casi possibili sono 6: 1-2   1-3   2-1   2-3   3-1   3-2 .
  - I casi favorevoli sono 2, corrispondenti alle coppie (1; 3) e (3; 1).
  - Quindi: p(E)=2/6=1/3 .
  - Osserviamo che la probabilità di E si ottiene moltiplicando la probabilità di E1, p(E1), per la probabilità di E2 condizionata a E1, p (E2/E1): 2/3*1/2=1/3 .
- Questa è una regola generale: Se due eventi, E1 ed E2, sono dipendenti, la probabilità del loro evento intersezione è uguale al prodotto della probabilità di E1 per la probabilità di E2 condizionata a E1 → $p(E1 \cap E2)=p(E1)*p(E2/E1)$.

Esempio

In un'urna ci sono 8 palline bianche e 4 nere (figura *a* nella pagina seguente). Qual è la probabilità che, estraendo contemporaneamente due palline, esse siano entrambe bianche?
Si può pensare di estrarre prima una pallina e poi, senza rimettere la prima nell'urna, una seconda pallina.

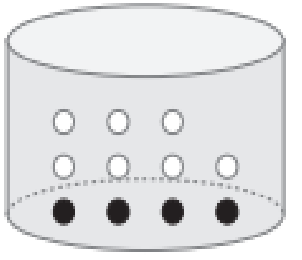


a. Situazione iniziale.

La probabilità che la prima sia bianca è:

$$p_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

La probabilità che la seconda sia bianca, condizionata dal fatto che la prima estratta sia bianca, si ottiene pensando a un'urna che contiene 7 palline bianche e 4 nere (figura *b*):



b. Situazione dopo la prima estrazione.

$$p_2 = \frac{7}{11}.$$

La probabilità che entrambe le palline siano bianche è:

$$p = p_1 \cdot p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{11} = \frac{14}{33}.$$

Riassumendo

L'**evento contrario** $\overline{E}$ di un evento E è l'evento che si verifica nei casi in cui non si verifica E e soltanto in essi. Si ha: $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$.

Due eventi sono **incompatibili** se il verificarsi di uno esclude il verificarsi dell'altro; in caso contrario sono **compatibili**.

La probabilità dell'evento E_1 condizionata all'evento E_2, $p(E_1|E_2)$, è la probabilità di E_1 calcolata nell'ipotesi che E_2 si sia verificato.
E_1 ed E_2 sono eventi **indipendenti** se $p(E_1) = p(E_1|E_2)$; in caso contrario sono **dipendenti**.

Dati due eventi, E_1 ed E_2:

- l'**evento unione** $E_1 \cup E_2$ è quello che si verifica se si verifica almeno uno degli eventi dati;
- l'**evento intersezione** $E_1 \cap E_2$ è quello che si verifica se si verificano entrambi gli eventi dati.

La **probabilità dell'evento unione** di due eventi E_1 ed E_2 è uguale:

- alla somma delle loro probabilità, se E_1 ed E_2 sono incompatibili;
- alla somma delle loro probabilità diminuita della probabilità del loro evento intersezione, se E_1 ed E_2 sono compatibili.

La **probabilità dell'evento intersezione** di due eventi E_1 ed E_2 è uguale:

- al prodotto delle loro probabilità, se E_1 ed E_2 sono indipendenti;
- al prodotto della probabilità di E_1 per la probabilità di E_2 condizionata a E_1, se E_1 ed E_2 sono dipendenti.

Calcolo combinatorio

Abbiamo definito la probabilità come quoziente fra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili.

- Negli esempi illustrati il numero di casi possibili e quello di casi favorevoli può essere facilmente calcolato avendo considerato un numero basso di possibili valori (6 valori possibili per un dado o 2 per una moneta) ed un limitato numero di prove (2 lanci di dadi o di monete, estrazioni di numeri)
- Quando il numero di prove ed il numero di modalità diventa, maggiore il calcolo dei casi possibili e di quelli favorevoli necessità del supporto di uno strumento della matematica molto particolare: Il Calcolo combinatorio.
- Il **calcolo combinatorio** calcola i modi per raggruppare e/o ordinare secondo date regole gli elementi di un insieme finito di oggetti. Il calcolo combinatorio studia quindi i raggruppamenti che si possono ottenere con un dato numero N di oggetti disposti su un dato numero K di posti
- Con Il calcolo combinatorio si riesce a contare in quanti modi è possibile raggruppare gli elementi rispettando ogni volta specifiche regole. Cioè ci permette con semplici calcoli di determinare il numero di possibili **configurazioni** con cui possiamo raggruppare o riordinare gli elementi di un insieme dati il numero di oggetti dell'insieme, la numerosità dei gruppi che voglio formare, se un elemento può essere o meno ripetuto in un gruppo se è importante l'ordine

Più formalmente: dato un insieme S di n oggetti si vogliono contare le configurazioni che possono assumere k oggetti tratti da questo insieme.

