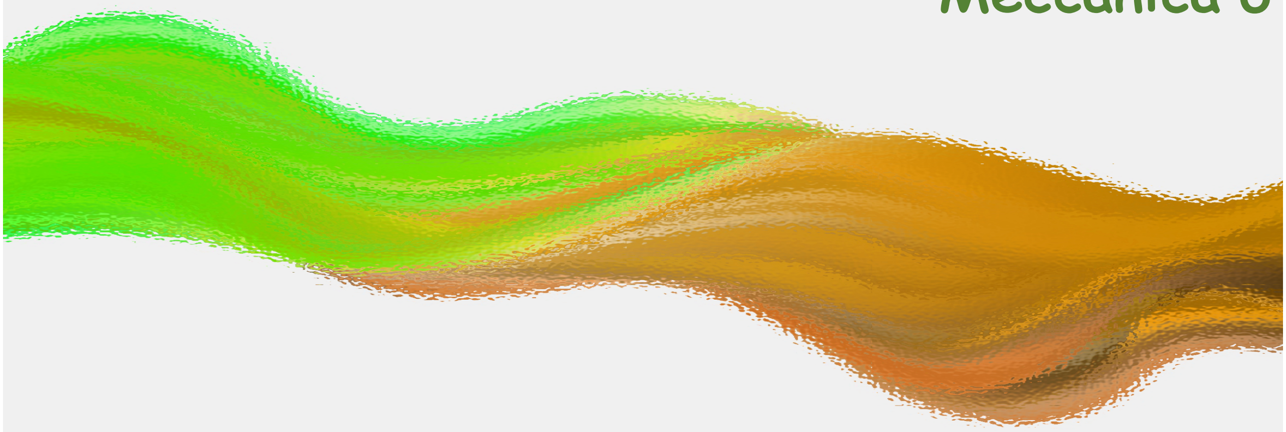
LE ONDE MECCANICHE

Meccanica 6



1

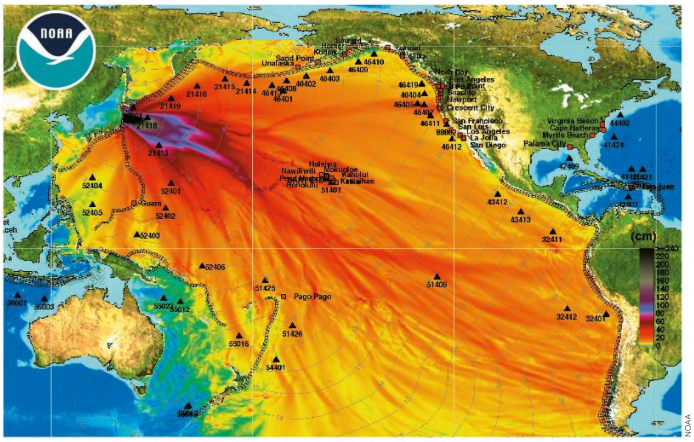
Le onde meccaniche

I moti ondulatori

Lo tsunami che nel 2011 ha devastato le coste del Giappone e causato il disastro nucleare di Fukushima è stato provocato da un terremoto con epicentro in mare.

All'origine di uno tsunami c'è sempre il sollevamento improvviso di una grande massa d'acqua che può verificarsi, per esempio, in conseguenza di una scossa sismica o di un'eruzione vulcanica sottomarina. Un evento di questo genere innalza l'intera colonna d'acqua che va dal fondale alla superficie e crea una sequenza di onde che possono viaggiare per distanze transoceaniche.

2



Lo tsunami del 2011 ha avuto origine vicino alla costa nord-orientale del Giappone e ha attraversato l'Oceano Pacifico in tutte le direzioni. I colori della mappa, dal nero al violetto, fino al rosso e al giallo, rappresentano l'altezza delle onde secondo la legenda riportata sulla destra; i contorni in grigio mostrano i punti raggiunti dallo tsunami a intervalli di un'ora

3

La mappa della NOAA è il risultato di una simulazione, elaborata secondo un modello e basata sui dati raccolti da stazioni di monitoraggio dislocate per tutto l'oceano (nei punti segnati con un triangolino).

Queste stazioni hanno dei sensori di pressione sul fondale e rilevano indirettamente, dalle variazioni di pressione, le variazioni di altezza della superficie dell'acqua. Ciascuna stazione è in comunicazione satellitare, tramite una **boa** provvista di antenne.

Al passaggio delle onde di uno tsunami, le boe salgono e scendono ma non strappano gli ormeggi e non vengono trascinate via.

Ciò indica che le onde non trasportano l'acqua da una parte all'altra dell'oceano; tuttavia la mettono in movimento e la innalzano, ossia trasportano quantità di moto, energia cinetica ed energia potenziale gravitazionale.

4

Al largo, le onde di uno tsunami hanno un'altezza di poche decine di centimetri; tuttavia, la colonna d'acqua perturbata al loro passaggio ha una massa molto grande e quindi è molto grande anche la quantità di energia che esse trasportano.

