RELAZIONI

$A = \{7, 8, 12\}$

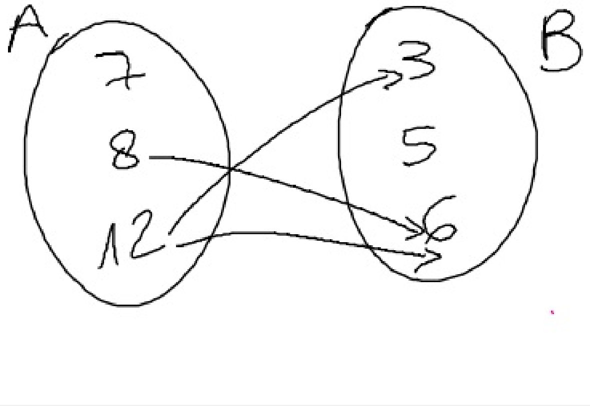
$B = \{3, 5, 6\}$

$D = A \times B = \{(7,3), (7,5), (7,6), (8,3), (8,5), (8,6), (12,3), (12,5), (12,6)\}$

$P(x,y)$: "x e y non sono primi tra loro"

$A \times B$ è il dominio dell'enunciato aperto

INSIEME DI VERITÀ $= \{(8,6), (12,3), (12,6)\}$



RELAZIONE TRA DUE INSIEMI

Dati due insiemi A e B diversi dal vuoto (che possono anche coincidere), si dice **RELAZIONE TRA A e B** un procedimento che associa agli elementi di A (tutti o alcuni) uno o più elementi di B.

Per realizzare tale associazione si utilizza un <u>ENUNCIATO APERTO</u>

Se (x,y) è una coppia che appartiene all'insieme di verità dell'enunciato aperto si dice che **"x sta in RELAZIONE con y"** e si scrive xRy

Nell'es. precedente

$8R6$
$12R3$
$12R6$

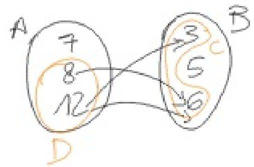
$$xRy$$

x è la CONTROIMMAGINE di y

y è l'IMMAGINE di x

DOMINIO di una RELAZIONE R tra A e B: insieme degli elementi di A che hanno almeno un'immagine in B.

CODOMINIO (IMMAGINE) di una relazione R tra A e B: insieme di tutti gli elementi di B che sono l'immagine di elementi di A



RAPPRESENTAZIONI DI UNA RELAZIONE

$A = \{2, 3, 4\}$ $B = \{4, 5, 6\}$

R: "x e y primi tra loro"

relazione tra A e B
definita dall'en. aperto

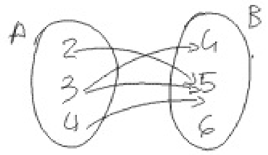
① PER ELENCAZIONE

Consiste nell'elencare tutte le coppie $(x, y) \in A \times B$ tali che xRy

$$A \times B = \{(2,4), \underline{(2,5)}, (2,6), \underline{(3,4)}, \underline{(3,5)}, (3,6), (4,4), \underline{(4,5)}, (4,6)\}$$

GRAFICO $R = \{(2,5), (3,4), (3,5), (4,5)\}$

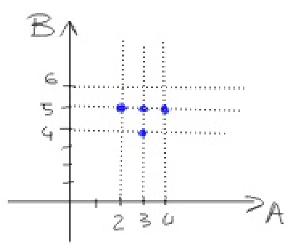
② DIAGRAMMA A FRECCE



③ TABELLA A DOPPIA ENTRATA

A↓ \ B→	4	5	6
2		X	
3	X	X	
4		X	

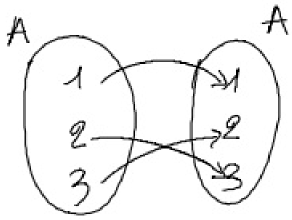
④ DIAGRAMMA CARTESIANO

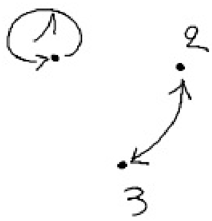


Una relazione tra A e B è un sottoinsieme di $A \times B$

5 GRAFO

Si utilizza quando A e B **COINCIDONO**





1R1
2R3
3R2

- Ogni elemento dell'insieme va indicato con un • (NODO)