- Prima di affrontare il calcolo bisogna precisare due punti importanti:
  - Se l'*ordinamento* è importante, ovvero se due configurazioni sono le stesse a meno di un riordinamento ($\{x,y,z\}$ è uguale a $\{z,x,y\}$?)
  - Se si possono avere più *ripetizioni* di uno stesso oggetto, ovvero se uno stesso oggetto dell'insieme può o meno essere riusato più volte all'interno di una stessa configurazione.

esempi

dato un insieme *S* di *n* oggetti si vogliono contare le configurazioni che possono assumere *k* oggetti tratti da questo insieme.

Prima di affrontare il calcolo bisogna precisare due punti importanti:

Se l'*ordinamento* è importante, ovvero se due configurazioni sono le stesse a meno di un riordinamento ({*x,y,z*} è uguale a {*z,x,y*}?)

Se si possono avere più *ripetizioni* di uno stesso oggetto, ovvero se uno stesso oggetto dell'insieme può o meno essere riusato più volte all'interno di una stessa configurazione

Domandiamoci ad esempio quante sono le possibili classifiche finali del campionato di calcio Italiano (20 squadre)?

Ipotizzando che tutte le squadre siano ugualmente brave quale è la probabilità che una squadra arrivi in champions? (cioè si classifichi tra le prime tre squadre)

Ad esempio, in un problema in cui si chiede di calcolare in quanti modi 7 alunni possono sedersi su 5 sedie, gli n oggetti sono i 7 alunni, il numero k di posti sono le 5 sedie e non c'è ripetizione di oggetti poiché gli alunni sono tutti diversi.

Ancora, in un problema in cui si chiede di calcolare in quanti modi si possono collocare 10 palline di cui 3 bianche, 3 rosse e 4 verdi, in 3 scatole, gli n oggetti sono le 10 palline, il numero k di posti sono le 3 scatole e c'è ripetizione di oggetti poiché di palline ce ne sono 3 bianche, 3 rosse e 4 verdi.

Permutazioni

- Il fattoriale di un numero: si chiama fattoriale di un numero N e si indica con N! il prodotto di tutti i numeri naturali da 1 a N
- Fattoriale di 6: 6!=1*2*3*4*5*6=720
- Fattoriale di 2: 2!=1*2=2
- Fattoriale di 3: 3!=1*2*3
- Fattoriale di (N-K): (N-K)!=1*2*…..(N-K)
- Fattoriale di (8-3): (8-3)!= 5!=1*2*3*4*5

Dato un insieme di N elementi una **permutazione** è un modo di ordinare in successione gli *n* elementi (ad esempio gli anagrammi di una parola sono modi di ordinare le lettere). Le permutazioni sono i raggruppamenti realizzabili quando in numero di oggetti N è uguale al numero di posti K

Primo caso: gli elementi da ordinare siano tutti distinti

- ad esempio nella parola "albero" in cui le lettere sono n=6 e non vi sono lettere ripetute,
- le squadre del campionato di calcio (n=20) che hanno nomi tutti diversi
- In questo caso si parla di permutazioni semplici ed il loro numero si può calcolare come segue

  P(n)= n!

Secondo caso: alcuni degli elementi da ordinare sono ripetuti

- nella parola "matematica" le lettere sono n=10 ma a(3), t (2) ed m(2)sono ripetute,
- I risultati di 10 lanci consecutivi della moneta (T,C) presenterà possibili ripetizioni
- In questo caso si parla di permutazioni con ripetizione ed il loro numero si calcolare come segue

P(n)= $\binom{n}{n_1, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_k!}$ n1, n2, nk sono i numeri corrispondenti agli elementi ripetuti

P(matematica)=10!/(3!*2!*2!)

Disposizioni e Combinazioni

- **DISPOSIZIONI**

  sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è **diverso** dal numero di posti e **conta l'ordine** con cui si dispongono. Le disposizioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

- **COMBINAZIONI**

  sono i raggruppamenti realizzati quando il numero di oggetti è **diverso** dal numero di posti e **non conta l'ordine** con cui si dispongono. Le combinazioni possono essere senza ripetizioni di oggetti o con ripetizione di oggetti.