Vicino alla riva, dove il fondale è pù basso e l'energia viene trasferita a masse d'acqua via via minori, le onde crescono in altezza.

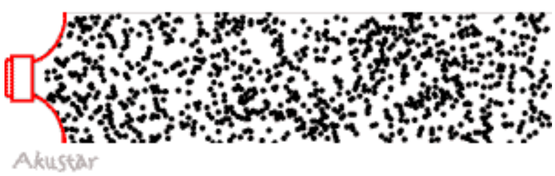
Ecco perché uno tsunami può passare inosservato ai passeggeri di una nave, in alto mare, ma essere catastrofico sulla costa.

Nell'esempio dello tsunami, la scossa sismica o l'eruzione vulcanica che ne è all'origine rappresentano la *sorgente* delle onde e l'acqua costituisce il *mezzo materiale* attraverso cui le onde si propagano.

5

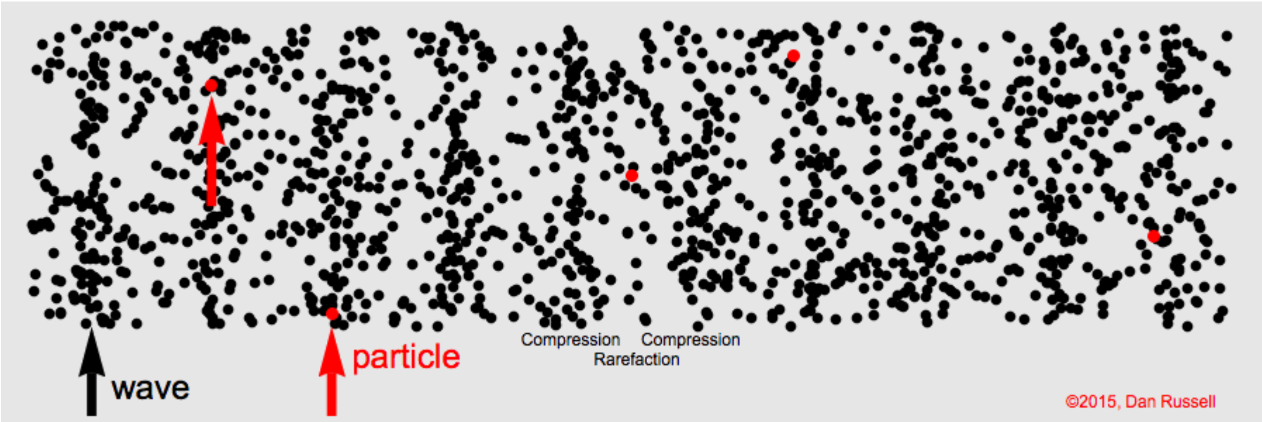
Che cosa è un'onda?

Un'onda è una *perturbazione* che si propaga trasportando energia e quantità di moto, ma non materia.



Un'onda acustica è un'onda trasversale che si propaga nello spazio:
L'aria si comprime e si rarefà della direzione di propagazione del suono

6

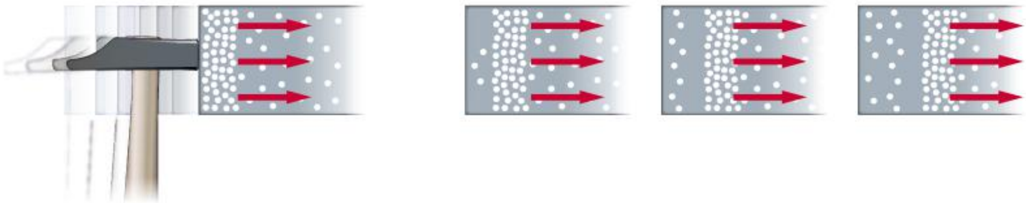


7

https://www.youtube.com/watch?v=FhQfuCJi2Hg

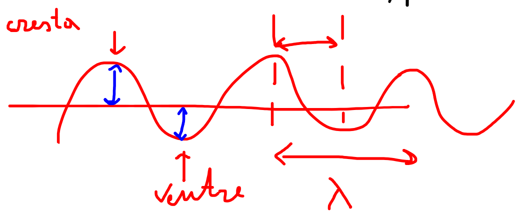
8

Costituisce un'onda longitudinale anche la perturbazione che attraversa un solido quando viene percosso. In figura una sbarra di acciaio è colpita a un'estremità da un martello. Il colpo comprime l'acciaio, provocando localmente un piccolo aumento di densità (esagerato nella figura) che si propaga lungo la sbarra. L'onda è longitudinale perché ogni porzione del mezzo materiale oscilla avanti e indietro in orizzontale, nella stessa direzione dell'onda.



ESEMPIO 1 : Un'onda viaggia lungo una corda tesa. La distanza verticale dalla cresta al ventre `e di 13 cm e la
distanza orizzontale dalla cresta al ventre `e 28 cm. Calcola la lunghezza d'onda e l'ampiezza.

