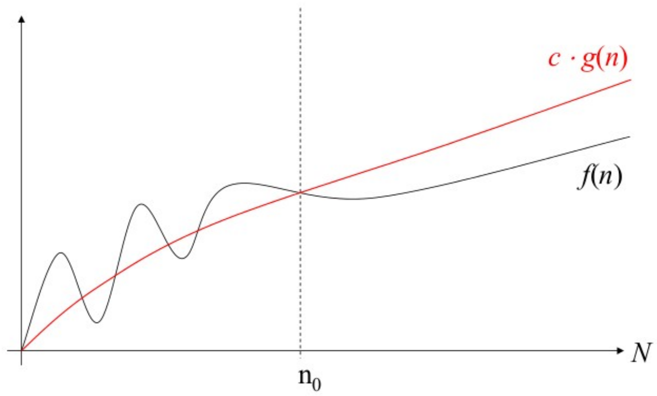
COMPLESSITÀ DEGLI ALGORITMI

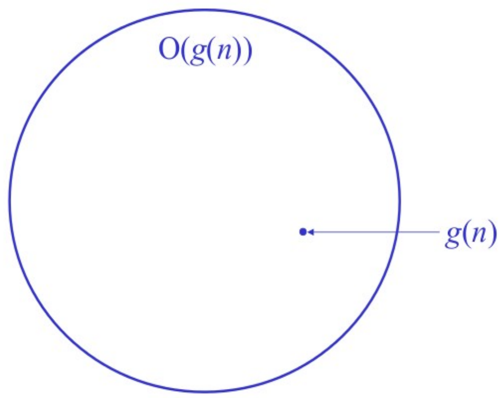
La notazione asintotica fa parte dello studio di funzione; si applicano alle funzioni il cui dominio è l'insieme dei numeri naturali. Il loro scopo è classificare le funzioni in base al loro comportamento per grandi valori di n e forniscono un limite superiore e/o inferiore della funzione (la limitazione avviene per confronto con altre funzioni).

O-Grande

È l'insieme delle funzioni limitate superiormente da g(n).

$f(n) \in O(g(n)) \leftrightarrow$ esistono due costanti positive c ed n_0 tali che per ogni $n>n_0$ si verifica $0 < f(n) < c*f(n)$





$O(g(n)) = \emptyset$ se g(n) è una funzione asintoticamente negativa. Le costanti c e n_0 dipendono dalla particolare f(n). Vale la proprietà riflessiva $g(n) \in O(g(n))$.

Esempi:

dimostriamo che $\frac{1}{2}n^2 - 3n \in O(n^2)$

– dobbiamo trovare c ed n_0 tali che

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$0 \leq \frac{1}{2}n^2 - 3n \leq c \cdot n^2$$

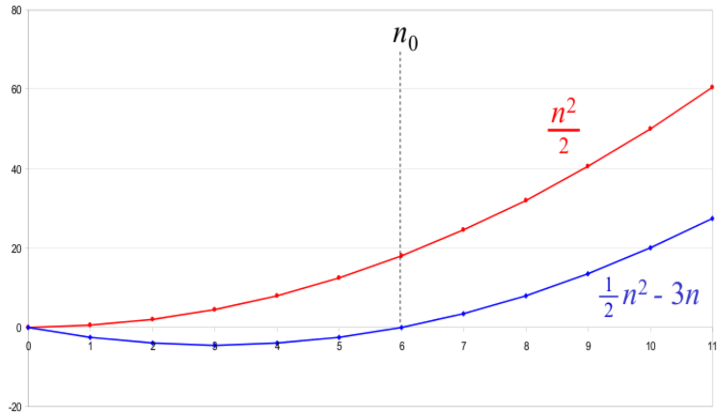
– dividiamo per n^2

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq c$$

– proviamo a fissare c = $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} - \frac{3}{n} \leq \frac{1}{2}$ è soddisfatta per $n \geq 0$

$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{3}{n}$ è soddisfatta per $n \geq 6$



dimostriamo che $n^3 \notin O(n^2)$

– dovremmo trovare c ed n_0 tali che

$$\forall n \geq n_0, \; 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$0 \leq n^3 \leq c \cdot n^2$$