$n = numero\ di\ oggetti$ $k = numero\ di\ posti$	senza ripetizione di oggetti	con ripetizione r di oggetti
Disposizioni • $n \neq k$ • $conta\ l'ordine$	$D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ $\quad n > k$	$D^r_{n,k} = n^k$
Combinazioni • $n \neq k$ • $non\ conta\ l'ordine$	$C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$ $\quad n > k$	$C^r_{n,k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$

Esempi

Quanti anagrammi anche senza senso si possono formare con la parola LIBRO?	
$n = 5$	gli oggetti sono le 5 lettere della parola LIBRO
$k = 5$	i posti sono le 5 caselle occupate dalle lettere della parola LIBRO
conta l'ordine	per formare un anagramma conta l'ordine con cui le lettere si succedono
senza ripetizione	le 5 lettere sono tutte distinte quindi non c'è ripetizione di oggetti
$P_n = n!$	si applica la formula delle permutazioni senza ripetizioni di oggetti
$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$	ci sono 120 parole che si possono formare con le lettere della parola LIBRO

Quanti anagrammi anche senza senso si possono formare con la parola MAMMA?	
$n = 5$	gli oggetti sono le 5 lettere della parola MAMMA
$k = 5$	i posti sono le 5 caselle occupate dalle lettere della parola MAMMA
conta l'ordine	per formare un anagramma conta l'ordine con cui le lettere si succedono
$r_1 = 3 \ e \ r_2 = 2$	le 5 lettere non sono tutte distinte: M si ripete 3 volte ed A si ripete 2 volte
$P_n^r = \dfrac{n!}{r_1!\, r_2! \dots r_k!}$	si applica la formula delle permutazioni con ripetizioni di oggetti
$P_5^r = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = \dfrac{120}{6 \cdot 2} = 10$	ci sono 10 parole che si possono formare con le lettere della parola MAMMA

Esempi

In quanti modi diversi 5 alunni si possono sedere su 3 sedie numerate?	
$n = 5$	gli oggetti sono i 5 alunni
$k = 3$	i posti sono le 3 sedie
conta l'ordine	le sedie sono numerate, quindi conta l'ordine con cui gli alunni si siedono
senza ripetizione	i 5 alunni sono persone tutte distinte, quindi non c'è ripetizione di oggetti
$D_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	si applica la formula delle disposizioni senza ripetizioni di oggetti
$D_{5,3} = \dfrac{5!}{(5-3)!} = \dfrac{120}{2} = 60$	ci sono 60 modi diversi in cui gli alunni si possono sedere

Utilizzando le cifre 1, 2, 3 quanti numeri di 4 cifre si possono formare?	
$n = 3$	gli oggetti sono le 3 cifre
$k = 4$	i posti sono le 4 cifre
conta l'ordine	le cifre hanno posizioni ben precise, quindi conta l'ordine con cui i numeri 1,2,3 si dispongono
$r = 4$	ciascuna cifra (1,2,3) può ripetersi fino a 4 volte per formare il numero a 4 cifre, quindi c'è ripetizione di oggetti
$D^{r}_{n,k} = n^{k}$	si applica la formula delle disposizioni con ripetizioni di oggetti
$D^{r}_{3,4} = 3^{4} = 81$	si possono formare 81 numeri di 4 cifre usando le cifre 1, 2, 3

Esempi

Un negoziante vuole esporre in una piccola vetrina 4 paia di scarpe scelte tra 10 modelli diversi. In quanti modi si possono esporre le scarpe all'interno della vetrina?	
$n = 10$	gli oggetti sono i 10 modelli di scarpe
$k = 4$	i posti sono le 4 paia di scarpe da esporre
non conta l'ordine	per l'esposizione non conta l'ordine
senza ripetizione	i modelli sono tutti distinti, quindi non c'è ripetizione di oggetti
$C_{n,k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$	si applica la formula delle combinazioni senza ripetizioni di oggetti
$C_{10,4} = \dfrac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \dfrac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$	ci sono 210 modi diversi per esporre in una vetrina 4 paia di scarpe scelte tra 10 modelli diversi

