Istituto Statale ‘Biagio Pascal’
Istituto Tecnico Tecnologico – Liceo Scientifico
Via Brembio,97- 00188 - Via dei Robilant,2 - 00194 – Roma
Centralino: 06-12112-4205 via Brembio - 06-12112-4225 Via dei Robilant
Codice meccanografico RMTF330002 C.F. 97046890584 Web: www.pascalroma.edu.it
Email: RMTF330002@istruzione.it Pec: RMTF330002@pec.istruzione.it

Liceo Matematico

U.D.

Trasformazioni geometriche

Isometrie: classificazione mediante gli invarianti

Gruppo delle isometrie

Trasformazioni come strumento per dimostrare

Indice

1. Obiettivi, prerequisiti, materiale, esperienze, verifiche

Obiettivi formativi

- Migliorare la capacità di osservazione
- Riuscire a riprodurre alcune figure simmetriche
- Vedere le trasformazioni geometriche come strumento per dimostrare e non come argomento a sé stante

Obiettivi didattici

- Saper riconoscere una trasformazione geometrica con gli invarianti.
- Saper riconoscere le espressioni analitiche delle principali simmetrie.
- Altro tipo di classificazione mediante l'ordine dei vertici.
- Argomentare sulle schede delle trasformazioni come strumento di dimostrazione da 1 a 5.
- Riconoscere struttura di gruppo nelle trasformazioni geometriche

Prerequisiti

- Corrispondenze
- Geometria delle scuole medie
- Teorema di Pitagora
- Gruppo (I anno liceo matematico)

Materiale

- Dispense sulle trasformazioni geometriche
- Materiale per disegnare
- Geogebra

Esperienze

- Costruzione della tabella degli invarianti per le isometrie
- Tabella con un altro tipo di classificazione mediante l'ordine dei vertici
- Tabella della composizione delle isometrie
- Tabella classificazione delle trasformazioni geometriche mediante gli invarianti
- Diagramma di Eulero – Venn sulle trasformazioni geometriche
- Osservazioni sulle schede delle trasformazioni come strumento di dimostrazione da 1 a 5
- Gruppo delle isometrie
- Esempi di descrizioni analitiche di alcune trasformazioni geometriche

Verifiche

- Schede delle trasformazioni come strumento di dimostrazione da 1 a 5

2. Trasformazioni geometriche

Una trasformazione geometrica del piano è una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano

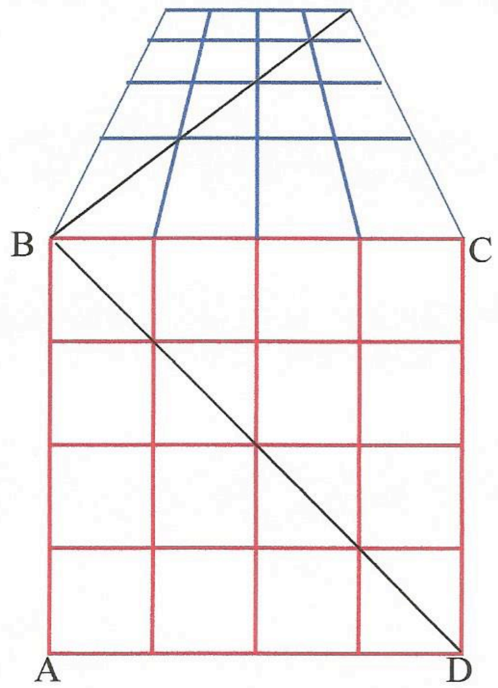
Ogni trasformazione **si caratterizza** per “qualche cosa che rimane invariato”: gli **invarianti.**

Esempio:

Il reticolato ABCD è rappresentato in prospettiva: l’elemento che rimane invariato è **l’allineamento dei punt**i.

I punti che nel reticolato sono in linea retta (come i lati o le diagonali) rimangono in linea retta.

Le trasformazioni che hanno come invariante l’allineamento dei punti si chiamano collineazioni (o proiettività)

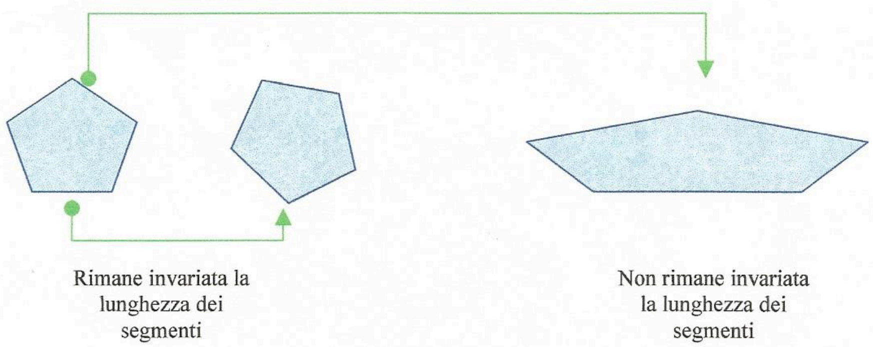


Punto fisso: è un punto che corrisponde sé stesso nella trasformazione considerata.

Elemento unito: è un elemento che viene trasformato in se stesso non punto per punto. Per esempio retta parallela al vettore traslazione.

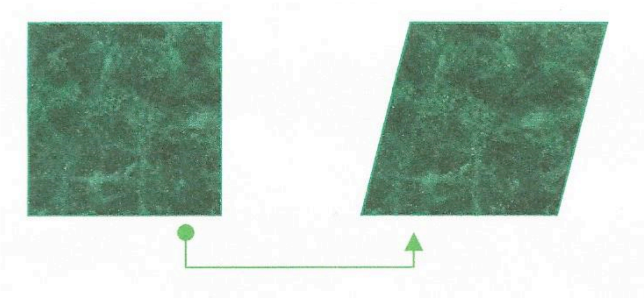
Alcuni invarianti:

Lunghezza dei segmenti:
tutti gli elementi che si possono tracciare rimangono invariati come lunghezza



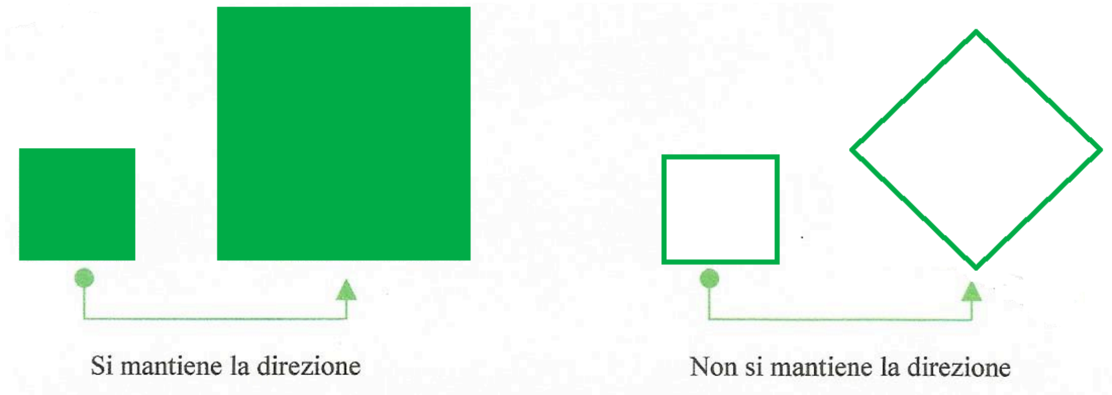
Ampiezza degli angoli: tutti gli angoli rimangono invarianti

Parallelismo: rette parallele vanno in rette parallele

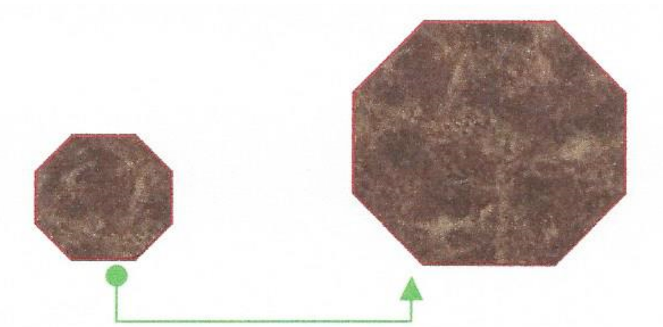


La direzione: Se ruotiamo una figura il parallelismo si mantiene ma le direzioni delle rette mutano.