Soluzione: La lunghezza d'onda `e la distanza, misurata in orizzontale, tra due creste o tra due ventri. La distanza tra cresta e ventre `e pertanto met`a lunghezza d'onda; per cui $\lambda = 56$ cm. L'ampiezza `e invece la met`a distanza in verticale tra la cresta e il ventre dell'onda, per cui $A = 6,5$ cm.

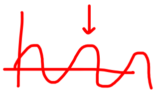


ESEMPIO 2: Un surfista che fluttua al di là dei frangiflutti nota che passano per la sua posizione 14 onde al minuto. Se la lunghezza d'onda di queste onde è λ = 34 m, trovare la loro velocità di propagazione.

Soluzione: Il surfista osserva la grandezza detta frequenza, cioè il numero di oscillazioni complete in un intervallo di tempo definito. In unità SI si determinare la frequenza in Herz, cioè numero di oscillazioni complete in un secondo:

$$f = 14/60 = 0.23\text{Hz}$$

La velocità di un'onda è data dal rapporto tra la lunghezza d'onda (distanza percorsa nella propagazione da una oscillazione completa) e il tempo impiegato, periodo che è l'inverso della frequenza; pertanto



$f = \frac{1}{T}$

$$v = \lambda f = 34 \text{ m} \times 0.23 \text{ s}^{-1} = 7,8 \text{ m/s}$$

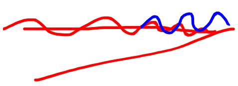
ESEMPIO 3: La velocità delle onde di superficie nell'acqua diminuisce con il diminuire della profondità. Supponiamo che delle onde viaggino lungo la superficie di un lago con una velocità di 2.0 m/s e una lunghezza d'onda di 1.5 m. Quando queste onde si muovono verso la parte del lago meno profonda la loro velocità diminuisce fino a 1.6 m/s, sebbene la loro frequenza rimanga la stessa. Calcolare la lunghezza d'onda nell'acqua bassa.

Soluzione: Nota la relazione v = λf, se la frequenza rimane costante, allora velocità e lunghezza d'onda risultano direttamente proporzionali. Pertanto

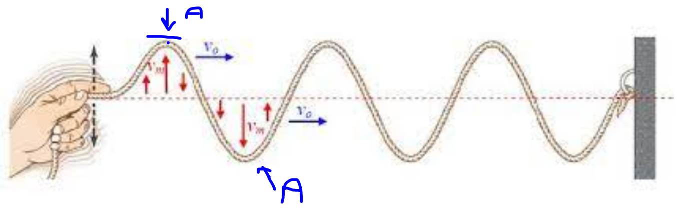
$f = \frac{v}{\lambda}$

$$\frac{v_{alta}}{\lambda_{alta}} = \frac{v_{bassa}}{\lambda_{bassa}}$$

$$\lambda_{bassa} = \frac{v_{bassa}}{v_{alta}} \lambda_{alta} = \frac{4.6}{2.0} \cdot 1.5 = 1.2\, m$$



ESEMPIO 4: Un'onda di frequenza 4.5Hz con un'ampiezza di 12cm e una lunghezza d'onda di 27cm viaggia lungo una corda tesa. Calcolare lo spazio percorso da una cresta della corda in un intervallo di tempo 0.50 s.



Soluzione: La frequenza indica quante onde complete si propagano in un secondo. In mezzo secondo si avranno, quindi, 2.25 oscillazioni complete. Pertanto la cresta percorre una distanza

$$v: \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lambda f \qquad \Delta s = 2.25\, s^{-1} \cdot 0.27\, m = 0.61\, m$$

$$\Delta s = \lambda f \cdot \Delta t$$

Descrizione matematica di un'onda

Forma generale con costante k (detta numero d'onda) $([k] = \text{rad/m})$ $k = 2\pi/\lambda$

$$y = A \cdot \sin[k(x - \mathrm{v}t)]$$

A è l'ampiezza massima dell'onda
v è la velocità di propagazione dell'onda

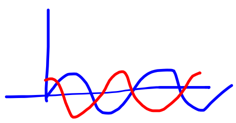
Introducendo la pulsazione si ha la forma più usata $\boxed{\omega = \mathrm{v}\, k}$ $([\omega] = \text{rad/s})$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{y = A \cdot \sin(kx - \omega t)}$$

$(kx - \omega t)$ è la fase dell'onda
(= angolo argomento della funzione seno)

Più in generale: $y = A \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi)$
dove si inserisce la costante di fase φ che specifica le condizioni iniziali dell'onda