– dividiamo per n^2

$$0 \leq n \leq c$$

– assurdo

- quale che sia c esiste sempre un valore di n per cui $n > c$

dimostriamo, viceversa che $n^2 \in O(n^3)$

– dobbiamo trovare c ed n_0 tali che

$$\forall n \geq n_0, \; 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

$$0 \leq n^2 \leq c \cdot n^3$$

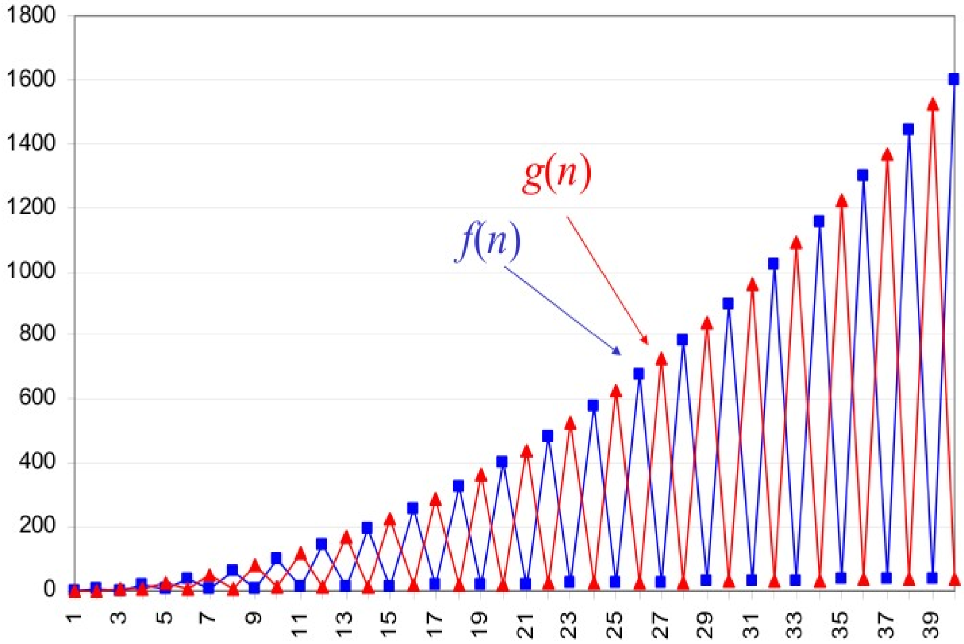
– dividiamo per n^2

$$0 \leq 1 \leq c \cdot n$$

– che è soddisfatta, per esempio, per $c = 1$ ed $n \geq 1$

Non è sempre vero che $f(n) \in O(g(n))$ oppure $g(n) \in O(f(n))$ (funzioni incommensurabili).

due funzioni incommensurabili



Proprietà O(g(n))

Proprietà transitiva: $f(n) \in O(h(n))$ e $h(n) \in O(g(n))$ allora: $f(n) \in O(g(n))$.

Regola dei fattori costanti positivi: $f(n) \in d \cdot h(n)$, $h(n) \in O(g(n))$ e $d > 0$ allora: $f(n) \in O(g(n))$.

Regola della somma: $f(n) = h(n) + k(n)$ con $h(n)$ e $k(n) \in O(g(n))$ allora: $f(n) \in O(g(n))$.

regola della somma

- dimostriamo che:

$$\left.\begin{array}{c} h(n) \in O(g(n)) \\ \wedge \\ k(n) \in O(g(n)) \end{array}\right\} \Rightarrow h(n) + k(n) \in O(g(n))$$

- per ipotesi

$$\exists c' > 0, \exists n'_0 > 0, \text{ t.c. } \forall n \geq n'_0,\ 0 \leq h(n) \leq c' \cdot g(n)$$
$$\exists c'' > 0, \exists n''_0 > 0, \text{ t.c. } \forall n \geq n''_0,\ 0 \leq k(n) \leq c'' \cdot g(n)$$

- sommando le due disequazioni si ottiene

$$0 \leq h(n) + k(n) \leq c' \cdot g(n) + c'' \cdot g(n)$$

- da cui

$$\exists c''' > 0, \exists n'''_0 > 0, \text{ t.c. } \forall n \geq n'''_0,\ 0 \leq h(n) + k(n) \leq c''' \cdot g(n)$$
$$\text{con } c''' = c' + c'' \quad \text{e con} \quad n'''_0 = \max(n'_0, n''_0)$$

proprietà transitiva

- dimostriamo che:

$$\left.\begin{array}{c} f(n) \in O(h(n)) \\ \wedge \\ h(n) \in O(g(n)) \end{array}\right\} \Rightarrow f(n) \in O(g(n))$$

- per ipotesi

$$\exists c' > 0, \exists n'_0 > 0, \text{ t.c. } \forall n \geq n'_0,\ 0 \leq f(n) \leq c' \cdot h(n)$$
$$\exists c'' > 0, \exists n''_0 > 0, \text{ t.c. } \forall n \geq n''_0,\ 0 \leq h(n) \leq c'' \cdot g(n)$$