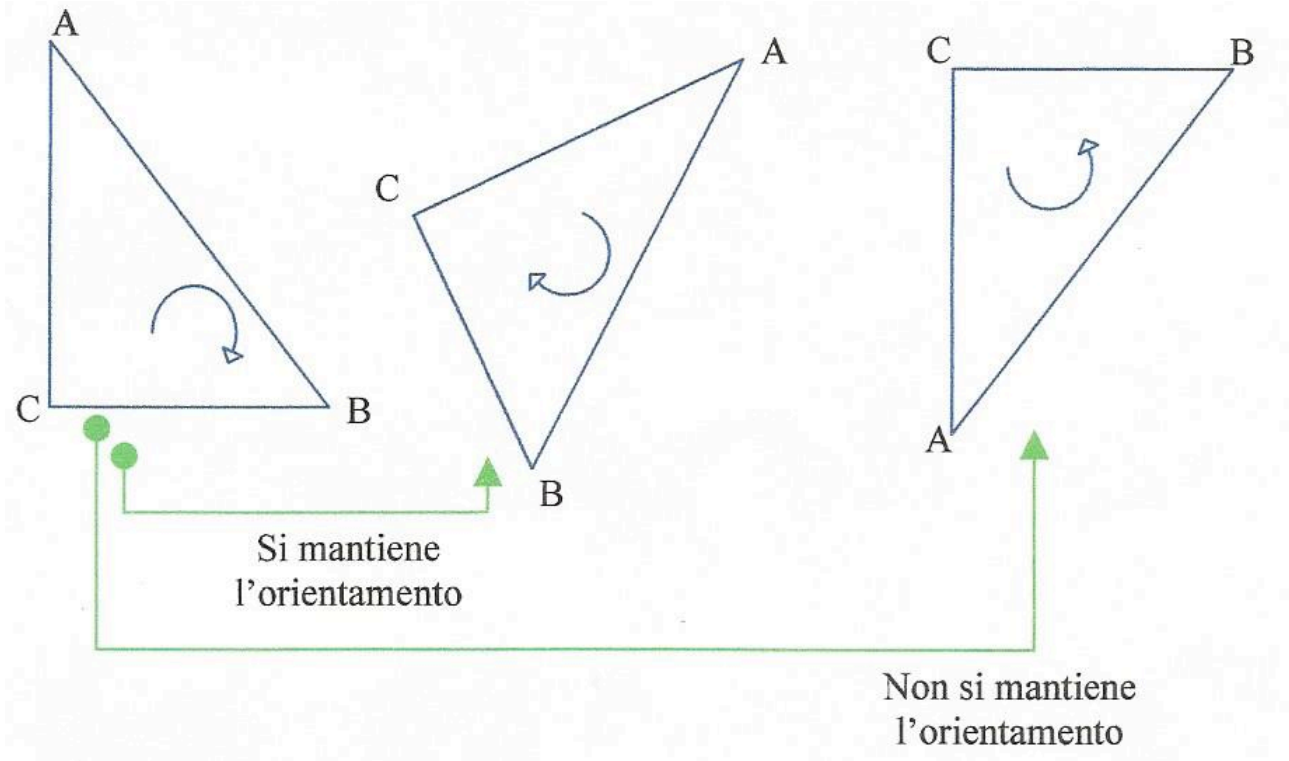
Mantenere invariate le direzioni è una richiesta più forte di quella di mantenere il parallelismo.



Rapporto tra i segmenti: ingrandiamo una figura in modo che se ne mantenga la forma e ogni segmento, per esempio, raddoppi in lunghezza: il rapporto tra ogni segmento della figura trasformata e il corrispondente segmento della figura d'origine è 2.



Orientamento dei punti del piano: è un invariante quando, prendendo tre punti qualunque non allineati, si mantiene il verso di rotazione che essi descrivono (che può essere orario o antiorario);



Una trasformazione è detta involutoria se, applicata due volte, coincide con la trasformazione identica.

Osservazione:

1)

Ingrandimento	**Spostamento rigido**
L'invariante globale è la forma delle figure	*L'invariante globale sono le misure della figura*
Gli invarianti sono almeno: l'ampiezza deglil angoli il parallelismo il rapporto tra i segmenti	Gli invarianti sono almeno: la lunghezza dei segmenti l'ampiezza deglil angoli il parallelismo il rapporto tra i segmenti

2) Se una trasformazione mantiene la direzione
→ ha come invariante anche il parallelismo
(viceversa non è vero vedi le rotazioni)

Se una trasformazione mantiene la lunghezza dei segmenti
→ ha come invariante anche il parallelismo
(viceversa non è vero vedi gli ingrandimenti)

Se una trasformazione mantiene la lunghezza dei segmenti
→ ha come invariante l'ampiezza degli angoli
(viceversa non è vero vedi gli ingrandimenti).

2.1 Trasformazioni isometriche

Si dice isometria una trasformazione che conserva tutte le misure di segmenti (quindi degli angoli).

Traslazione

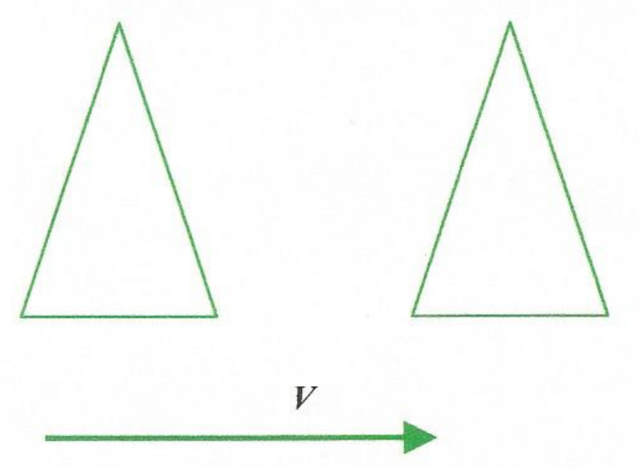
Idea intuitiva: oggetto su una scala mobile.

Definizione: una trasformazione geometrica del piano in sé individuata da un vettore (cioè da una classe di segmenti orientati aventi uguale direzione, verso e lunghezza).

Invarianti: Allineamento dei punti, lunghezza dei segmenti, ampiezza degli angoli, parallelismo, direzione, rapporto tra i segmenti, orientamento dei punti del piano. Quindi forma, area, perimetro.

Elementi uniti e fissi: non ci sono punti fissi (tranne che per la traslazione di vettore nullo cioè l'identità). Ci sono rette unite: quelle parallele al vettore traslazione.

Esempio:

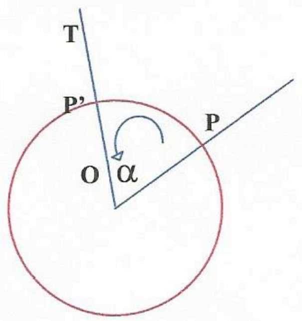


Rotazione

Idea intuitiva: orologio.

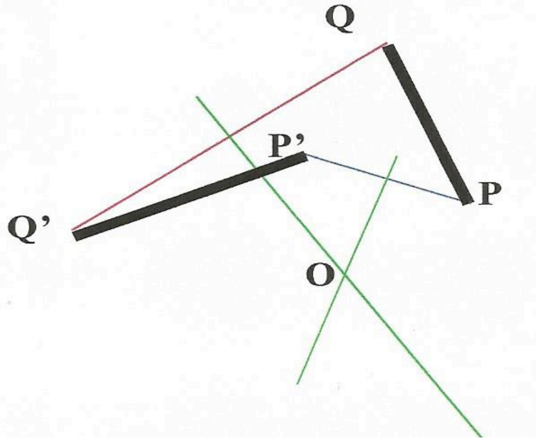
Definizione: una trasformazione geometrica del piano in sé individuata da un centro, dall'ampiezza di un angolo e da un verso.

Dato il centro O, l'angolo α e il verso trovo il trasformato di P con riga, goniometro e compasso:



Si traccia la semiretta con origine in O e passante per P. Per disegnare un angolo α a partire da OP ci vuole un goniometro e troviamo il punto T. uniamo T con O. Ora puntiamo il compasso in O e tracciamo un arco che parte da P fino ad incontrare TO in P' (P' è il punto corrispondente nella rotazione).

Per determinare centro e angolo devo avere due punti trasformati:



Il centro di una rotazione si individua tracciando gli assi dei segmenti aventi per estremi due punti corrispondenti. Il punto di intersezione di tali assi è il centro di rotazione

La rotazione, poiché corrisponde ad un movimento rigido sul piano, è una collineazione che mantiene tutte le misure: è una isometria.

Invarianti: allineamento dei punti, lunghezza dei segmenti, ampiezza degli angoli, parallelismo, rapporto tra i segmenti, orientamento dei punti del piano. Quindi forma area e perimetro.

Elementi uniti e fissi: il centro della rotazione è fisso.

Ogni circonferenza con centro nel centro di rotazione è unita.

Simmetria assiale

E' una isometria

Idea intuitiva: immagine allo specchio oppure ribaltamento.

Definizione: una trasformazione individuata da una asse di simmetria (che è l'asse di tutti i segmenti che uniscono due punti trasformati).