Assegnati due contagocce, il primo contenente 5 gocce di colore bianco ed il secondo 5 gocce di colore nero. Mischiando tra loro 5 gocce scelte tra i due colori, quanti colori diversi si possono formare?	
$n = 2$	gli oggetti sono i 2 colori
$k = 5$	i posti sono le 5 gocce che vanno prese di volta in volta
non conta l'ordine	per la composizione del nuovo colore non conta l'ordine
con ripetizione	per ogni colore si hanno a disposizione 5 gocce
$C^r_{n,k} = \dfrac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$	si applica la formula delle combinazioni con ripetizioni di oggetti
$C^r_{2,5} = \dfrac{(2+5-1)!}{5! \cdot (2-1)!} = \dfrac{6!}{5! \cdot 1!} = 6$	si possono formare solo 6 colori diversi: uno è il bianco (5 gocce bianche), uno è il nero (5 gocce nere) e poi ci sono 4 sfumature di grigio

Tra statistica e probabilità

- Abbiamo definito la probabilità come quoziente fra numero di casi favorevoli e numero di casi possibili.
- La probabilità così definita viene anche detta probabilità «a priori», perché è calcolata senza che vengano eseguite prove concrete.
- Tuttavia ci sono eventi aleatori per i quali non è possibile calcolare la probabilità in questo modo.
- Per esempio, non è possibile calcolare a priori la probabilità che esca 2 in un dado truccato.
- In casi come questi viene in aiuto la cosiddetta legge empirica del caso.
  - In un grande numero di prove, la frequenza relativa di un evento aleatorio è molto vicina alla probabilità dell'evento.
  - La differenza fra i due valori tende a diminuire all'aumentare del numero di prove che si eseguono.
- Accettiamo infatti come probabilità, che chiamiamo probabilità statistica, la frequenza relativa di un evento che si ottiene da un numero abbastanza elevato di prove, tutte ripetute nelle stesse condizioni.
- Il valore della probabilità statistica è un valore a posteriori.
- ESEMPIO Il metodo statistico viene utilizzato nel campo delle assicurazioni per calcolare la probabilità che ha una persona di essere in vita o di morire entro un certo periodo, oppure per calcolare la probabilità di un furto in una certa zona, o di un incidente stradale in una città

La definizione frequentistica

- La stima di una probabilità a priori ha limitazioni nella ricerca sperimentale: per calcolare la probabilità di un evento, è necessario conoscere preventivamente le diverse possibilità di tutti i possibili risultati.
- Pertanto, questo approccio non può essere utilizzato sempre.
- Con la probabilità classica non è assolutamente possibile rispondere a quesiti che per loro natura richiedono un approccio empirico, che possono essere fondati solo su osservazioni sperimentali ripetute, poiché i diversi risultati ottenibili non sono tutti ugualmente possibili, né casuali.
- Per esempio, come rispondere alla precedente domanda: “Con un dado truccato, quale è la probabilità che esca il numero 2 o un altro numero?”
- per sapere come quel dado è truccato e quindi quali siano le effettive probabilità di ogni numero occorre fare esperimenti con lanci ripetuti del dado.
- Stessa cosa per definire la probabilità che una persona di una certa età possa sopravvivere al periodo della sua assicurazione sulla vita. Avrò bisogno di un completo studio delle frequenze di sopravvivenza della popolazione.
- O per definire se un farmaco può essere o meno efficace per una patologia avrò bisogno di procedere ad esperimenti

Frequenza relativa

- Ricordiamo che:

La frequenza relativa *f(E)* di un evento sottoposto a *n* esperimenti, effettuati tutti nelle stesse condizioni, è il rapporto tra il numero *v* delle volte in cui si è verificato l'evento e il numero *n* delle prove effettuate:

$$f(E) = \frac{v}{n}$$

Se consideriamo il lancio di una moneta e l'evento: E="esce testa", la probabilità classica ci dà il valore:

$$p(E) = \frac{1}{2}$$

Se eseguiamo un *numero elevato* di lanci, possiamo notare che il numero di volte che esce testa è quasi uguale al numero di volte in cui si presenta croce. Cioè la *frequenza relativa* dell'evento E si avvicina al valore teorico:

$$p(E) = \frac{1}{2}$$

- Se ***F è la frequenza relativa di un evento in una popolazione, generalmente si può osservare che,*** all'aumentare del numero di osservazioni (**n), la frequenza (*f*) *del campione tende a diventare sempre*** più simile a quella reale o della popolazione (F).

Definizione statistica di probabilità

- Legge empirica del caso

Dato un evento casuale E, sottoposto a *n* prove eseguite tutte nelle stesse condizioni, il valore della frequenza relativa $f(E)=\frac{v}{n}$ <u>tende</u> al valore della probabilità $p(E)$ all'aumentare del numero delle prove effettuate.

