Insiemi e relazioni

Differenza fra insiemi e insieme complementare

La **differenza fra due insiemi A** e **B** è l'insieme **C** costituito da tutti gli elementi di **A** che non appartengono a **B**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \setminus \mathbf{B} = \{x \mid x \in \mathbf{A} \text{ e } x \notin \mathbf{B}\}$$

A = {x|x è un alunno interrogato in storia} **B** = {x|x è un alunno interrogato in geografia}

L'insieme formato da tutti gli alunni che appartengono ad **A** ma non a **B** prende il nome di **insieme differenza tra A e B** e si indica con **A – B** o **A\B**

A\B = {x|x è un alunno interrogato in storia **e non** in geografia}

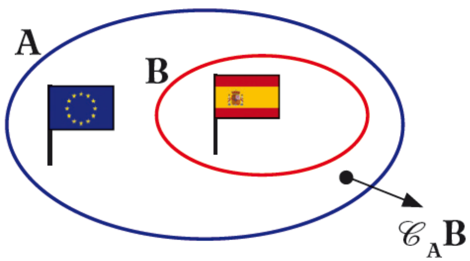
La scrittura ***e non*** che unisce le due caratteristiche è associata all'operazione di differenza.

INSIEME COMPLEMENTARE

Se **B** è un sottoinsieme di **A**, l'insieme differenza **A – B** si dice **complementare di B rispetto ad A** e si scrive $\mathcal{C}_A B$.

A = {x|x è un cittadino europeo}

B = {x|x è un cittadino europeo abitante in Spagna}



L'insieme di tutti i cittadini europei che non abitano in Spagna costituisce l'insieme complementare:

$$\mathcal{C}_A \mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \{x \mid x \text{ è un cittadino europeo che non abita in Spagna}\}$$

Prodotto cartesiano

Il **prodotto cartesiano** di due insiemi **A** e **B** è l'insieme formato da tutte le coppie ordinate (a; b) in cui il primo elemento appartiene al primo insieme **A** e il secondo elemento al secondo insieme **B**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(a; b) \mid a \in \mathbf{A} \text{ e } b \in \mathbf{B}\}$$

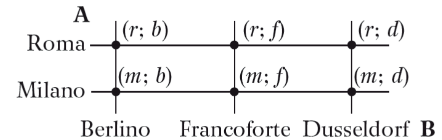
Consideriamo gli insiemi:

A = {r, m} che rappresenta le città Roma e Milano

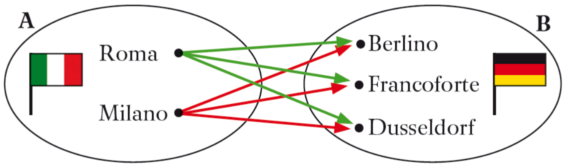
B = {b, f, d} che rappresenta le città Berlino, Francoforte, Dusseldorf

Il prodotto cartesiano di **A × B** è l'insieme **C** che si può rappresentare in quattro modi diversi.

- Per **elencazione**: **C** = {(r; b), (r; f), (r; d), (m; b), (m; f), (m; d)}
- Con un **reticolo** in cui gli elementi di **A** sono rappresentati sulla linea orizzontale e quelli di **B** sulla linea verticale. Ogni coppia è rappresentata dai punti individuati dagli incroci delle linee verticali e orizzontali che partono da ciascuno degli elementi formati dalla coppia.
- Con una **tabella a doppia entrata** in cui si scrivono nella prima colonna gli elementi di **A** e nella prima riga quelli di **B**. Nelle caselle all'incrocio compaiono le coppie ordinate relative alla riga e alla colonna.
- Con una **rappresentazione sagittale** dove, disegnati i diagrammi di Venn dei due insiemi **A** e **B**, si collegano con una freccia gli elementi che formano le varie coppie ordinate.