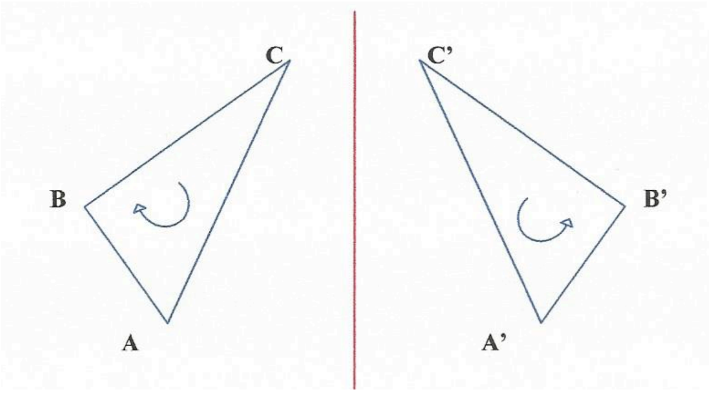
Invarianti: allineamento dei punti, lunghezza dei segmenti, ampiezza degli angoli, parallelismo, rapporto tra i segmenti. Quindi forma, area e perimetro.

Elementi uniti e fissi: l'asse di simmetria è fisso (ogni punto è fisso).

Ogni retta perpendicolare all'asse di simmetria è unita.

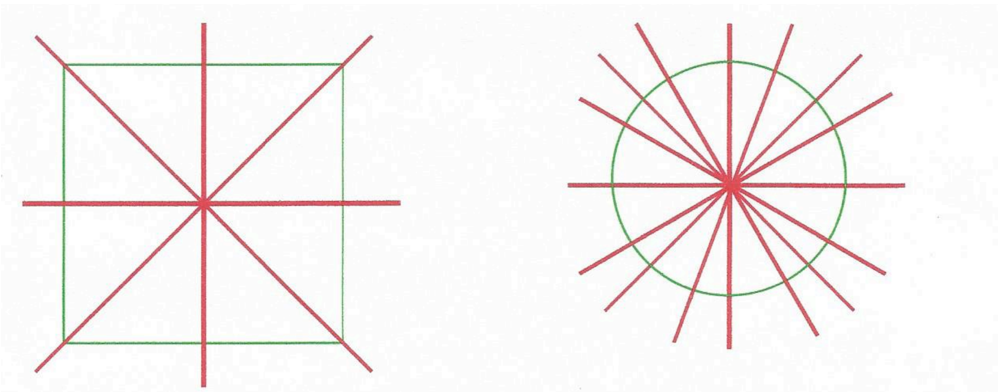
La simmetria assiale non mantiene l'orientamento dei punti del piano

Esempio:



Una isometria si dice <u>invertente</u> quando non si mantiene l'orientamento dei punti del piano.

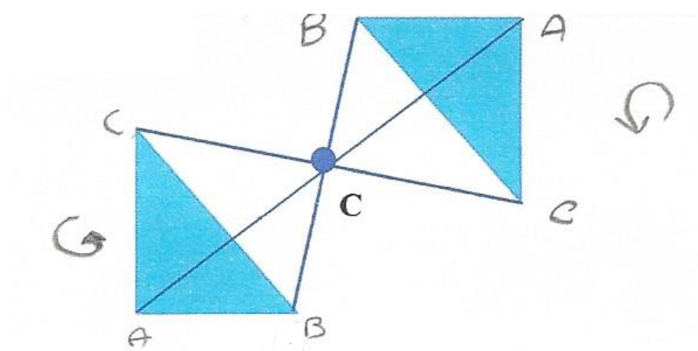
Figure simmetriche: due figure si dicono simmetriche se rimangono unite nella simmetria (rispetto ad una retta o qualunque simmetria).



Simmetria centrale

È una rotazione di +180° o – 180°.

Non ha le stesse caratteristiche della simmetria assiale, infatti non muta l'orientamento dei punti del piano.

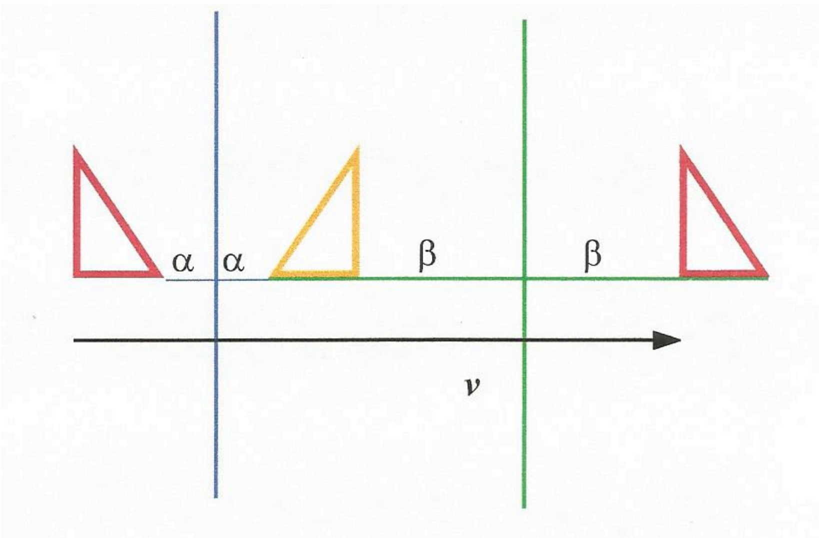


Riassumendo:

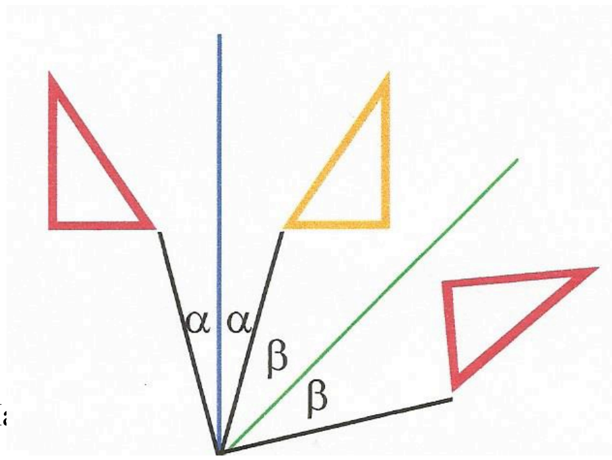
Isometria	Punti uniti	Rette unite
identità	tutti i punti sono uniti	tutte le rette sono unite
simmetria assiale	punti appartenenti all'asse di simmetria	rette perpendicolari all'asse di simmetria
simmetria centrale	centro di simmetria	rette passanti per il centro di simmetria
traslazione	non ha punti uniti (eccetto l'identità)	rette parallele al vettore che la individua
rotazione con centro in O	il centro di rotazione	non ha rette unite

2.2 Composizione di isometrie

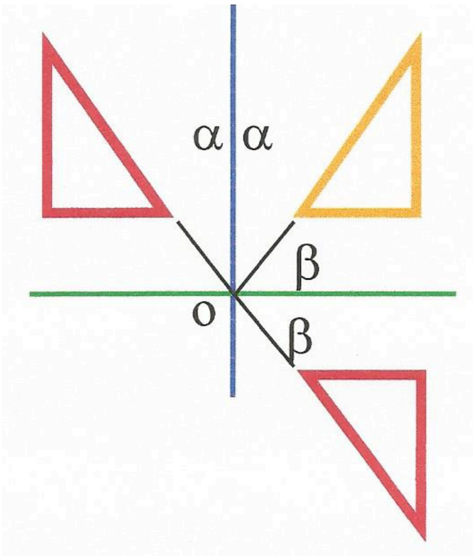
Due simmetrie assiali con assi paralleli composte danno **una traslazione** di vettore perpendicolare agli assi, nel verso dal primo al secondo con lunghezza pari al doppio della distanza tra gli assi.



Due simmetrie assiali con assi incidenti composte danno **una rotazione c**on centro nel punto di incidenza e ampiezza pari al doppio dell'angolo tra il primo asse e il secondo.

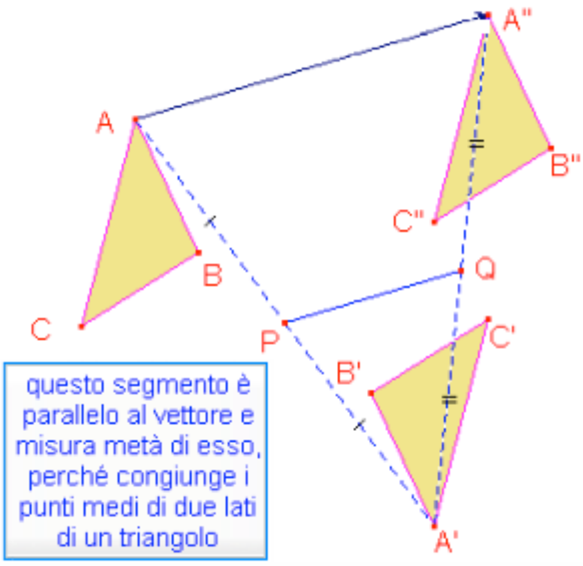


Due simmetrie assiali con assi perpendicolari composte danno **simmetria centrale**



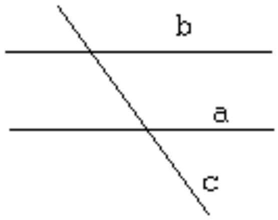
Due simmetrie centrali composte danno una **traslazione**, il cui vettore è parallelo al segmento che congiunge i due centri P e Q, ed ha lunghezza pari al doppio di tale segmento.