- Per indicare che xRy

- Per indicare che xRx

(CAPPIO)

- Per indicare che xRy e yRx

(o anche

)

senza freccia significa che è DOPPIAMENTE ORIENTATO

- Se due elementi non stanno in relazione

PROPRIETÀ DELLE RELAZIONI

PROPRIETÀ RIFLESSIVA

Una relazione, definita su un insieme A (cioè A e B coincidono), è <u>RIFLESSIVA</u> se <u>ogni</u> elemento di A sta in relazione con se stesso

$$\forall x \in A,\ xRx$$

GRAFO

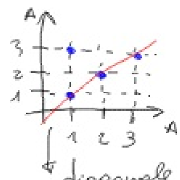
Ogni nodo ha cappio

TABELLA

A \ A	1	2	3
1	X		X
2		X	
3			X

Crocette in diagonale

D. CARTESIANO



diagonale con tutti i pallini

PROPRIETÀ ANTIRIFLESSIVA

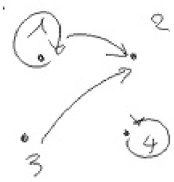
Una relazione, definita su un insieme A, è ANTIRIFLESSIVA se <u>ogni</u> elemento di A <u>NON</u> sta in relazione con se stesso.

$$\forall x \in A,\ x \not R x$$

(oppure $\nexists x \in A,\ xRx$)

GRAFO: nessun cappio
TABELLA: nessuna crocetta in diagonale
D. CARTESIANO: nessun pallino in diagonale

Es.



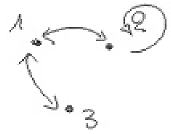
né rifless.
né antirifless.

Proprietà Simmetrica

Una relazione, definita su un insieme A, è SIMMETRICA se per ogni coppia di $x, y \in A$ se x sta in relazione con y allora y sta in relazione con x

$$\forall x, y \in A, \; xRy \rightarrow yRx$$

GRAFO



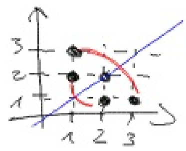
Tutti gli archi doppiamente orientati

TABELLA

	1	2	3
1		X	X
2	X	X	
3	X		

Ogni crocetta deve avere la simmetrica rispetto a diagonale

D. CARTES.



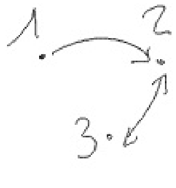
Proprietà Antisimmetrica

Una relazione, definita su un insieme A, è ANTISIMMETRICA se per ogni $x, y \in A$, con $x \neq y$, se x sta in relazione con y allora y non sta in relazione con x

$$\forall x, y \in A, \; x \neq y, \; xRy \rightarrow y \not R x$$

GRAFO: Solo archi orientati (NO doppiamente)
TABELLA: nessuna crocetta deve avere simmetrica
D. CARTESIANO: nessun pallino " " "

Es



né Simm.
né AntiSimm.

PROPRIETÀ TRANSITIVA

Una relazione, definita su un insieme A, è TRANSITIVA se

$$\forall x, y, z \in A \quad (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$$

RELAZIONI DI EQUIVALENZA

Una relazione, definita su un insieme A, si dice di EQUIVALENZA se gode delle proprietà:

RIFLESSIVA
SIMMETRICA
TRANSITIVA

Una relazione di equivalenza, definita nell'insieme A, classifica gli elementi di A raggruppandoli in base a una data caratteristica.