B / A	Berlino	Francoforte	Dusseldorf
Roma	(r, b)	(r, f)	(r, d)
Milano	(m, b)	(m, f)	(m, d)



Lattes

Insieme delle parti e partizione di un insieme

Consideriamo l'insieme **A** = {■, ▲, ⬢} e formiamo tutti i sottoinsiemi propri e impropri:

∅; {■}; {▲}; {⬢}; {■, ▲}; {■, ⬢}; {▲, ⬢}; {■, ▲, ⬢}

L'insieme costituito da tutti questi sottoinsiemi si chiama **insieme delle parti di A** e si indica con il simbolo $\mathcal{P}_{\mathbf{A}}$ dove $\mathcal{P}$ indica le parti e **A** l'insieme su cui si lavora.

PARTIZIONE DI UN INSIEME

Si dice **partizione di un insieme** la suddivisione dell'insieme in più sottoinsiemi che soddisfano le seguenti condizioni:

- nessun sottoinsieme deve essere vuoto;
- i sottoinsiemi sono a due a due disgiunti;
- l'unione dei vari sottoinsiemi è l'insieme di partenza.

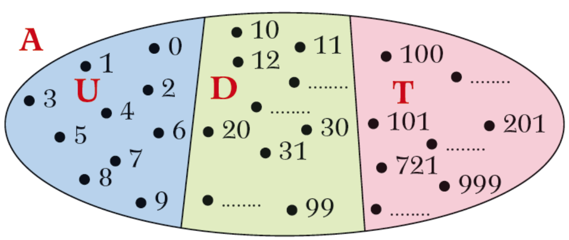
Consideriamo l'insieme **A** = $\{x \mid x \in \mathbf{N}$ e $x < 1\,000\} = \{0, 1, 2, ..., 10, ..., 99, ..., 101, ..., 999\}$

I seguenti insiemi:

U = $\{x \mid x \in \mathbf{A}$ e x ha una cifra$\}$

D = $\{x \mid x \in \mathbf{A}$ e x ha due cifre$\}$

T = $\{x \mid x \in \mathbf{A}$ e x ha tre cifre$\}$



sono sottoinsiemi di **A** che soddisfano le condizioni elencate sopra.

Corrispondenza tra due insiemi

Tra due insiemi **A** e **B** è stabilita una **corrispondenza** quando è fissata una regola che associa elementi di **A** a elementi di **B**.

Consideriamo gli insiemi:

A = {Po, Senna, Tamigi, Danubio}   **B** = {Italia, Francia, Germania, Austria, Spagna}

e la frase "Il fiume … scorre in …"

Mettendo in corrispondenza gli elementi dell'insieme **A** con gli elementi dell'insieme **B** secondo la caratteristica espressa dalla frase, otteniamo:

Il fiume Po scorre in Italia; il fiume Senna scorre in Francia; il fiume Danubio scorre in Germania; il fiume Danubio scorre in Austria.

Indicando con $\mathcal{R}$ la relazione espressa dal verbo *scorre in*, si scrive:

Po $\mathcal{R}$ Italia, Senna $\mathcal{R}$ Francia, Danubio $\mathcal{R}$ Germania, Danubio $\mathcal{R}$ Austria

Abbiamo così formato delle coppie ordinate di elementi corrispondenti che costituiscono un sottoinsieme **C** del prodotto cartesiano **A × B**:

C = {(Po; Italia), (Senna; Francia), (Danubio; Germania), (Danubio; Austria)} ⊂ **A × B**

Possiamo rappresentare la corrispondenza "Il fiume … scorre in …":

- in **forma sagittale**;
- con un **reticolo**;
- con una **tabella a doppia entrata**, dove la freccia indica il verso in cui va letta la tabella e la coppia di elementi corrispondenti è indicata con una crocetta.

Lattes

Corrispondenza univoca

Una **corrispondenza** tra due insiemi **A** e **B** si dice **univoca** se associa a ogni elemento di **A** un solo elemento di **B**.

Indichiamo con:

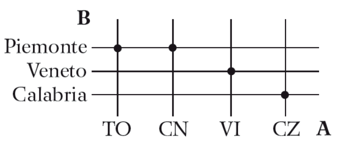
A = {Torino, Cuneo, Vicenza, Catanzaro} l'insieme di quattro città

B = {Piemonte, Veneto, Calabria} l'insieme delle regioni di appartenenza

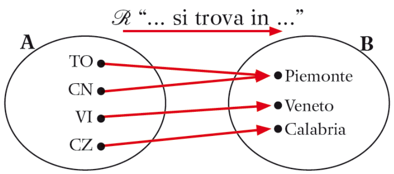
Facciamo corrispondere a ciascuna città dell'insieme **A** la sua regione.