Analogamente una **traslazione e una simmetria centrale** danno una **simmetria centrale**



Una traslazione e una rotazione composte danno una rotazione

Infatti la traslazione t può essere il risultato della composizione di due simmetrie assiali con asse parallelo per esempio a*b e r può essere la composizione di due simmetrie assiali con asse incidente per esempio b*c



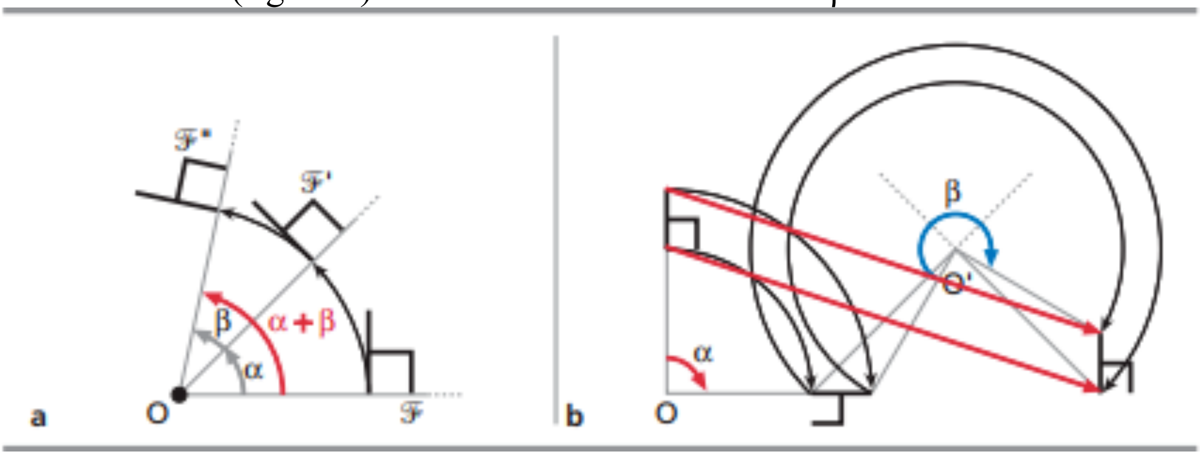
allora $t * r = a * b * b * c = a * i * c = a * c = r_1$ dove r_1 è una rotazione perché a e c sono incidenti

Due rotazioni

La composizione di due rotazioni è una

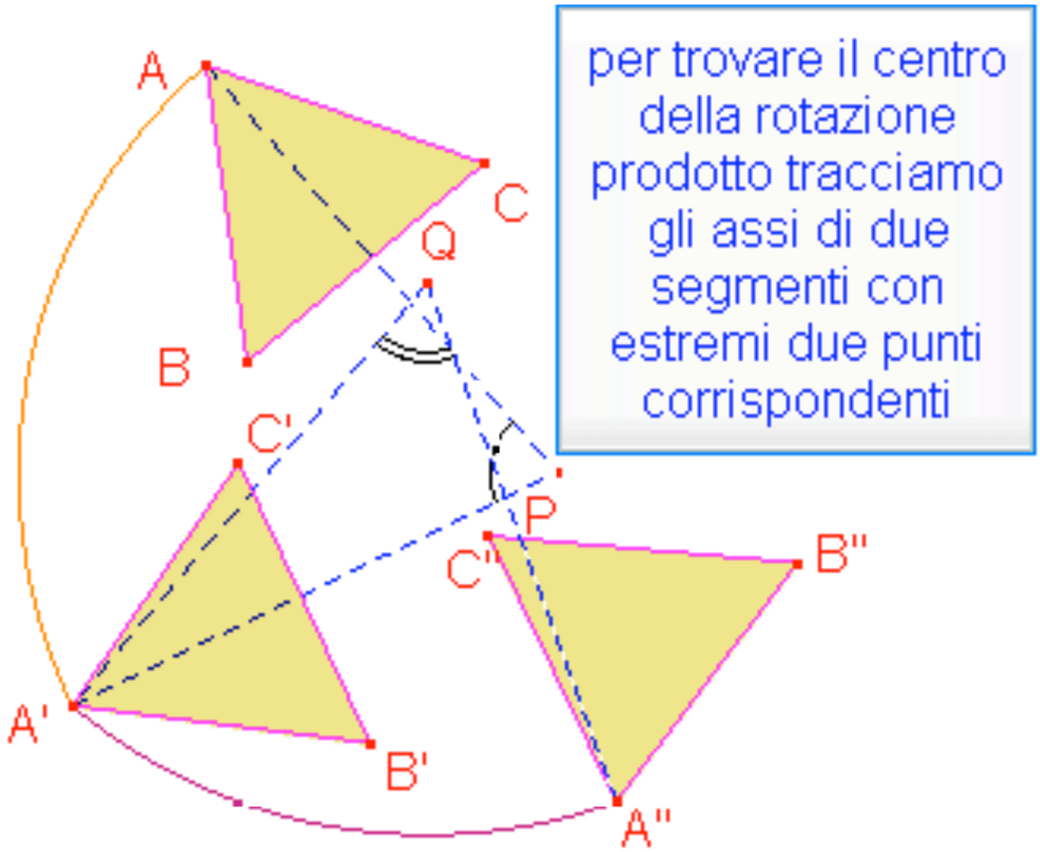
3. Rotazione (figura a) se hanno lo stesso centro

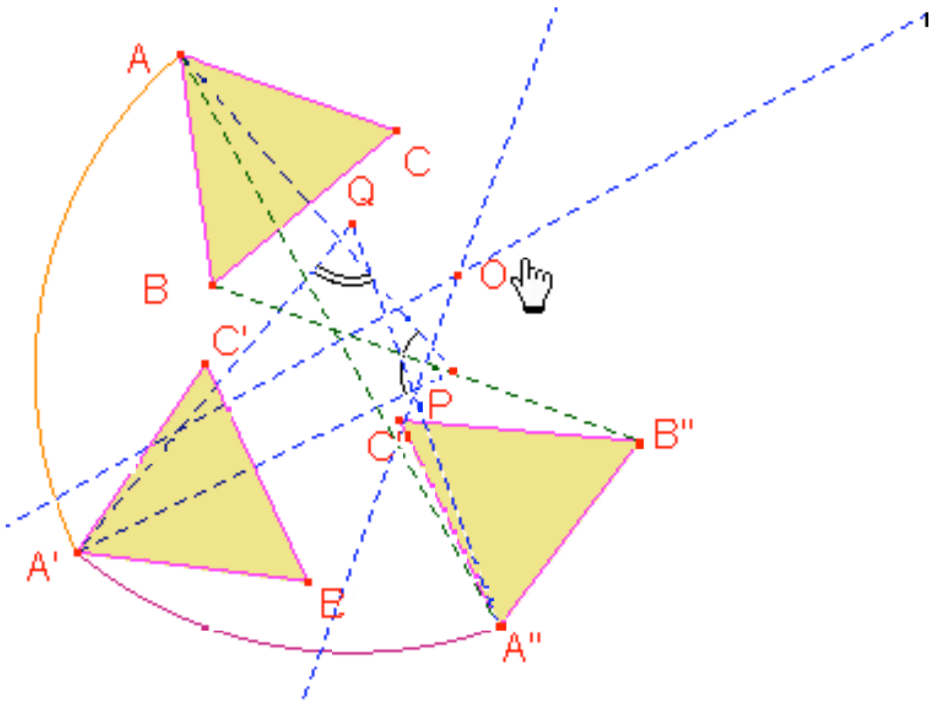
4. Traslazione (figura b) se hanno centro diverso e $\alpha + \beta \equiv 0$

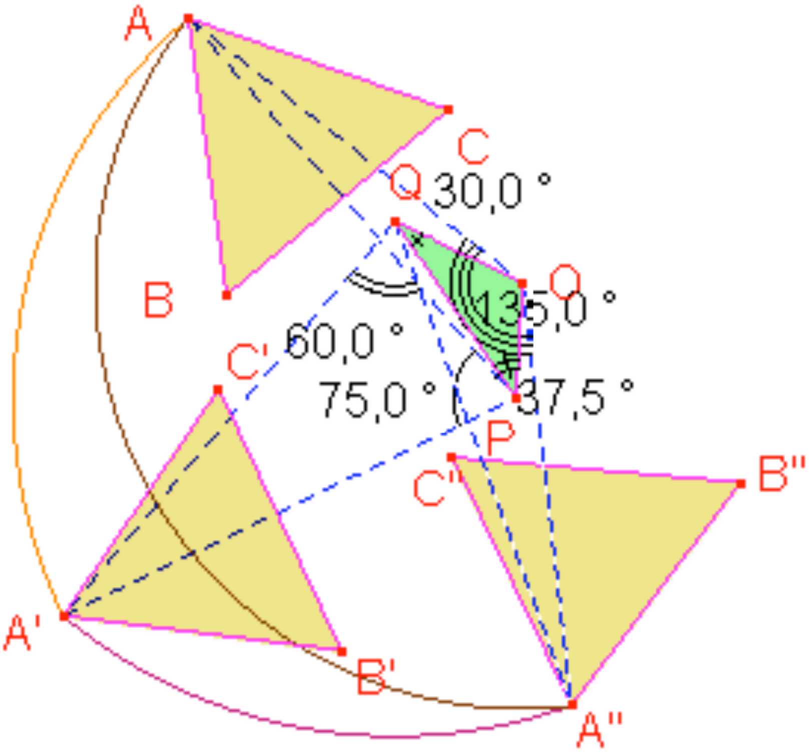


5. Rotazione se hanno centro diverso e $\alpha + \beta \neq 0$.

Infatti siano P e Q i due centri, la rotazione risultante avrà centro in O che sarà il terzo vertice del triangolo i cui altri due vertici sono i centri delle due rotazioni, P e Q, in modo che gli angoli alla base PQ misurano la metà di α e β.