DEF: *La probabilità di un evento ripetibile coincide con la frequenza relativa del suo verificarsi quando il numero delle prove effettuate è <u>sufficientemente elevato.</u>*

Riassumendo

Gli eventi sono stati definiti come i possibili risultati di un esperimento.

Ogni evento ha una probabilità

- Se tutti gli eventi fossero ugualmente possibili, la probabilità p(E) di un evento E sarebbe uguale al rapporto tra il numeri f di casi favorevoli e il numero n dei casi possibili, ovvero p(E)=f/n

Esempio:

Si lancia due volte una moneta. Quale e' la probabilità che escano due teste ?

1) I casi possibili sono 4: TT, TC, CT, CC
2) I casi possibili sono 3: escono 2 teste, esce 1 testa, escono 0 teste

Se, in una sequenza di n prove, un evento E si verifica s volte, si dice che il rapporto s/n è la **frequenza relativa** di E rispetto alla data sequenza di prove.

Legge empirica del caso: Effettuando numerose prove, eseguite nelle stesse condizioni, la **frequenza relativa** di un evento è assai prossima alla sua **probabilità**; l'approssimazione è tanto maggiore quanto più numerose sono le prove effettuate

Definizione frequentista della probabilità: La probabilità di un evento è il limite a cui tende la frequenza relativa, al tendere all'infinito del numero di prove effettuate

- E' scomodo trattare direttamente gli eventi e può essere più semplice associare delle quantità numeriche agli eventi.
- Ciò si realizza attraverso la definizione di VARIABILE CASUALE:

Una variabile casuale X è una variabile quantitativa i cui valori variano seguendo le regole della probabilità

Una v.c. è completamente specificata attraverso la sua distribuzione di probabilità

Si ha dunque che per una variabile casuale

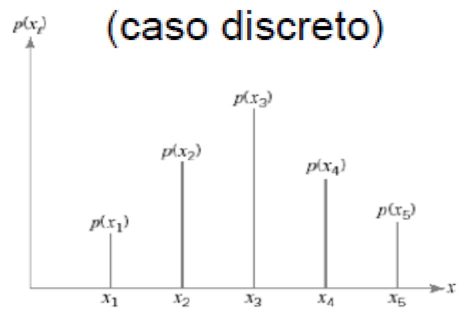
$$f(x)=P(X=x)$$

per tutti i possibili valori *x* che *X* può assumere.

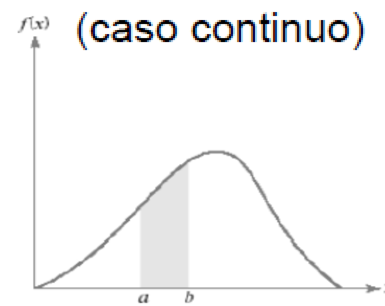
f(x) è detta **funzione di densità di probabilità** (probability density function (**pdf**))

La pdf di una variabile discreta è detta **funzione di massa** (indicata anche con p(x)) ed è rappresentabile attraverso un istogramma o sotto forma tabellare

(caso discreto)



(caso continuo)



esempio

TAVOLA DI MORTALITÀ		
ETÀ	MASCHI	FEMMINE
0	100 000	100 000
5	99 483	99 557
10	99 420	99 511
15	99 338	99 460
20	99 055	99 362
25	99 651	99 242
30	98 232	99 105
35	97 800	98 927
40	97 252	98 649
45	96 484	98 219
50	95 285	97 526
55	93 270	96 397
60	90 070	94 727
65	85 005	92 154
70	77 534	88 181
75	66 138	81 511
80	50 272	70 339
85	32 085	53 051
90	13 811	28 894
95	3903	10 390
100	529	1818

La tabella a lato, basata su un'ipotetica popolazione di 100 000 nati vivi, riporta il numero di coloro che sono vivi alle diverse età.
Dalla tabella si possono calcolare sia le probabilità di morte e di vita.