$\varphi = 0$
$\varphi \neq 0$

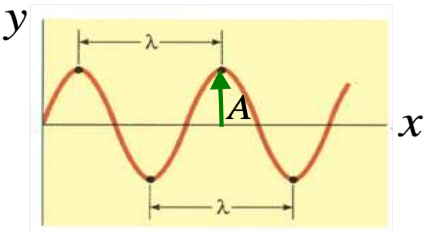


grafico a t **fissato:** si osserva la periodicità spaziale (*fotografia*)

$$y = A \cdot \sin(kx + \varphi)$$

Periodicità spaziale

Periodicità spaziale: la distanza Δx tra due punti equivalenti dell'onda si definisce *lunghezza d'onda* λ e deve corrispondere a una variazione di fase di un angolo giro (a t fissato), quindi →

$$k \cdot \Delta x = k \cdot \lambda = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

Periodicità temporale

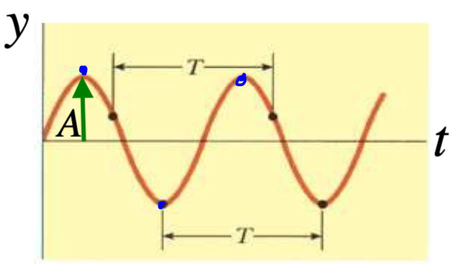


grafico a x **fissato** si osserva la periodicità temporale (*oscillatore armonico*)

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

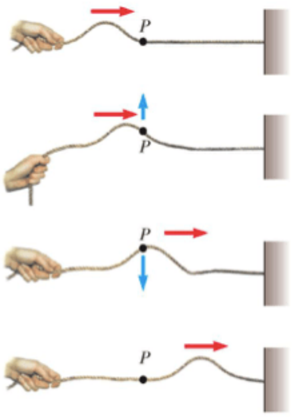
Periodicità temporale: la distanza Δt tra due punti equivalenti dell'onda è il *periodo T* e deve corrispondere a una variazione di fase di un angolo giro (a x fissato), quindi: $\omega \cdot \Delta t = \omega \cdot T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi / \omega$

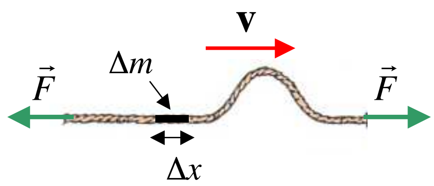
Frequenza dell'oscillazione: $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

Infine da $\omega = \mathrm{v}\, k \quad \Rightarrow \quad 2\pi f = \mathrm{v} \cdot 2\pi / \lambda$ si trova

$$\boxed{\mathrm{v} = \lambda \cdot f}$$

relazione fondamentale che lega la velocità di propagazione con la lunghezza d'onda e la frequenza





Velocità di un'onda su una corda tesa

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

F : tensione della corda (in Newton)

μ : massa della corda per unità di lunghezza (in Kg/m) ($\mu = \Delta m/\Delta x$)

Le onde non trasportano materia, ma ….

Energia trasportata da un'onda

Per un'oscillatore armonico: $E_0 = \frac{1}{2} k_{osc} A^2; \quad k_{osc} = m \cdot \omega^2$

Consideriamo un'onda sinusoidale su un tratto di corda di massa Δm ; ogni elemento della corda esegue un moto armonico, e **l'energia per unità di lunghezza** che viaggia sulla corda sarà proporzionale ai **quadrati della pulsazione e dell'ampiezza.**

$$\frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{2} \Delta m \, \omega^2 A^2}{\Delta x} = \frac{1}{2} \mu \, \omega^2 A^2$$

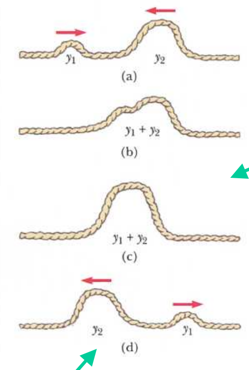
μ

Nell'intervallo di tempo Δt questa energia viene trasferita al tratto di corda successivo; la **potenza** (energia per unità di tempo) **trasportata dall'onda** è anche proporzionale alla velocità di propagazione.

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \Delta m \, \omega^2 A^2}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} \mu \, \Delta x \, \omega^2 A^2}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mu \, v \, \omega^2 A^2$$

Sovrapposizione e interferenza

Principio di sovrapposizione: se due (o più) onde si muovono in un mezzo, la funzione dell'onda risultante è in ogni punto la somma algebrica delle funzioni $f_i(x,t)$ delle singole onde



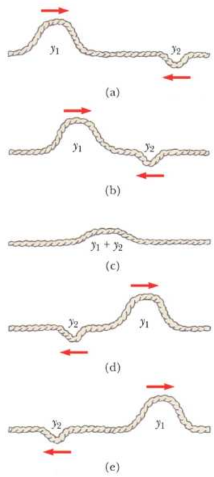
La combinazione di onde nella stessa regione di spazio è detta **interferenza**

$$y_T = y_1 + y_2$$

Esempio di interferenza costruttiva

Due onde che si propagano in direzioni opposte possono attraversarsi senza venire modificate.