A
C
Q
B
C'
P
C''
B''
A'
B'
A''
per trovare il centro
della rotazione
prodotto tracciamo
gli assi di due
segmenti con
estremi due punti
corrispondenti


A
C
Q
B
O
C'
P
C''
B''
A'
B'
A''
1


A
C
Q
30,0 °
B
O
135,0 °
60,0 °
C'
75,0 °
37,5 °
P
C''
B''
A'
B'
A''

Composizione di tre simmetrie assiali

È una simmetria invertente
È una **simmetria assiale** oppure una **glissosimmetria**

1) Tre assi paralleli → simmetria assiale con asse parallelo agli altri assi

2) Tre assi incidenti → simmetria assiale con asse incidente nel punto di intersezione degli altri assi

3) Tre assi non paralleli e non si intersecano in un punto → rotazione + simmetria assiale

4) Due assi paralleli e uno incidente → traslazione + simmetria assiale

Glissosimmetria

La glissosimmetria è la composizione di una rotazione con una simmetria assiale oppure di una traslazione con una simmetria assiale e viceversa

2.3 Trasformazioni non isometriche

Omotetia

Idea intuitiva: ingrandimento e rimpicciolimento.

Definizione: dato un punto O e un numero K , diremo omotetia di centro O e rapporto di scala K , una trasformazione che:

- lascia fisso O
- trasforma ogni altro punto P in un punto P' allineato con O e P
- la distanza OP' = K OP
- se K > 0 P' dalla stessa parte di P rispetto ad O
- se K< 0 P' è dalla parte opposta di P rispetto ad O.

Una omotetia è completamente individuata dal centro O e dal rapporto OP'/OP.

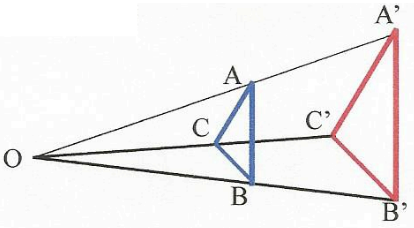
Invarianti: Allineamento dei punti, ampiezza degli angoli, parallelismo, direzioni, rapporto tra i segmenti, orientamento dei punti del piano.

Elementi uniti e fissi: c'è un punto fisso detto centro di proiezione.

Tutte le rette passanti per il centro di proiezione sono unite (scorrono su sé stesse)

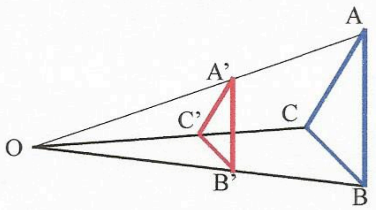
Tra i segmenti corrispondenti di una omotetia c'è lo stesso rapporto A'B'/AB

K > 1 ingrandimento



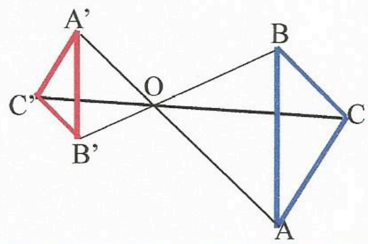
K =1 identità

0<K<1 riduzione

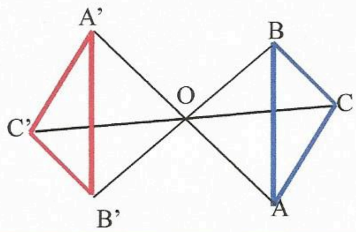


K = 0 implosione (a ogni punto del piano corrisponderebbe perciò un solo punto: il centro della omotetia. Non sarebbe allora una trasformazione geometrica perché non sarebbe una corrispondenza biunivoca del piano in sé).

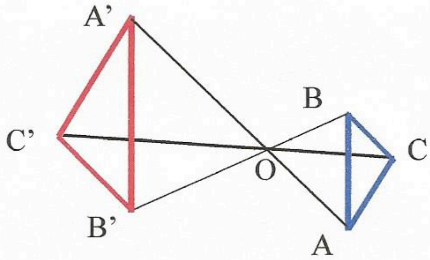
-1<K<0 riduzione



K = -1 simmetria centrale



K<-1 ingrandimento

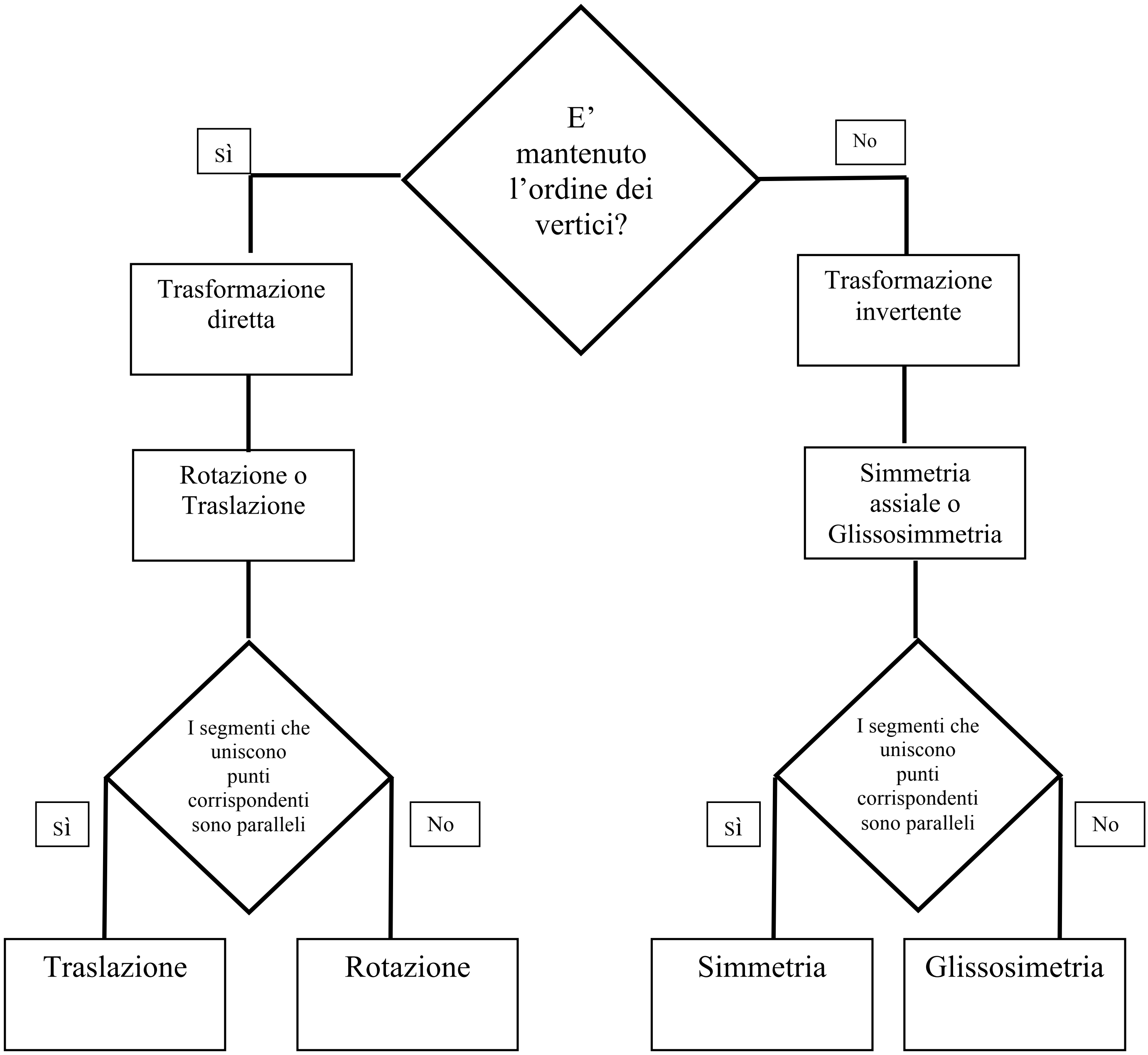


Il rapporto tra le aree è K^2, tra i perimetri $|K|$
Qualunque sia K l'omotetia non modifica l'orientamento dei punti del piano