Possiamo rappresentare la corrispondenza $\mathcal{R}$ = "... Si trova in ..." nei seguenti modi:

- con un **reticolo**



- in **forma sagittale**



- con una **tabella a doppia entrata**

$\mathcal{R}$ "... si trova in ..."	Piemonte	Veneto	Calabria
TO	✗		
CN	✗		
VI		✗	
CZ			✗

Dalla rappresentazione sagittale risulta evidente che da ciascun elemento di **A** parte una sola freccia verso gli elementi di **B**. In questo caso diciamo che tra gli insiemi **A** e **B** esiste una **corrispondenza univoca**.

Corrispondenza biunivoca

Una **corrispondenza** tra due insiemi **A** e **B** si dice **biunivoca** se associa a ogni elemento di **A** un solo elemento di **B** e viceversa, a ogni elemento di **B** associa un solo elemento di **A.**

Indichiamo con:

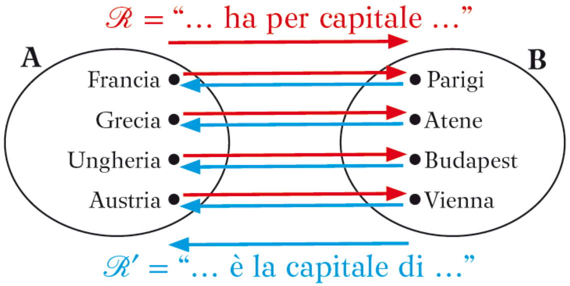
A = {Francia, Grecia, Ungheria, Austria} alcuni Stati europei

B = {Parigi, Atene, Budapest, Vienna} le loro capitali

e con $\mathcal{R}$ la relazione $\mathcal{R}$ = "… ha per capitale …"

Otteniamo una corrispondenza che ha la rappresentazione sagittale evidenziata dalle frecce rosse.

A ogni elemento di **A** corrisponde un solo elemento di **B**.



Invertendo il senso delle frecce otteniamo un'altra corrispondenza, quella da **B** verso **A** espressa dalla relazione:

$\mathcal{R}'$ = "… è la capitale di …".

Anche in questo caso a ogni elemento di **B** corrisponde un solo elemento di **A**: la corrispondenza è univoca nei due sensi o **biunivoca**.

Corrispondenza biunivoca

Se tra due insiemi **A** e **B** possiamo stabilire una corrispondenza biunivoca, essi hanno lo stesso numero di elementi, cioè sono **equipotenti**. In simboli:

A ≡ B che si legge **A** *è equipotente a* **B**

Questo concetto si esprime affermando che i due insiemi hanno la stessa cardinalità.

La **cardinalità** di un insieme **A** si indica con: n (**A**).

Tra l'insieme **A** delle note musicali e l'insieme **B** dei sette nani possiamo costruire una corrispondenza biunivoca perciò:

n (A) = n (B)

Tutti gli insiemi finiti equipotenti hanno una caratteristica comune: la cardinalità che si esprime con un simbolo, detto **numero naturale**.

All'insieme vuoto è associato il numero 0; all'insieme formato da un singolo elemento è associato il numero 1; all'insieme formato da una coppia di elementi è associato il numero 2 e così via. Si costruisce così la **successione dei numeri naturali**.

Relazioni in un insieme

Si dice **relazione** $\mathcal{R}$ in un insieme **A** la relazione che associa a un elemento di **A** un altro elemento di **A** ed è rappresentata da un sottoinsieme del prodotto cartesiano **A × A**.