Due onde con ampiezze di verso opposto si sovrappongono dando **interferenza distruttiva**; se le ampiezze sono uguali si ha completa scomparsa dell'onda risultante all'istante della sovrapposizione (interferenza completamente distruttiva)



Sovrapposizione e interferenza di onde sinusoidali

Due onde sinusoidali uguali (A,k,ω uguali), e nella stessa direzione, ma con una **differenza di fase pari a φ** (ad esempio possono essere generate dalla stessa sorgente ma seguire percorsi diversi prima di sovrapporsi)

$$y_1 = A \cdot \sin(kx - \omega t); \quad y_2 = A \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

La loro sovrapposizione (con le regole trigonometriche)

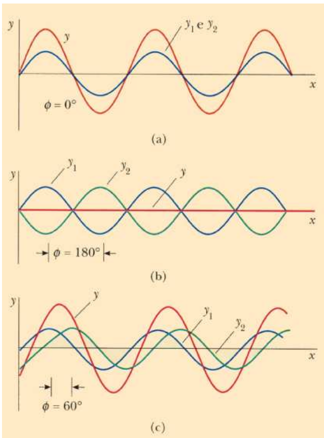
$$y = y_1 + y_2 = \underbrace{2A \cdot \cos(\varphi/2)}_{\text{Ampiezza dell'onda risultante}} \cdot \underbrace{\sin(kx - \omega t + \varphi/2)}_{\text{Onda sinusoidale con la medesima lunghezza d'onda e frequenza}}$$

Ampiezza dell'onda risultante

Onda sinusoidale con la medesima lunghezza d'onda e frequenza

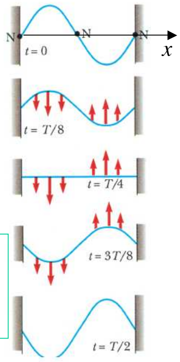
Differenza di fase φ = 0
interferenza costruttiva
(massima ampiezza = 2*A*)

Differenza di fase φ = π
interferenza completamente
distruttiva (ampiezza = 0)



Onde stazionarie

Esempio di onda stazionaria su una corda tesa



Su una corda bloccata alle due estremità, le onde che si propagano subiscono **riflessione** agli estremi. La sovrapposizione delle onde con le loro riflesse forma **onde stazionarie**, in cui periodicità spaziale e temporale sono separate:

onda propagante verso **-x** ; $y_1 = A \cdot \sin(kx + \omega t + \varphi_1)$

onda propagante verso **+x** $y_2 = A \cdot \sin(kx - \omega t + \varphi_2)$

$$y = y_1 + y_2 = \underbrace{2A \cdot \sin(kx + (\varphi_1 + \varphi_2)/2)} \cdot \underbrace{\cos(\omega t + (\varphi_1 - \varphi_2)/2)}$$

Ampiezza dell'oscillazione, funzione della posizione

Oscillazione armonica (trasversale) degli elementi della corda intorno alla posizione di equilibrio

Forma dell'onda:
$\rightarrow \sin(kx + \varphi_0)$
nodi: punti in cui l'ampiezza è nulla
ventri: punti in cui l'ampiezza è massima

Posizione dei nodi: in $x = 0$ e in $x = L$ deve essere ampiezza zero, quindi ricaviamo la **lunghezza d'onda e frequenza propria dell' onda stazionaria**:

$$x = 0 \Rightarrow 0 = \sin(0 + \varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = 0$$

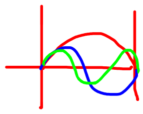
$$x = L \Rightarrow 0 = \sin(kL + 0) \Rightarrow kL = n\pi$$

(con n intero qualsiasi)

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = n\pi \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2L}{n} \Rightarrow \nu = n\frac{\mathrm{v}}{2L}}$$

$$\boxed{L = n\frac{\lambda}{2}}$$

La lunghezza della corda corrisponde a un numero intero di mezze lunghezze d'onda



21

L'insieme di tutti i punti che vengono simultaneamente raggiunti dalla perturbazione è detto fronte d'onda

Tra i fronti d'onda più semplici:

Superfici sferiche concentriche (onde sferiche). E' il caso delle onde sonore prodotte da una piccola sorgente in un fluido omogeneo.

Piani fra loro paralleli (onde piane). E' il caso delle onde sferiche che, a grandi distanze dalla sorgente, possono essere considerate piane per una limitata regione di spazio.

22

ONDE elastiche in una barra

In questa sezione ricaviamo l'equazione delle onde in un caso ideale, ma molto utile per le applicazioni pratiche dell'acustica e dell'ingegneria (sollecitazioni sulle travi, onde sismiche).

Dopo aver definito con cura il sistema procederemo in tre semplici passaggi:

- bilancio delle forze
- individuazione della grandezza da utilizzare come funzione d'onda
- scrittura dell'equazione del moto

Che cos'è una barra

A differenza della corda, la barra che qui consideriamo è un **vero sistema elastico tridimensionale**. Al suo interno si esercitano forze che non sono solo longitudinali, ma possono essere dirette in qualunque direzione.