2.4 Tabella - Classificazioni delle isometrie con gli invarianti

Invarianti / Trasformazioni	Allineamento dei punti	Lunghezza dei segmenti	Ampiezza degli angoli	Parallelismo	Direzione	Verso	Rapporto tra segmenti	Orientamento dei punti del piano	Forma	Area	Perimetro
Traslazioni	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Rotazione	X	X	X	X	NO	NO	X	X	X	X	X
Simmetria Centrale	X	X	X	X	X	NO	X	X	X	X	X
Simmetria assiale	X	X	X	X	NO	NO	X	NO	X	X	X
Omotetia	X	NO se K $\neq \pm 1$	X	X	X	NO se K<0	X	X	X	NO se K $\neq \pm 1$	NO se K $\neq \pm 1$

2.5 Tabella - Classificazione delle isometrie mediante l'ordine dei vertici



2.6 Tabella - Composizione delle isometrie

<table>
<tr><th></th><th>Traslazione</th><th>Simmetria assiale</th><th>Simmetria Centrale</th><th>Rotazione (di angolo β)</th></tr>
<tr><td>Traslazione</td><td>Traslazione (vettore somma)</td><td>Glissosimmetria</td><td>Simmetria centrale</td><td>Rotazione</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Simmetria assiale</td><td rowspan="3">Glissosimmetria</td><td>Rotazione se assi incidenti</td><td rowspan="3">Glissosimmetria
?</td><td rowspan="3">Glissosimmetria</td></tr>
<tr><td>Simmetria centrale se assi perpendicolari</td></tr>
<tr><td>Traslazione se assi paralleli</td></tr>
<tr><td>Simmetria centrale</td><td>Simmetria centrale</td><td>Glissosimmetria?</td><td>Traslazione</td><td>Rotazione?</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Rotazione (di angolo α)</td><td rowspan="2">Rotazione</td><td rowspan="2">Glissosimmetria</td><td rowspan="2">Rotazione?</td><td>Rotazione</td></tr>
<tr><td>Traslazione se hanno centri diversi e
se $\alpha + \beta \equiv 0 \pmod{360°}$</td></tr>
</table>

Interessante:
https://s.deascuola.it/minisiti/lo/lomatgc/LO11_Trasformazioni_geometriche/composizione.html

http://www.liceobenedetti.it/didattica/cabri/trasformazioni/trasformazioni%20geometriche,%20fregi%20e%20rosoni.doc

2.7 Tabella – Diagramma di Eulero – Venn: classificazione delle trasformazioni geometriche mediante gli invarianti

Trasformazione Topologica **Invarianti**
Linea chiusa/aperta
Punto interno/esterno/sul contorno
Ordinamento per successione
Appartenenza
Numero di linee uscenti da un punto

Proiettività **Invarianti**
Invarianti della trasformazione Topologica
Allineamento
Convessità
Birapporto

Affinità **Invarianti**
Invarianti della proiettività
Parallelismo
Punto medio di un segmento
Rapporto tra segmenti paralleli
rapporto tra aree

Similitudine **Invarianti**
Invarianti delle affinità
Rapporto tra i segmenti
Ampiezza degli angoli

Composizione di una omotetia e di una isometria

Isometria **Invarianti**
Invarianti della similitudine
Lunghezza dei segmenti

Omotetia

Identità **Invarianti** tutte le caratteristiche
Isometria diretta **Omotetia per K =1**

Invarianti
Allineamento
Direzione e Verso
Ampiezza degli angoli
Rapporto tra i segmenti

K = rapporto di scala

Traslazione **Invarianti delle isometrie**
Direzione e verso
Isometria diretta

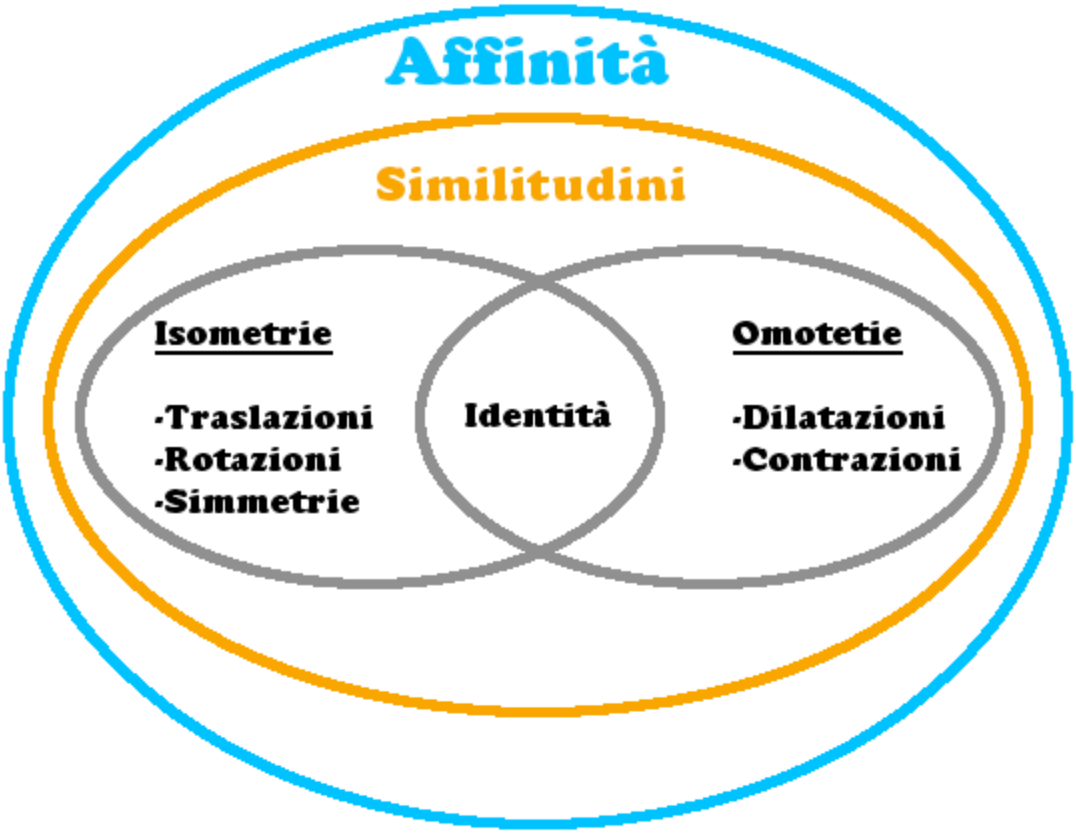
Simmetria assiale **Invarianti delle isometrie**
Isometria inversa

Simmetria centrale **Invarianti delle isometrie**
Direzione
Isometria diretta **Omotetia pe K = -**

Rotazione **Invarianti delle isometrie**
Isometria diretta

-1<K<1 contrazione
| K| >1 dilatazione

Trasformazioni geometriche



3. Gruppo delle isometrie

Richiami sulla definizione di gruppo:

Definizione: un **gruppo** G è un insieme fornito di una operazione * :
per cui valgono le seguenti proprietà:

Associatività: per ogni x; y; z $\in$G
x * (y * z) = (x *y) * z:
Elemento neutro: Esiste un elemento u$\in$G tale che per ogni x $\in$G
x * u = u* x = x
Elemento simmetrico: Per ogni x $\in$G esiste y$\in$G tale che
x*y=y*x= u

Se in aggiunta vale la proprietà
Commutatività: per ogni x; y $\in$G
x * y = y * x:
il gruppo G si dice **commutativo** oppure **abeliano**.

Poiché una trasformazione è una biezione ammette sempre l'inversa f^{-1}
Componendo una trasformazione con la propria inversa si ottiene la trasformazione identica quindi
$f^{-1} \circ f : P \to P \quad \forall P \in \alpha$

L'insieme delle **trasformazioni del piano rispetto alla composizione** delle stesse risulta un **gruppo**:

- La composizione di due trasformazioni è ancora una trasformazione, quindi si tratta di una legge di composizione interna
- La composizione di trasformazioni è associativa
- L'elemento neutro è la trasformazione identica
- Ogni trasformazione ammette la trasformazione inversa che composta con essa dà la trasformazione identica (elemento neutro)

L'insieme delle **isometrie del piano rispetto alla composizione** delle stesse risulta un **gruppo**:
Dimostrazione: la proprietà associativa è vera per definizione, perché una isometria è anche una applicazione biunivoca, e per le applicazioni biunivoche è valida.
L'identità è una isometria. Inoltre, siano f, g due isometrie e siano P, Q due punti.
Posto P' = f(P), Q' = f(Q), P" = g(P'), Q" = g(Q'), si ha P"Q" ≡ P'Q', perché g è un'isometria, P'Q' ≡ PQ, perché f è un'isometria, quindi P"Q" ≡ PQ.
Ma allora anche g°f, che trasforma P in P" e Q in Q", è un'isometria.
Infine, essendo PQ ≡ P'Q', anche f^{-1}, che porta P' in P e Q' in Q, è un'isometria.