L'insieme di tutti i raggruppamenti costituisce una PARTIZIONE DI A

Es.
A = insieme alunni M. Curie

xRy se x e y stanno in classe insieme

- x sta in classe con x $\boxed{R}$
- se x sta in classe con y allora anche y sta in classe con x $\boxed{S}$
- se x sta in classe con y e y con z allora x è in classe con z $\boxed{T}$

Questa relazione organizza gli alunni in base alla classe di appartenenza.

CLASSI DI EQUIVALENZA

Data una relazione di equivalenza R, definita su A, la CLASSE DI EQUIVALENZA di x ($\in A$) è l'insieme di tutti gli elementi di A che stanno in relazione con x (e anche tra di loro). Si indica con $[x]$

INSIEME QUOZIENTE è l'insieme di tutte le classi di equivalenza

Si indica A/R

Es.

$$A = \{3, 4, 21, 27, 34, 142\}$$

xRy se x ha lo stesso numero di cifre di y

Riflessiva: un numero ha lo stesso numero di cifre di se stesso

Simmetrica: (se $xRy \to yRx$)

Transitiva

RELAZIONE D'EQUIVALENZA

$[3] = \{3, 4\}$ (uguale a $[4]$)

$[21] = \{21, 27, 34\}$

$[142] = \{142\}$

$$A/R = \{[3], [21], [142]\}$$

RELAZIONI D'ORDINE

Una relazione d'ordine permette di ordinare gli elementi di un insieme.

Una relazione R, definita su un insieme A, si dice relazione D'ORDINE se è:

ANTISIMMETRICA
TRANSITIVA

Se la relazione è anche
RIFLESSIVA allora è di ordine LARGO
ANTIRIFLESSIVA allora è di ordine STRETTO

Es

$A = \{3, 8, 21, 35, 100\}$

$R: \ x < y$

Se xRy allora $y \not R x$
se $x < y$ sicuramente y non è minore di x
quindi $y \not R x$ $\boxed{AS}$

Se xRy e yRz allora xRz
$x < y$ e $y < z$ sicuramente $x < z$ $\boxed{T}$

$\downarrow$

RELAZIONE D'ORDINE STRETTO
(nessun elemento è minore di se stesso, quindi nessun elemento sta in rel. con se stesso)

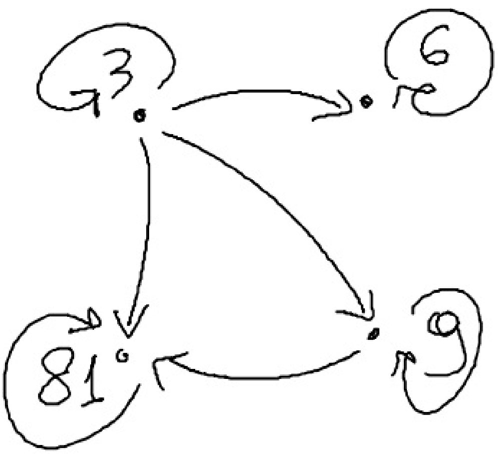
$3 < 8 < 21 < 35 < 100$

$3 \to 8 \to 21 \to 35 \to 100$ (ORDINE TOTALE vedi dopo)

ES.

$A = \{3, 6, 9, 81\}$

R: " x è divisore di y "



$\boxed{R}$

$\boxed{AS}$

$\boxed{T}$

REL. D'ORDINE LARGO

$3 R 6$

$3 R 9 R 81$

$$\begin{tikzcd} & 6 \\ 3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 9 \arrow[r] & 81 \end{tikzcd}$$

(ORDINE PARZIALE)

VEDI FOGLIO SUCCESSIVO

ORDINE TOTALE E PARZIALE

Sia R una relazione d'ordine definita su A.

Se per ogni coppia di $x, y \in A$ distinti si ha che o xRy o yRx allora la relazione d'ordine è TOTALE

(cioè x e y sono sempre confrontabili, in un grafo sempre collegati da un arco)

Se, invece, esiste almeno una coppia di $x, y \in A$ distinti tali che $x \not R y$ e $y \not R x$ allora l'ordine è PARZIALE