La probabilità che una persona di 35 anni e di sesso maschile muoia nei successivi 5 anni si ottiene calcolando il rapporto fra il numero dei decessi nei cinque anni (ossia la differenza fra 97 800 e 97 252) e il numero dei vivi a 35 anni:

$$\frac{97\,800 - 97\,252}{97\,800} \simeq 0{,}006.$$

La stessa probabilità calcolata per una persona di 75 anni è più bassa:

$$\frac{66\,138 - 50\,272}{66\,138} \simeq 0{,}24.$$

La probabilità che una persona di 80 anni di sesso femminile sia in vita dopo 5 anni si ottiene calcolando il rapporto fra il numero delle donne vive a 85 anni e quello delle donne vive a 80 anni:

$$\frac{53\,051}{70\,339} \simeq 0{,}75.$$

cenno alle le serie storiche

- In generale, per serie si intende la classificazione di diverse osservazioni di un fenomeno rispetto ad un carattere qualitativo. Se tale carattere è il tempo, la serie viene detta *storica* o *temporale*.
- Il fenomeno osservato, detto *variabile*, può essere osservato in dati istanti di tempo (*variabile di stato*: numero dei dipendenti di un'azienda, quotazione di chiusura di un titolo negoziato in borsa, livello di un tasso di interesse ecc.) o alla fine di periodi di lunghezza definita (*variabili di flusso*: vendite annuali di un'azienda, PIL trimestrale ecc.).
- Indicando con Y il fenomeno, si indica con Y_t un'osservazione al tempo t, potendo t variare da 1 a T, dove T è il numero complessivo degli intervalli o dei periodi temporali considerati.
- In generale una serie storica è così definita $y_t=\{y_1,y_2,y_3,....,y_T\}$;
- la serie storica avrà dimensione T.
- una **serie storica** (o **temporale**) si definisce come un insieme di variabili casuali ordinate rispetto al tempo, ed esprime la dinamica di un certo fenomeno nel tempo.
- Le serie storiche vengono studiate sia per interpretare un fenomeno, individuando componenti di trend, di ciclicità, di stagionalità e/o di accidentalità, sia per prevedere il suo andamento futuro.

I movimenti delle serie storiche

- **Movimento tendenziale** o trend, mostra un andamento crescente, o decrescente o costante con fluttuazione più o meno regolari.
  - un metodo utilizzato per determinare il trend può essere il metodo delle medie mobili. in cui si calcola la media cambiando l'intervallo temporale di riferimento
- **Movimento ciclico** impronta all'evento delle fluttuazioni periodiche o non periodiche attorno alla curva del trend, in momenti di quattro fasi definiti nel ciclo economico (movimenti congiunturali) con durata pluriennale:
  - **prosperità :** aumento maggiore dell'aumento dell'anno precedente
  - **recessione :** aumento minore dell'aumento dell'anno precedente
  - **crisi :** aumento negativo maggiore dell'anno precedente
  - **ripresa :** aumento negativo minore dell'anno precedente
- **Movimento stagionale** con variazioni che avvengono negli stessi mesi in anni successivi.
  - Questi movimenti vengono analizzati con il metodo della media mobile di 12 mesi
- **Movimento casuale** o accidentale, piccole oscillazioni dovute ad eventi casuali
  - scioperi, elezioni, fatti importanti
- **Movimento occasionale**, raro, dovuto a eventi bellici, importanti innovazioni tecnologiche, crisi politiche etc..
  - Se tale movimento si smorza rapidamente e non produce variazioni al trend, quel dato statistico viene escluso e sostituito da un dato "fittizio" ottenuto tramite interpolazione.
  - Se invece il trend rimane cambiato, si spezzano la serie in due parti e si analizzano separatamente le due parti, dette periodi osservazionali.

giochi d'azzardo

- Un gioco d’azzardo è un gioco composto esclusivamente da mosse casuali, perciò la vincita dipende dal caso anziché dalla bravura del giocatore.
- Sono esempi di giochi d’azzardo il gioco dei dadi, la roulette, il baccarat ecc.
- In un gioco d’azzardo in cui, a prescindere dall’intervento della casualità, la somma puntata da ciascun giocatore è proporzionale alla probabilità che questo ha di vincere, si dice equo.

Esempio

- Due giocatori A e B scommettono la stessa somma sul lancio di un dado: A vince se esce il 2, in caso contrario vince B.
- È chiaro che questo gioco non è equo, perché B ha più probabilità di vincite di A.
- Infatti le probabilità di vincita di A e di B sono: $p(A)=1/6$, $p(B)=5/6$.
- Indichiamo con $S(A)$ la somma puntata da A e con $S(B)$ la somma puntata da B.
- Affinché il gioco sia equo deve valere la proporzione:
  - $S(A) : p(A) = S(B) : p(B)$.
- Se il giocatore A punta 1 euro sulla vincita, la somma puntata da B deve soddisfare la proporzione deve essere $S(B)$ 5 euro.
- Perché il gioco sia equo, il giocatore B deve puntare una somma 5 volte maggiore, dato che la sua probabilità di vincita è 5 volte più grande di quella di A.
- In questo modo, secondo la legge empirica del caso, dopo molte partite i due sarebbero circa in parità: uno ha vinto spesso una piccola somma, l’altro ha vinto meno spesso ma ogni volta una somma maggiore.