Il fatto che si tratti di una "barra", cioè di un oggetto più lungo che largo, in questo caso, serve solo per ridurre il numero di dimensioni nelle equazioni, ma non è una proprietà critica.

Che cos'è una barra

La barra che consideriamo è comunque ideale perché assumiamo che la sua elasticità sia **perfettamente lineare**, cioè che la deformazione sia direttamente proporzionale alla forza che l'ha provocata (legge di Hooke).

La Forza elastica è direttamente proporzionale alla Deformazione

La costante di proporzionalità non è in generale una semplice costante, ma un oggetto più complesso (tensore) che definisce un insieme di parametri necessari a descrivere tutte le deformazioni possibili che un solido può subire a causa di una forza ad esso applicata.

Onde longitudinali

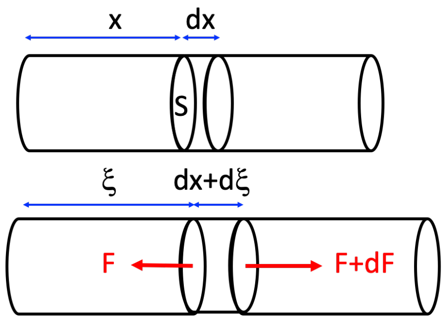
Che cosa sappiamo

- Le onde longitudinali si generano per compressione (o trazione).
- La deformazione corrispondente è una compressione (o una dilatazione), che si propaga nella stessa direzione in cui si è esercitata la forza che l'ha prodotta.
- La costante di proporzionalità tra la deformazione e la pressione che la produce è detta modulo di Young E.
- L'equazione del moto di Newton per le traslazioni

$$F = ma$$

Che cosa vogliamo ricavare

- Assumiamo che una compressione (o una dilatazione) avvenga lungo l'asse della sbarra nella direzione *x*.
- Vogliamo ricavare l'equazione del moto per la deformazione $\xi(x, t)$ di un elemento infinitesimo della barra di sezione *S* e di altezza *dx* posto nella posizione *x*.



Dimostrazione

- L'elemento infinitesimo della sbarra (dx) subisce una deformazione e la sua lunghezza diventa $dx + d\xi$.
- Ricordiamo che ciò che si propaga nella barra è la compressione, e perciò la grandezza rilevante non è x ma ξ.
- La deformazione è data da $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ e, per la legge di Young

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L}$$

Pertanto:

$$F(x, t) = ES\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Dimostrazione

L'equazione appena ricavata

$$F(x,t) = ES\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

ci dà il valore di F, ma noi siamo interessati alla forza netta che si esercita sull'elementino di volume:

$$F(x+dx) - F(x) = dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx$$

Ricaviamo $\frac{\partial F}{\partial x}dx$ dalla formula di Young $F(x,t) = ES\frac{\partial \xi}{\partial x}$, derivando rispetto a x:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx = ES\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}dx \text{ (Per la legge di Newton)} = ma = \rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Pertanto:

$$ESdx\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \rho S dx \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{Con } V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

La soluzione dell'equazione differenziale ha la forma: $\xi_1(x-ct) + \xi_2(x+ct)$

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$

Cerchiamo soluzioni della forma

$$\xi(x,t) = f(kx)g(\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 f(kx)}{\partial x^2} g(\omega t) = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 g(\omega t)}{\partial t^2} f(kx)$$

$$\frac{1}{f(kx)}\frac{\partial^2 f(kx)}{\partial x^2} = \frac{1}{g(\omega t)V^2}\frac{\partial^2 g(\omega t)}{\partial t^2} = -Q^2$$

$$\frac{1}{f(kx)}\frac{\partial^2 f(kx)}{\partial x^2} = \frac{1}{g(\omega t)V^2}\frac{\partial^2 g(\omega t)}{\partial t^2} = -Q^2$$

$$\frac{1}{f(kx)}\frac{\partial^2 f(kx)}{\partial x^2} = -Q^2 \rightarrow \quad \frac{\partial^2 f(kx)}{\partial x^2} = -Q^2 f(kx)$$

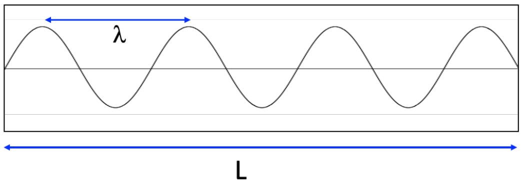
$$f(kx) = \sin(kx + \varphi) \ \rightarrow k^2 = Q^2$$

$$\frac{\partial^2 g(\omega t)}{\partial t^2} = -Q^2 V^2 g(\omega t)$$

$$g(\omega t) = \cos(\omega t + \varphi') \ \rightarrow \ \omega^2 = Q^2 V^2$$

La scelta di considerare gli estremi fissi dà un vincolo alle soluzioni

$$\xi(x,t) = \sin(kx+\varphi)\cos(\omega t+\varphi')$$



$$\xi(0,t) = \xi(L,t) = 0 \qquad \forall t$$

$$\xi(0,t) = \sin(\varphi)\cos(\omega t+\varphi')=0 \quad : \quad \varphi=0$$

$$\xi(L,t) = \sin(kL)\cos(\omega t+\varphi') = 0 \quad : \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi \rightarrow \lambda = \frac{n}{2L}$$

Affinchè gli estremi rimangano fissi la lunghezza della barra deve essere un multiplo intero di mezze lunghezze d'onda.