- componendo le due

$$0 \leq f(n) \leq c' \cdot c'' \cdot g(n)$$

- e dunque

$$\exists c''' > 0, \exists n'''_0 > 0, \text{ t.c. } \forall n \geq n'''_0,\ 0 \leq f(n) \leq c''' \cdot g(n)$$
$$\text{con } c''' = c' \cdot c'' \text{ e con } \quad n'''_0 = \max(n'_0, n''_0)$$

regola dei fattori costanti positivi

- se $d > 0$ è una costante

$$f(n) \in O(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad d \cdot f(n) \in O(g(n))$$

- infatti, per ipotesi si ha:

$$\exists c > 0, \exists n_0 > 0, \text{ t.c. } \forall n \geq n_0,\ 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

- definisco

$$c' = c \cdot d \quad (c' > 0 \text{ dato che } d > 0)$$

- sostituendo $c = c'/d$ ottengo

$$\exists c' > 0, \exists n_0 > 0, \text{ t.c. } \forall n \geq n_0,\ 0 \leq f(n) \leq c'/d \cdot g(n)$$

- finalmente moltiplicando per d

$$\exists c' > 0, \exists n_0 > 0, \text{ t.c. } \forall n \geq n_0,\ 0 \leq d \cdot f(n) \leq c' \cdot g(n)$$

esercizio

- dimostriamo che

$$6n^4 - 3n^3 + 2n^2 + 5n + 6 \in O(n^4)$$

fattori costanti positivi

$$O(n^4) - O(n^3) + O(n^2) + O(n) + O(1)$$

appartenenze note
proprietà transitiva

$$\underbrace{O(n^4) - O(n^3)}_{O(n^4)} + \underbrace{O(n^2)}_{O(n^4)} + \underbrace{O(n)}_{O(n^4)} + \underbrace{O(1)}_{O(n^4)}$$

regola della somma

$$\underbrace{O(n^4) + O(n^4)}_{O(n^4)} + \underbrace{O(n^4) + O(n^4)}_{O(n^4)}$$

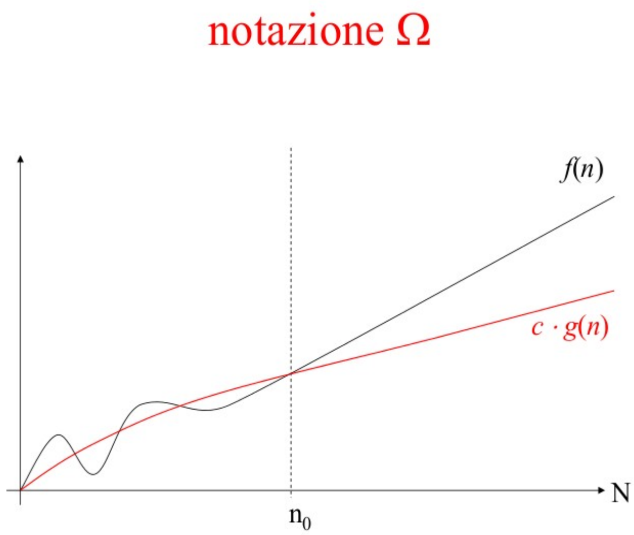
regola della somma

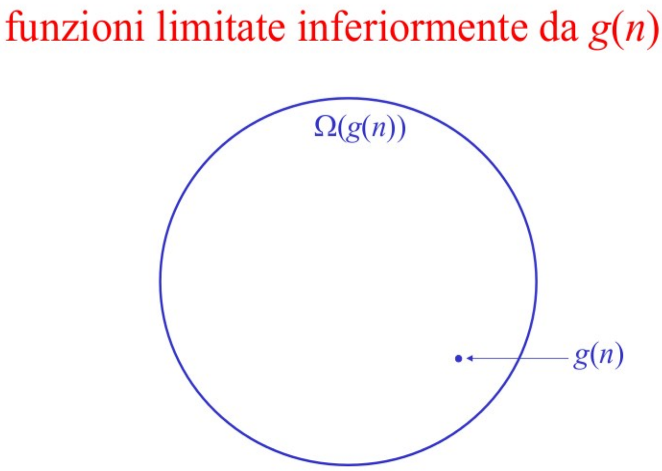
$$\underbrace{O(n^4) + O(n^4)}_{O(n^4)}$$

Ω-grande

È l'insieme delle funzioni limitate inferiormente da $g(n)$.