Costruiamo l'insieme **C** formato dai componenti di una famiglia:

C = {Clelia, Antonio, Luca, Piero, Maria}

La frase "… è figlio di …", che indichiamo con $\mathcal{R}$, mette in relazione i seguenti elementi:

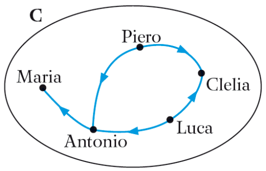
Luca $\mathcal{R}$ Clelia, Piero $\mathcal{R}$ Clelia, Luca $\mathcal{R}$ Antonio, Piero $\mathcal{R}$ Antonio, Antonio $\mathcal{R}$ Maria

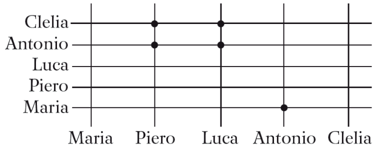
Possiamo formare delle coppie ordinate dove sia il primo sia il secondo elemento appartengono all'insieme **C** ottenendo il sottoinsieme **D** del prodotto cartesiano **C × C**:

D = {(Luca; Clelia), (Piero; Clelia), (Luca; Antonio), (Piero; Antonio), (Antonio; Maria)} $\subset$ **C × C**

Le corrispondenze si riferiscono agli elementi di due insiemi diversi, le relazioni agli elementi dello stesso insieme e possono essere rappresentate con:

- una **rappresentazione sagittale**:
- un **reticolo**
- una **tabella a doppia entrata**





$\mathcal{R}$ "… figlio di …"	Clelia	Antonio	Luca	Piero	Maria
Clelia					
Antonio					✗
Luca	✗	✗			
Piero	✗	✗			
Maria					

Proprietà delle relazioni in un insieme

PROPRIETÀ RIFLESSIVA

Facciamo riferimento all'insieme:

A = {carota, carciofo, cipolla, fagiolo, patata, pomodoro}

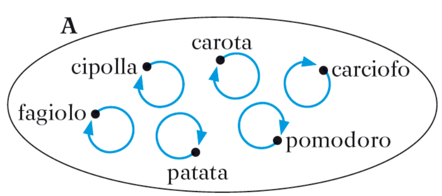
e alla relazione:

$\mathcal{R}$ = "... inizia con la stessa lettera di ..."

Una relazione $\mathcal{R}$ definita in un insieme è **riflessiva** se ogni elemento dell'insieme è in relazione con se stesso:

carota $\mathcal{R}$ carota, carciofo $\mathcal{R}$ carciofo, cipolla $\mathcal{R}$ cipolla, fagiolo $\mathcal{R}$ fagiolo, patata $\mathcal{R}$ patata, pomodoro $\mathcal{R}$ pomodoro

- **Rappresentazione sagittale**
  Da ogni elemento di **A** parte una freccia che ritorna all'elemento stesso; si forma un cappio.



- **Tabella a doppia entrata**
  Nella tabella a doppia entrata le crocette sono disposte tutte sulla diagonale principale e indicano gli elementi in relazione con se stessi.

$\mathcal{R}$ "... inizia con la stessa lettera di ..."	carota	carciofo	cipolla	fagiolo	patata	pomodoro
carota	✗					
carciofo		✗				
cipolla			✗			
fagiolo				✗		
patata					✗	
pomodoro						✗

Proprietà delle relazioni in un insieme

PROPRIETÀ ANTIRIFLESSIVA

Una relazione $\mathcal{R}$ definita in un insieme è **antiriflessiva** se nessun elemento dell'insieme è in relazione con se stesso.

Una proprietà è valida se vale per ogni elemento dell'insieme.

Non tutte le relazioni sono riflessive; per esempio, la relazione:

$\mathcal{R}$ = "... è figlio di ..."

non è riflessiva perché, ovviamente, nessuno è figlio di se stesso.

Proprietà delle relazioni in un insieme

PROPRIETÀ SIMMETRICA

Una relazione $\mathcal{R}$ definita in un insieme è **simmetrica** quando, considerati due elementi *a* e *b* appartenenti all'insieme, se $a\ \mathcal{R}\ b$ allora $b\ \mathcal{R}\ a$.