il lotto

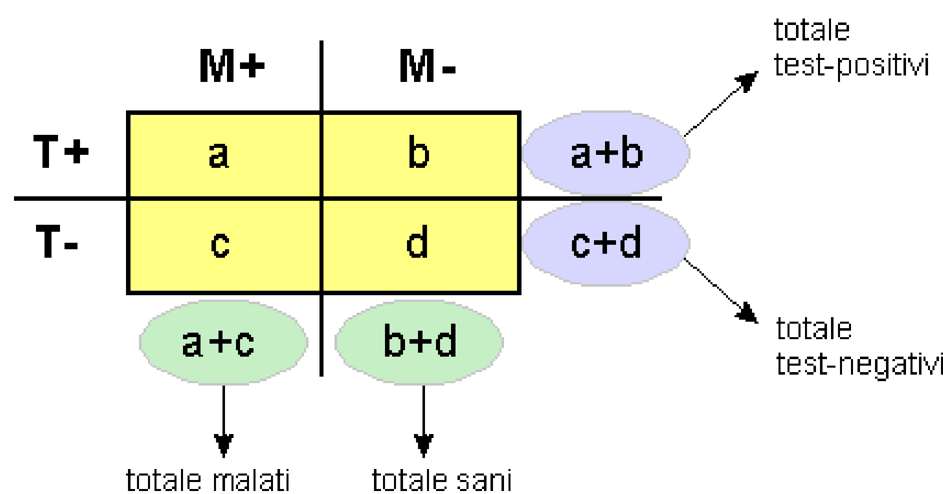
- Nel gioco del lotto vengono estratti cinque numeri tra i primi 90 numeri naturali.
- L'estrazione viene effettuata su dieci ruote identificate con altrettanti nomi di città italiane.
- Per vincere è importante indovinare i numeri e non l'ordine con cui i numeri sono estratti.
- Il gioco può essere effettuato puntando su un numero singolo (ambata o estratto semplice), su due numeri (ambo), su tre (terno), su quattro (quaterna) o su cinque (cinquina).
- Supponiamo di puntare 1 euro sull'uscita del numero 20 sulla ruota di Palermo. Semplificando il ragionamento i casi possibili sono 90 e 5 i favorevoli, per cui la probabilità che il numero 3 compaia fra i 5 estratti è di 5/90, cioè 1/18. Quindi dobbiamo aspettarci di vincere in media 1 volta su 18.
- il lotto però paga al vincitore dell'ambata circa 11 volte la puntata e quindi è chiaro che mediamente ogni 18 giocate da 1 euro spenderemo 18 euro ma ne guadagneremo 11 perdendo costantemente 7 euro ogni 18 giocate. E con le altre combinazioni è anche peggio.........

GIOCATA	VINCITA REALE (€)	VINCITA CON GIOCO EQUO (€)
Ambata	11,23	18
Ambo	250	400,5
Terna	4250	11 748
Quaterna	80 000	511 038
Cinquina	1 000 000	43 949 268

Test diagnostici

- Si chiama test diagnostico un esame effettuato per stabilire se un dato individuo è affetto o no da una certa malattia.
- Il test, come ogni esame, ha un certo margine di errore, può risultare positivo anche se l'individuo è sano, o negativo se l'individuo è malato
- Indichiamo con:
  - M l'evento "l' individuo è affetto dalla malattia"
  - ¬M l'evento "l'individuo non è affetto dalla malattia"
  - T+ l'evento "il test è risultato positivo"
  - T− l'evento "il test è risultato negativo"

- Si definisce specificità del test la probabilità condizionale $P(T-|\neg M)$
- Si definisce sensibilità del test la probabilità condizionale $P(T+|M)$



- Si definisce tasso di incidenza (o prevalenza) di una malattia La probabilità P(M) che un individuo appartenente ad una popolazione sia malato

Specificità e Sensibilità

SPECIFICITA'