$f(n) \in \Omega(g(n)) \leftrightarrow$ esistono due costanti positive c ed n_0 tali che per ogni $n>n_0$ si verifica $0 < c*g(n) < f(n)$





La costante c non è necessariamente un intero ed è spesso un numero minore di 1; anche per Ω per esistono funzioni incommensurabili e vale la proprietà riflessiva. Sarebbe stato analogo scrivere $0 < g(n) < c* f(n)$.

Proprietà $\Omega(g(n))$

Proprietà transitiva: $f(n) \in \Omega(h(n))$ e $h(n) \in \Omega(g(n))$ allora: $f(n) \in \Omega(g(n))$.

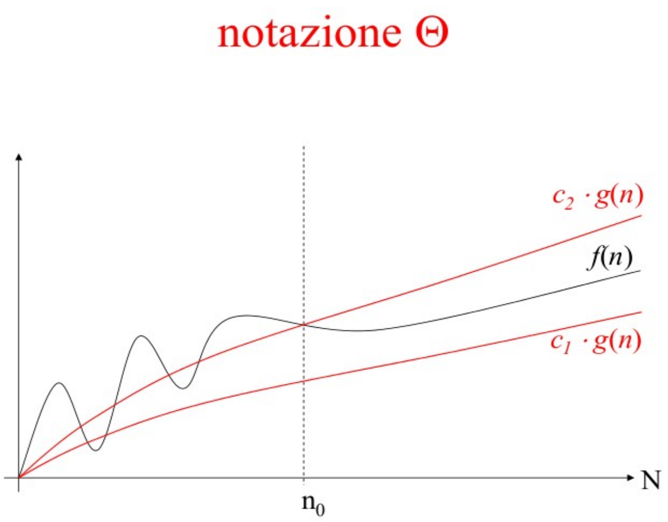
Regola dei fattori costanti positivi: $f(n) \in d \cdot h(n)$, $h(n) \in \Omega(g(n))$ e $d>0$ allora: $f(n) \in \Omega(g(n))$.

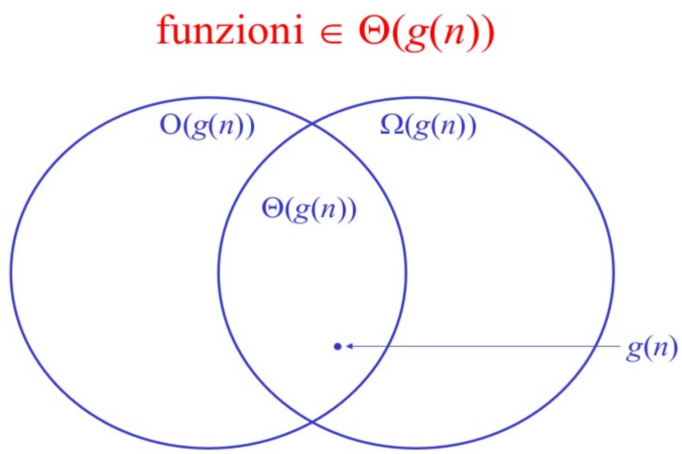
Regola della somma: $f(n) = h(n) + k(n)$ con $h(n)$ e $k(n) \in \Omega(g(n))$ allora: $f(n) \in \Omega(g(n))$.

Θ-grande

È l'insieme delle funzioni limitate sia inferiormente che superiormente da g(n).

$f(n) \in \Theta(g(n)) \leftrightarrow$ esistono tre costanti positive c1, c2 ed n_0 tali che per ogni $n>n_0$ si verifica $0 < c1*g(n) < f(n) < c2*g(n)$





Si ricava :

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(n) \in O(g(n)) \\ \wedge \\ f(n) \in \Omega(g(n)) \end{cases}$$

Vale sempre la proprietà riflessiva $g(n)\in\Theta(g(n))$. Valgono tutte le proprietà precedenti. Si può dimostrare che $f(n)\in\Theta(g(n)) \leftrightarrow g(n)\in\Theta(f(n))$.

Se p1(n) e p2(n) sono polinomi di grado g1 e g2.

- se g1=g2 allora $p1(n)\in\Theta(p2(n))$ e viceversa;
- se g1 < g2 allora $p1(n)\in\Theta(p2(n))$;
- se g1 > g2 allora $p1(n)!\in\Theta(p2(n))$;
- se a > 1 allora $p1(n)\in\Theta(p2())$;
- se a > 1 allora $a^n!\in\Theta(p1(n))$.

Se f(n) è una funzione costante allora $f(n)\in\Theta(1)$. La somma tra un valore (per esempio 3n) e $\Theta(n)$ da come risultato la somma tra il valore e qualsiasi elemento della classe $\Theta(n)$.