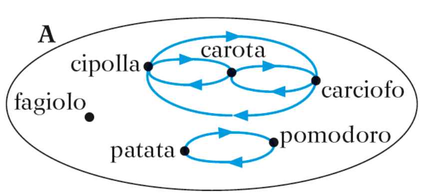
Considieriamo l'insieme:

A = {carota, carciofo, cipolla, fagiolo, patata, pomodoro}

Possiamo applicare la relazione $\mathcal{R}$ = "… inizia con la stessa lettera di ..." e osservare che:

carota $\mathcal{R}$ carciofo, carciofo $\mathcal{R}$ carota, carciofo $\mathcal{R}$ cipolla, cipolla $\mathcal{R}$ carciofo, carota $\mathcal{R}$ cipolla, cipolla $\mathcal{R}$ carota, patata $\mathcal{R}$ pomodoro, pomodoro $\mathcal{R}$ patata

- **Rappresentazione sagittale**
  Se un elemento è in relazione con un secondo, allora anche il secondo è in relazione con il primo: si forma un'asola.



- **Tabella a doppia entrata**
  Nella tabella a doppia entrata le crocette sono disposte simmetricamente rispetto alla diagonale principale.

$\mathcal{R}$ "… inizia con la stessa lettera di …"	carota	carciofo	cipolla	fagiolo	patata	pomodoro
carota		✗	✗			
carciofo	✗		✗			
cipolla	✗	✗				
fagiolo						
patata						✗
pomodoro					✗	

Proprietà delle relazioni in un insieme

PROPRIETÀ ANTISIMMETRICA

Una relazione $\mathcal{R}$ definita in un insieme è **antisimmetrica** quando, considerati due elementi *a* e *b* appartenenti all'insieme, se $a \mathcal{R} b$ accade che $b \mathcal{R} a$ solo se $a = b$.

Dato un insieme di alunni:

D = {Aldo, Carlo, Giulio, Lorenzo}

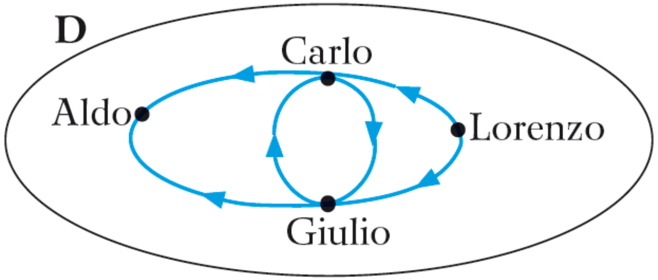
dove Aldo è alto 180 cm, Carlo 170 cm, Giulio 170 cm e Lorenzo 165 cm

Consideriamo la relazione:

$\mathcal{R}$ " … non è più alto di …"

e costruiamo la rappresentazione sagittale.

Solo Carlo e Giulio sono legati da un'asola (proprietà simmetrica) in quanto hanno la stessa altezza; infatti *Carlo non è più alto di Giulio "e" Giulio non è più alto di Carlo.*



Proprietà delle relazioni in un insieme

PROPRIETÀ ASIMMETRICA

Una relazione $\mathcal{R}$ definita in un insieme è **asimmetrica** quando, considerati due elementi a e b appartenenti all'insieme, se $a \mathcal{R} b$ succede che $b \not\mathcal{R} a$.

Dato un'insieme di alunni:

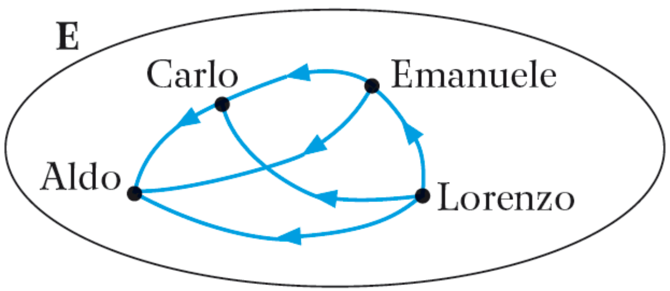
E = {Aldo, Carlo, Emanuele, Lorenzo}

dove Aldo è alto 180 cm, Carlo 170 cm, Emanuele 168 cm e Lorenzo 165 cm consideriamo la relazione:

$\mathcal{R}$ = "… è più piccolo di …"

È evidente che se Aldo $\mathcal{R}$ Carlo deve essere Carlo $\not\mathcal{R}$ Aldo, dove $\not\mathcal{R}$ significa **non è in relazione**.