- proporzione dei sani che risultano test-negativi
- probabilità che un sano risulti test-negativo

$$Sp = \frac{d}{b+d} \cong p(T- \mid M-)$$

dove

	M+	M-
T+	a	b
T-	c	d

significa: probabilità di essere test-negativo dato il fatto di essere sano

Specificità: proporzione di animali sani che risultano negativi al test

	M+	M-	
T+	a	b	a+b
T-	c	d	c+d
	a+c	b+d	

a+b: totale test-positivi

c+d: totale test-negativi

a+c: totale malati

b+d: totale sani

SENSIBILITA'

- probabilità che un malato risulti test-positivo
- proporzione dei malati che risultano test-positivi

$$Se = \frac{a}{a+c} \cong p(T+ \mid M+)$$

dove

	M+	M-
T+	a	b
T-	c	d

significa: probabilità di essere test-positivo dato il fatto di essere malato

la sensibilità è la proporzione di animali malati che risultano positivi al test.

FORMULA DI BAYES

- La formula deriva dalla definizione di probabilità condizionata.

La probabilità di un evento *A*, noto un evento *B*, risulta:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

In modo analogo, la probabilità di un evento *B* noto un evento *A*:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Pertanto:

$$P(A \cap B) = P(B|A)\, P(A)$$

Sostituendo nella prima uguaglianza, si trova il teorema di Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\, P(A)}{P(B)}.$$

Se sono positivo a un test?

- ESEMPIO HIV: La prevalenza della HIV/AIDS in italia secondo dati del 2005 era di 0,0026 (260 persone ogni 100.000); il test diagnostico dell'HIV ha specificità e sensitività pari a 0,99.
- Per ricavare le probabilità che un individuo positivo al test sia effettivamente malato indichiamo con HIV+ l'evento "essere affetti da HIV" e con HIV- l'evento complementare (essere sani). Indichiamo poi con T+ l'evento "risultato positivo al test", per un individuo generico che si è sottoposto ad un test diagnostico, e con T- l'ottenere esito negativo al test.
- La specificità del test diagnostico è la probabilità condizionata P(T+ |HIV+)=0,99,
- La sensitività è la probabilità P(T- |HIV-)=0,99.
- La prevalenza della malattia è la probabilità che un individuo italiano abbia la malattia, cioè P(HIV+)=0,0026 secondo i dati delle Nazioni Unite. (quindi 0,9974 non sono affetti)
- La probabilità P(HIV+ | T+), si calcola con la formula di Bayes sulla probabilità condizionata

A= essere malati; B=Test Positivo
A/B= essere malati noto che il test è positivo
B/A= risultare positivo al test noto che si è malati

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\,P(B|A)}{P(B)}.$$

$$P(HIV+|T+) = \frac{P(HIV+)P(T+|HIV+)}{P(HIV+)P(T+|HIV+) + P(HIV-)P(T+|HIV-)} =$$

probabilità che il test sia positivo è la somma tra il vero positivo ed il falso positivo

$$\frac{0{,}0026 * 0{,}99}{0{,}0026 * 0{,}99 + 0{,}9974 * 0{,}01} = 0{,}21$$

- la probabilità di essere effettivamente malato per un italiano risulta pari a 0,21, quindi la probabilità di un falso positivo, cioè di non essere malato pur risultando positivo al test, è 0,79.

Positivo a due test indipendenti

- Con un’ulteriore applicazione del teorema di Bayes possiamo calcolare la probabilità di essere effettivamente malati dopo aver ottenuto esito positivo al primo test ed ad un secondo test di tipo diverso (ad esempio con sensibilità e specificità dell0 0,995) esito negativo al secondo oppure così come la probabilità di essere effettivamente malati quando entrambi i test danno esito positivo.

$$P(HIV^+ \mid T_1^+ \cap T_2^-) = \frac{P(HIV^+)P(T_1^+ \cap T_2^- \mid HIV^+)}{P(T_1^+ \cap T_2^-)} = \frac{0{,}0026 * 0{,}99 * 0{,}005}{0{,}009937} = 0{,}0013.$$

$$P(HIV^+ \mid T_1^+ \cap T_2^+) = \frac{P(HIV^+)P(T_1^+ \cap T_2^+ \mid HIV^+)}{P(T_1^+ \cap T_2^+)} = \frac{0{,}0026 * 0{,}99 * 0{,}995}{0{,}002611} = 0{,}9809.$$

Allora prima di allarmarsi e pensarsi affetti da una malattia così grave, sapendo di avere il 79% di probabilità di essere sani si può decidere di ripetere il test diagnostico (magari cambiando laboratorio e/o tipo di test).