Esempio: una barra di metallo è lunga 75.0 cm. Si sono osservate le frequenze di 420Hz e di 315Hz, e nessun'altra frequenza di risonanza tra queste due. Trovare le frequenza di risonanza più bassa e la velocità dell'onda.

Soluzione: Entrambi i valori della frequenza, se scomposti, sono multipli di 105, in particolare,

420 = 105×4 315 = 105×3

pertanto quando n = 1 si ha la frequenza più bassa pari a 105 Hz.
La velocità dell'onda si ottiene da

$$v = \lambda f = 2fL/n = 105\times1.5 = 158 m/s$$

PROBLEMA MODELLO 1 ACCIAIO INOX

Un cavo di acciaio inox (densità $d = 7{,}8 \times 10^3$ kg/m^3) di sezione 1,5 mm^2 è sottoposto a un impulso che si muove alla velocità di 200 m/s. La sua tensione di rottura pari a 500 N/mm^2.

▸ **Stabilisci se il cavo si rompe o se regge al passaggio dell'impulso.**

DATI

Sezione del filo: $S = 1{,}5$ mm^2
Densità dell'acciaio: $d = 7{,}8 \times 10^3$ kg/m^3
Velocità dell'impulso: $v = 200$ m/s
Tensione di rottura dell'acciaio inox: $F = 500$ N/mm^2

INCOGNITE

Tensione dovuta all'impulso: $F_T = ?$

L'IDEA

- Il cavo d'acciaio si deforma, al passaggio dell'impulso, per poi riacquistare la sua forma originale. Questa deformazione meccanica sottopone il cavo a una tensione che dipende dalla velocità di propagazione dell'impulso e dalla massa per unità di lunghezza del cavo (densità lineare), cioè $v = \sqrt{\frac{F_T}{d_L}}$. Se l'impulso si propaga troppo velocemente, allora può generarsi una tensione che danneggia il cavo, fino a spezzarlo. A ogni cavo è infatti associata una sua caratteristica tensione di rottura.

LA SOLUZIONE

Calcolo la densità lineare del cavo di acciaio inox.

Considero il cavo di forma cilindrica. La densità dell'acciaio è $d = 7{,}8 \times 10^3$ kg/m^3, quindi la sua densità lineare si può esprimere come:

$$d_L = \frac{m}{L} = \frac{m}{V/S} = \frac{mS}{V} = Sd$$

$$\text{cioè } d_L = (1{,}5 \times 10^{-6}\,\text{m}^2) \times (7{,}8 \times 10^3\,\text{kg/m}^3) = 1{,}17 \times 10^{-2}\,\text{kg/m}$$

Calcolo la tensione a cui è sottoposto il cavo.

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{d_L}} \rightarrow F_T = d_L v^2$$

quindi

$$F_T = (1{,}17 \times 10^{-2}\,\text{kg/m}) \times (200\,\text{m/s})^2 = 4{,}7 \times 10^2\,\text{N}$$

Pertanto il cavo di acciaio inox è sottoposto a un carico di rottura pari a:

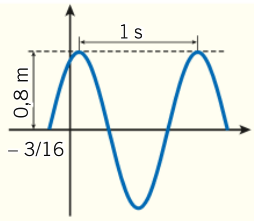
$$\frac{F}{S} = \frac{4{,}7 \times 10^2\,\text{N}}{1{,}5\,\text{mm}^2} = 3{,}1 \times 10^2\,\text{N/mm}^2$$

valore inferiore a quello della forza di tensione, per cui il cavo non si spezza.

PROBLEMA MODELLO 2 UN'ONDA SULL'ACQUA

Considera un punto fissato di un'onda sull'acqua che ha la forma di un'onda armonica, con i dati presentati nella tabella e il grafico y-t mostrato.

- **Calcola la frequenza dell'oscillazione e scrivi l'equazione d'onda nel tempo.**
- **Calcola la velocità con cui l'onda si propaga e scrivi l'equazione dell'onda $y(x)$ in un istante dato.**



■ DATI	■ INCOGNITE
Ampiezza: $a = 0{,}8$ m	Frequenza: $f = ?$
Periodo: $T = 4{,}0$ s	Equazione d'onda in un punto fissato: $y(t) = ?$
Fase iniziale al tempo $t = 0$ s: $\varphi_0 = -3/16$ rad	Velocità: $v = ?$
Lunghezza d'onda: $\lambda = 15$ m	Equazione d'onda in un istante fissato: $y(x) = ?$

L'IDEA

- Calcolo la frequenza di oscillazione dal periodo, e la velocità dalla relazione $v = \lambda f$.
- Note tutte le caratteristiche del moto armonico dell'onda, posso scrivere le sue equazioni d'onda in un punto fissato $\left(y = a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)\right)$ e in un istante di tempo fissato $\left(y = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right)\right)$.