In questo caso due elementi dell'insieme **E** non possono mai essere legati da un'asola.



Proprietà delle relazioni in un insieme

PROPRIETÀ TRANSITIVA

Una relazione $\mathcal{R}$ definita in un insieme si dice **transitiva** quando, considerati tre elementi *a*, *b*, *c* appartenenti all'insieme, se $a \mathcal{R} b$ e $b \mathcal{R} c$ allora anche $a \mathcal{R} c$.

Considerando l'insieme **A**:

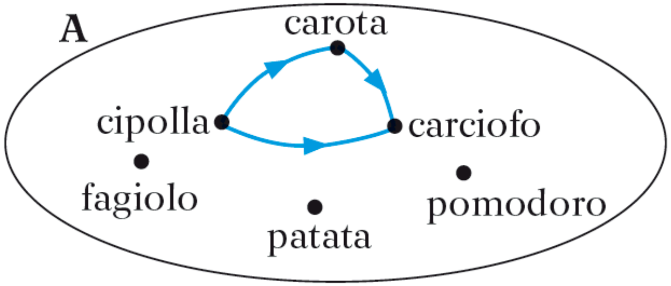
A = {carota, carciofo, cipolla, fagiolo, patata, pomodoro}

e la relazione:

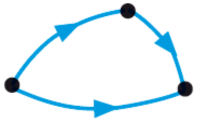
$\mathcal{R}$ = "… inizia con la stessa lettera di …"

possiamo osservare che:

cipolla $\mathcal{R}$ carota, carota $\mathcal{R}$ carciofo, cipolla $\mathcal{R}$ carciofo



Se un elemento è in relazione con un altro e questo è in relazione con un terzo, allora anche il primo e il terzo elemento sono in relazione tra loro e si forma così un triangolo con le frecce così posizionate:



Relazioni di equivalenza

È possibile classificare una relazione in base alle proprietà di cui gode.

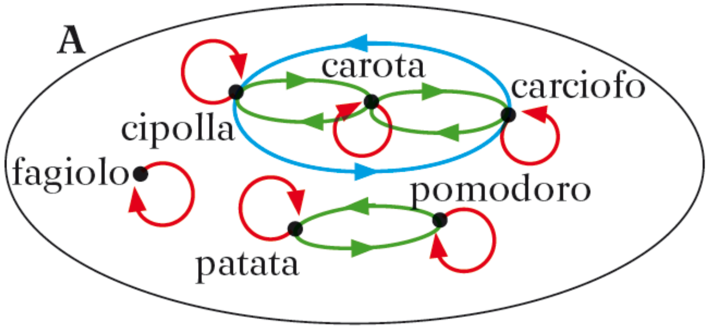
Una relazione che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva si dice **relazione di equivalenza**.

La relazione $\mathcal{R}$ = "... inizia con la stessa lettera di ..." riferita all'insieme:

A = {carota, carciofo, cipolla, fagiolo, patata, pomodoro}

gode delle proprietà **riflessiva**, **simmetrica** e **transitiva** ed è quindi una relazione di equivalenza, come si vede dal grafo.

Gli elementi carota, cipolla e carciofo sono equivalenti fra loro come pure patata e pomodoro.



Le relazioni di equivalenza ci permettono di classificare gli elementi di un insieme.

Relazioni di equivalenza

RELAZIONI DI EQUIVALENZA E PARTIZIONI

Prendiamo in esame l’insieme:

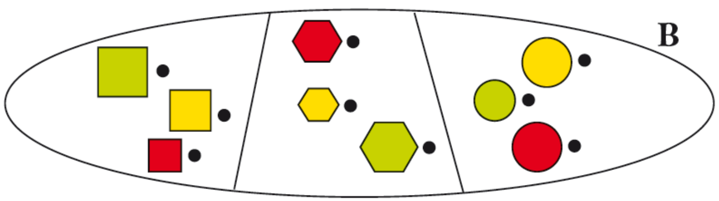
B = 

e consideriamo la relazione:

$\mathcal{R}$ = “ … ha la stessa forma di …”

La relazione $\mathcal{R}$ è una relazione di equivalenza in quanto sono verificate le proprietà:

- **riflessiva**: ogni figura è in relazione con se stessa;
- **simmetrica**: se una figura ha la stessa forma di un’altra, quest’ultima ha la stessa forma della prima;
- **transitiva**: se una figura ha la forma di un’altra, e questa la stessa forma di una terza, la prima e la terza figura hanno la stessa forma.