4. Descrizione analitica di una trasformazione (cenni)

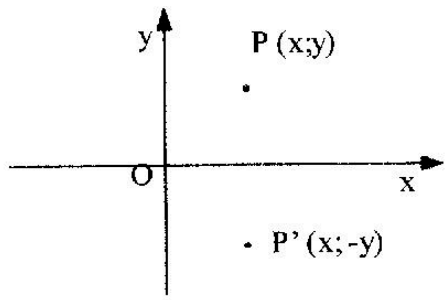
Con l'espressione **descrizione analitica di una trasformazione** si intende che la trasformazione è data attraverso formule che permettono di trovare le coordinate dei punti corrispondenti.

Ogni trasformazione geometrica che considereremo potrà essere descritta da formule che permettono di calcolare, per un qualunque punto del piano le coordinate del nuovo punto (x';y') in funzione di quelle del "vecchio" punto (x;y)

Alcuni esempi:

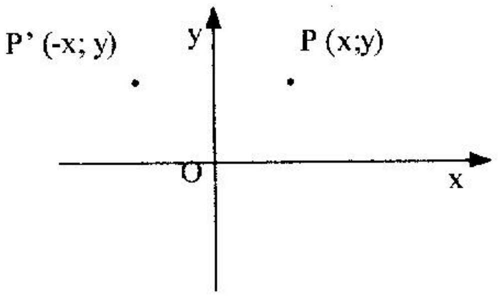
1. Simmetria rispetto all'asse x

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$



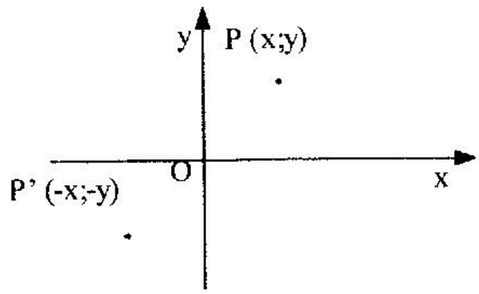
2. Simmetria rispetto all'asse y

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$



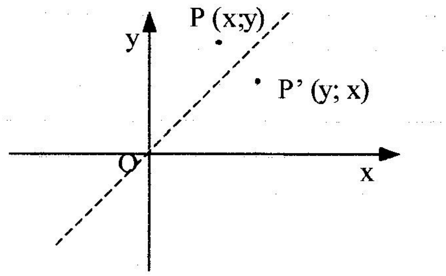
3. Simmetria rispetto all'origine

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$



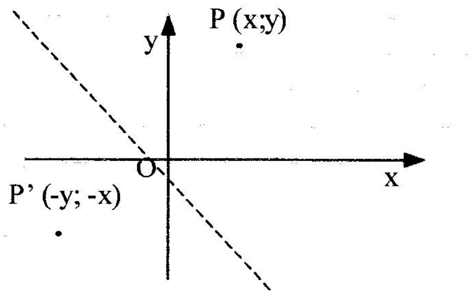
4. Simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante

$$\begin{cases} \mathbf{x' = y} \\ \mathbf{y' = x} \end{cases}$$



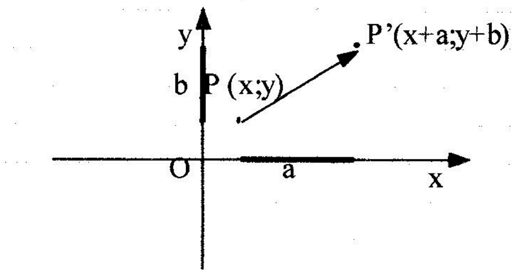
5. Simmetria rispetto alla bisettrice del II e IV quadrante

$$\begin{cases} \mathbf{x' = -\,y} \\ \mathbf{y' = -\,x} \end{cases}$$



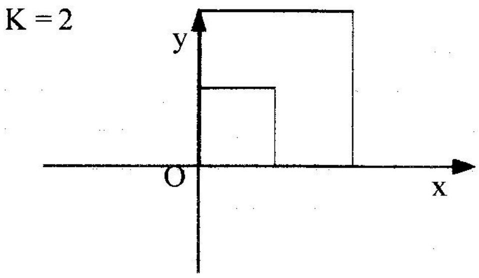
6. Traslazione di vettore *v* (a,b)

$$\begin{cases} \mathbf{x' = x + a} \\ \mathbf{y' = y + b} \end{cases}$$



7. Omotetia di centro l'origine e rapporto K

$$\begin{cases} \mathbf{x' = K\,x} \\ \mathbf{y' = K\,y} \end{cases}$$



5. Schede di lavoro

Alunno: ______________________________ classe:_____________

SCHEDA n° 1 – Trasformazioni come strumento per dimostrare

Il problema di Erone risolto con la simmetria assiale

"P e Q sono due località situate dalla stessa parte rispetto al fiume f. Un uomo a cavallo si trova nella località P e vuole raggiungere la località Q; prima però deve abbeverare il cavallo al fiume.
Qual è il minimo cammino che può percorrere?"

Spiega il tuo ragionamento:

Alunno: ______________________________ classe:_____________

SCHEDA n° 2 – Trasformazioni come strumento per dimostrare

Fra i triangoli aventi una certa base AB e altezza **assegnata** qual è quello con minore perimetro?

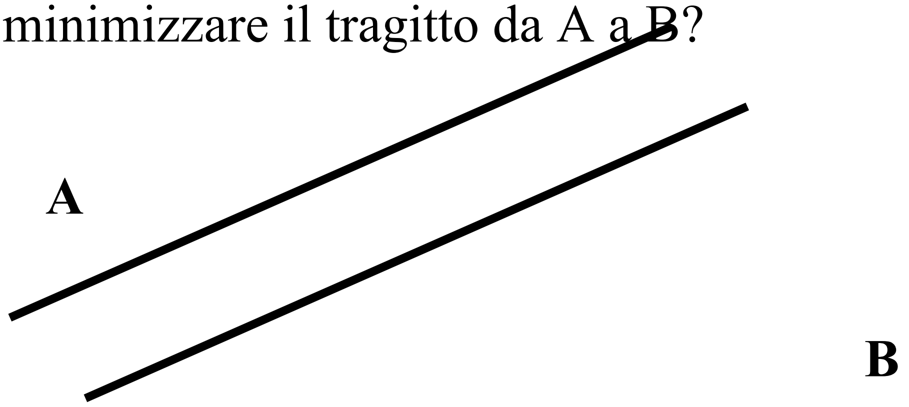
Spiega il tuo ragionamento:

Alunno: ______________________________ classe:_____________

SCHEDA n° 3 – Trasformazioni come strumento per dimostrare

Il problema dei ponti

Il bordo di un fiume è costituito da due rette parallele di larghezza d. Da parti opposte fissiamo due punti A e B. Dove dobbiamo costruire un ponte perpendicolare alla riva in modo da minimizzare il tragitto da A a B?

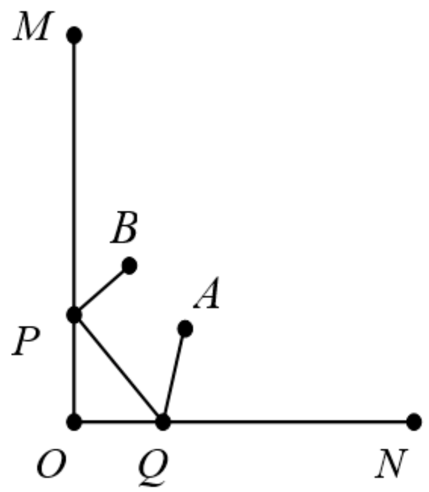


Spiega il tuo ragionamento:

Alunno: ______________________________ classe:_____________

SCHEDA n° 4 – Trasformazioni come strumento per dimostrare

Il punto *A* in figura dista 30 cm dal segmento *ON* e 40 cm dal segmento *OM*, mentre il punto *B* dista 50 cm dal segmento *ON* e 20 cm dal segmento *OM*. Calcolare la lunghezza del percorso minimo *BPQA* espressa in cm. (Coppa D'Ignazio 2014)



Spiega il tuo ragionamento:

Alunno: ____________________________ classe:_____________

SCHEDA n° 5 – Trasformazioni come strumento per dimostrare

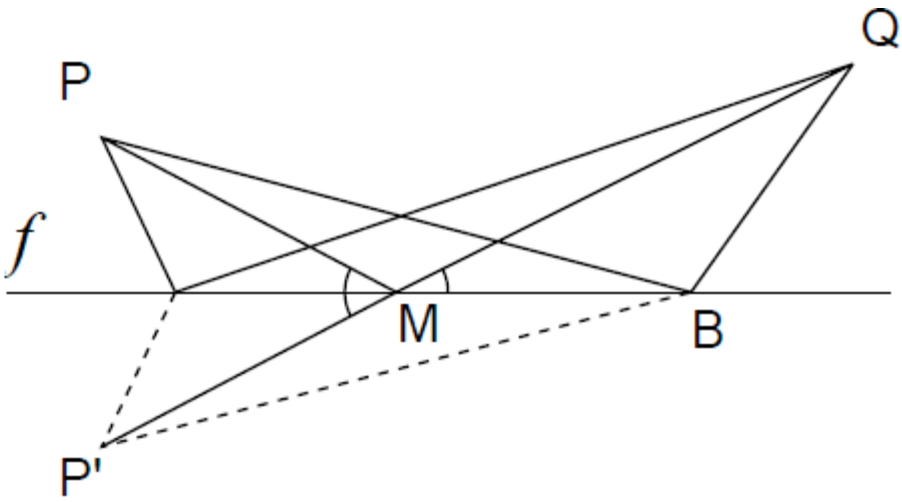
Verificare che:

- La composizione di due simmetrie centrali è una traslazione;
- La composizione di una simmetria centrale e una traslazione è ancora una simmetria centrale.
- In generale, componendo un numero pari di simmetrie centrali otteniamo una traslazione, mentre componendo un numero dispari di simmetrie centrali otteniamo una simmetria centrale.

5.5 Riflessioni sulle schede da 1 a 5

Scheda n 1 – problema di Erone

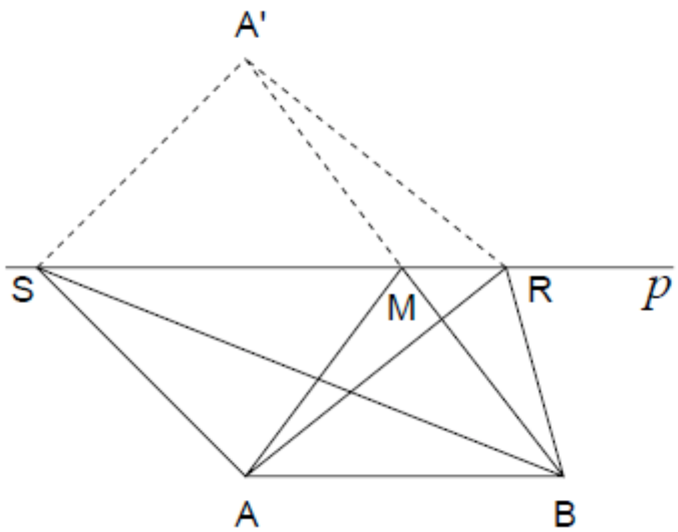
Possiamo spezzare il cammino in due tratti rettilinei: da P al fiume e dal fiume a Q. Se P’ è il simmetrico di P rispetto a f, ogni tratto da P al fiume sarà lungo come il simmetrico. Allora il problema si riduce al seguente: *trovare la strada più breve tra P' e Q, cioè tracciare il segmento PQ e segnare il punto M in cui incontra f: di lì passa il cammino più breve da P a Q*.



Infatti per la disuguaglianza triangolare P’Q sarà minore di P’B + BQ qualunque sia B preso su *f*

Scheda n 2 – Perimetro minimo

Fra i triangoli aventi una certa base AB e altezza **assegnata** qual è quello con minore perimetro?

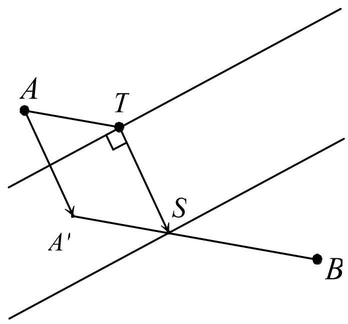


I vertici dei triangoli in questione stanno tutti su due parallele alla base AB, distanti da essa come l’altezza fissata per i triangoli. Le considerazioni che faremo su una parallela si possono ripetere per l’altra. Sia dunque p una delle due rette parallele ad AB e sia A' il simmetrico di A rispetto a p.

Fissato un punto qualunque S su p, costruiamo il triangolo ASB e consideriamo la somma AS+SB di due suoi lati; tale somma è uguale alla somma A'S+SB per l'uguaglianza dei due segmenti AS e A'S, simmetrici rispetto alla retta p. Al variare di S sulla retta p ci sarà un punto per cui questa somma diventa minima? Sì, nel punto M in cui la retta A'B taglia la retta p. Tale punto è il vertice del ***triangolo isoscele*** avente per base AB e l'altezza assegnata e il triangolo AMB ha il perimetro minimo.

AMB è isoscele perché l'angolo MBA= A'MS (perché corrispondenti) = SMA (per la simmetria) = MAB (perché alterni interni).

Scheda n 3 – Il problema dei ponti

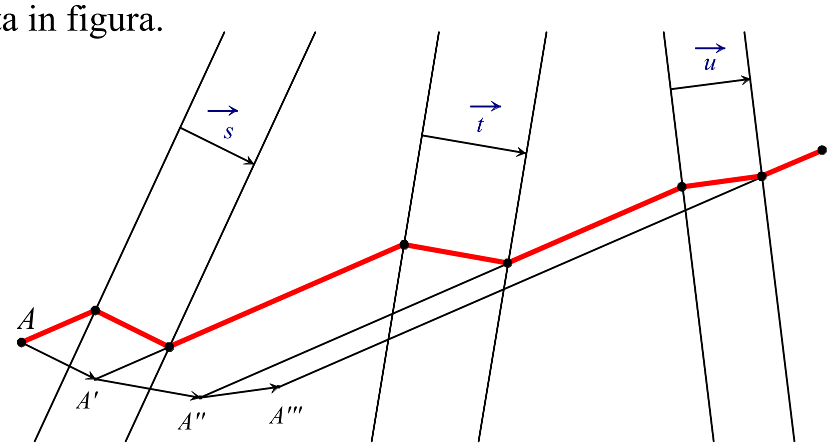


Sia $\vec{d}$ il vettore avente direzione perpendicolare alle rive del fiume e modulo uguale alla sua larghezza. Percorriamo subito un tratto di lunghezza *d* perpendicolare alle rive del fiume, cioè spostiamoci dal *A* al punto *A'* immagine di A nella traslazione di vettore *d*. AA'ST è un parallelogramma: quindi AT + TS + SB = AA' + A'B.

Più in generale

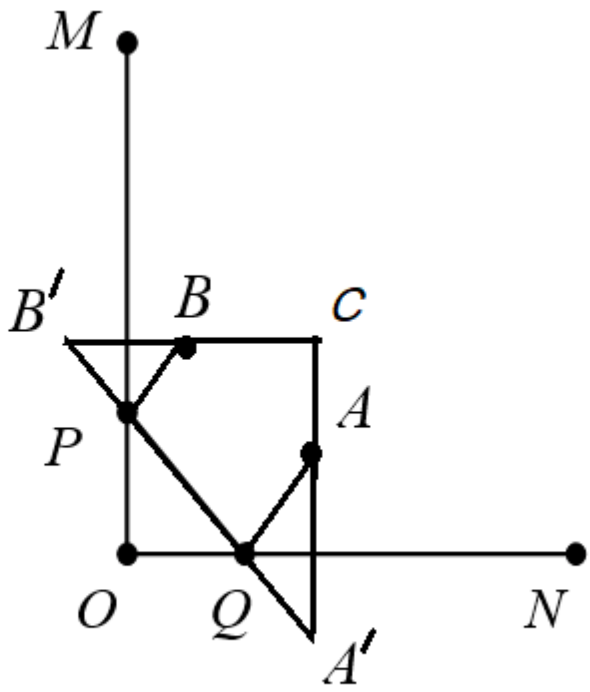
Siano date più strisce di varie direzioni e larghezze; siano *A* e *B* due punti situati in modo tale che il segmento *AB* le attraversi tutte. Trovare il tragitto minimo con la condizione che gli attraversamenti delle strisce avvengano perpendicolarmente ai bordi delle strisce.

La soluzione è illustrata in figura.



Scheda n 4 – Coppa D'Ignazio 2014

Il punto *A* in figura dista 30 cm dal segmento *ON* e 40 cm dal segmento *OM*, mentre il punto *B* dista 50 cm dal segmento *ON* e 20 cm dal segmento *OM*. Calcolare la lunghezza del percorso minimo *BPQA* espressa in cm.



La risposta si ottiene costruendo il punto A' simmetrico di A rispetto alla retta ON ed il punto B' simmetrico di B rispetto alla retta OM: congiungendo i punti A' e B' si trovano i punti P e Q che corrispondono al commino minimo. La lunghezza richiesta è 100 cm.

Infatti CB'= 40+20 = 60 cm

CA' = 50+30 = 80 cm

A'B' = 100 cm per il Teorema di Pitagora.