L’insieme **B** è suddiviso dalla relazione $\mathcal{R}$ in tre sottoinsiemi:

$\mathbf{B}_{\text{quadrato}}$, $\mathbf{B}_{\text{esagono}}$, $\mathbf{B}_{\text{cerchio}}$

che costituiscono una partizione di **B**.

Questi sottoinsiemi sono detti **classi di equivalenza** perché gli elementi della classe sono equivalenti fra loro relativamente alla forma.

Relazioni di ordine

Le relazioni di **ordine** ci permettono di dire se gli elementi di un insieme possono essere confrontati fra loro.

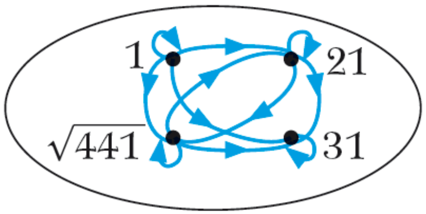
RELAZIONE DI ORDINE LARGO

Una relazione che gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva si dice **relazione d'ordine largo**.

La relazione $\mathcal{R}$ = "... è minore o uguale a ..." applicata all'insieme:

$$\mathbf{B} = \{1, 21, 31, \sqrt{441}\}$$

è una relazione di ordine largo poiché è:



- **riflessiva**: $1 \mathcal{R} 1$; $21 \mathcal{R} 21$; $31 \mathcal{R} 31$; $\sqrt{441} \mathcal{R} \sqrt{441}$
- **transitiva**: se $1 \mathcal{R} 21$ e $21 \mathcal{R} 31$, allora $1 \mathcal{R} 31$
- **antisimmetrica**: $\sqrt{441} \mathcal{R} 21$ e $21 \mathcal{R} \sqrt{441}$ perché $\sqrt{441} = 21$

Una relazione di ordine largo può essere rappresentata dai simboli: ≤ (minore o uguale) e ≥ (maggiore o uguale) e le proprietà possono essere rappresentate così:

$a \leq a$	riflessiva
se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$	transitiva
se $a \leq b$ e $b \leq a$ allora $a = b$	antisimmetrica

Relazioni di ordine

RELAZIONE DI ORDINE STRETTO

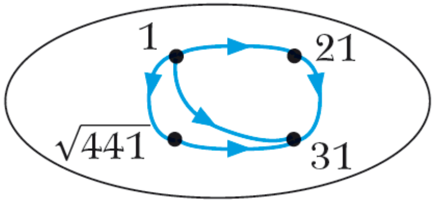
Una relazione che gode delle proprietà antiriflessiva, transitiva e asimmetrica si dice **relazione d'ordine stretto**.

La relazione $\mathcal{R}$ = "... è minore di ..." applicata all'insieme:

$$\mathbf{B} = \{1, 21, 31, \sqrt{441}\}$$

è una relazione di ordine stretto poiché è:

- **antiriflessiva**: $1 \mathcal{R} 1$; $21 \mathcal{R} 21$; $31 \mathcal{R} 31$; $\sqrt{441} \mathcal{R} \sqrt{441}$
- **transitiva**: se $1 \mathcal{R} 21$ e $21 \mathcal{R} 31$ allora $1 \mathcal{R} 31$
- **asimmetrica**: $1 \mathcal{R} 21$ e $21 \mathcal{R} 1$



Una relazione di ordine stretto può essere rappresentata dai simboli < (minore) o > (maggiore) e le proprietà di cui gode possono essere rappresentate così:

$a \nless a$	antiriflessiva
se $a < b < c$ allora $a < c$	transitiva
se $a < b$ allora $b \nless a$	asimmetrica