LA SOLUZIONE

Calcolo la frequenza dell'oscillazione e la velocità di propagazione dell'onda.

$$f = \frac{1}{4{,}0\ \text{s}} = 0{,}25\ \text{Hz}$$

$$v = \lambda f = (15\ \text{m}) \times (0{,}25\ \text{Hz}) = 3{,}8\ \text{m/s}$$

Scrivo l'equazione dell'onda armonica in un punto fissato.

$$y(t) = a\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right) = (0{,}8\ \text{m})\cos\left(\frac{2\pi}{4{,}0s}t - \frac{3}{16}\ \text{rad}\right)$$

Scrivo l'equazione dell'onda armonica in un istante fissato.

$$y(x) = a\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = (0{,}8\ \text{m})\cos\left(\frac{2\pi}{15\ \text{m}}x\right)$$

Esempi

La densità media della crosta terrestre $10\,km$ al di sotto dei continenti è $2.7\,g/cm^3$. La velocità delle onde sismiche longitudinali a quella profondità è di $5.4\,km/s$. Trovare il modulo di compressibilità della crosta terrestre a quella profondità (come paragone, quella dell'acciaio è $1.6 \cdot 10^{11}\,Pa$)

Soluzione: il coefficiente di compressibilità descrive la variazione media del volume di un elemento della crosta terrestre al variare della pressione ed è espresso da

$$B = -\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}}$$

dove $\frac{\Delta V}{V}$ è la variazione relativa di volume e Δp la variazione della pressione. Tale coefficiente è legato alla velocità di propagazione di un'onda dalla relazione

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

dove ρ è la densità della materia in kg/m^3. Con i dati disponibili, calcoliamo B,

$$B = v^2\rho = \left(5400\,\frac{m}{s}\right)^2 \times 2700\,\frac{kg}{m^3} = 7.9 \cdot 10^{10}\,Pa$$

$0.8 \cdot 10^{11}$

$1.6 \cdot 10^{11}$

Esempi

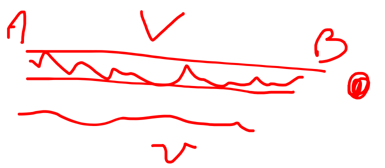
La velocità del suono in un certo metallo è V. Un'estremità di un lungo tubo di quel metallo di lunghezza L viene colpita duramente. Un ascoltatore all'altra estremità sente due suoni, uno dall'onda che ha viaggiato lungo il tubo e l'altro dall'onda che ha viaggiato attraverso l'aria. a) Se v è la velocità del suono nell'aria, trovare l'intervallo di tempo Δt che trascorre tra l'arrivo dei due suoni; b) supponendo $\Delta t = 1.00\,s$ e il tubo in acciaio, trovare la lunghezza L.

Soluzione: a) supponiamo le velocità costanti, per cui il tempo di percorrenza è dato dal rapporto tra la distanza percorsa e la velocità, per cui

$$\Delta t = \frac{L}{v} - \frac{L}{V} = \frac{L\,(V - v)}{vV}$$

b) la velocità del suono nell'acciaio, presa dalla letteratura, è $5941\,m/s$, e quella nell'aria è $331\,m/s$ per cui

$$L = \frac{\Delta t v V}{(V - v)} = \frac{1\,s \times \overset{V}{5491}\,\frac{m}{s} \times \overset{v}{331}\,\frac{m}{s}}{(5491 - 331)\,\frac{m}{s}} = 352\,m$$



$t_M = \frac{L}{V}$

$t_A = \frac{L}{v}$

$t_A > t_M$

Esempi

Un uomo batte con un martello una rotaia di ferro. Calcolare l'intervallo di tempo che intercorre tra i due colpi percepiti da un'altra persona situata vicino alla rotaia a $680\,m$ dal punto colpito, assumendo come velocità di propagazione del suono nell'aria e nel ferro i valori $340\,m/s$ e $5000\,m/s$.

Soluzione:: La persona distante avvertirà due suoni, uno dovuto alla propagazione nell'aria e l'altro alla propagazione nel metallo. La distanza rimane in questo caso sempre la stessa. Il suono si propaga con moto rettilineo e uniforme e la relazione tra spazio e tempo può essere descritta da $v = s/t$, e risolvendo rispetto a $t = s/v$, si ha

$$t_{aria} = \frac{680\,m}{340\,\frac{m}{s}} = 2\,s \qquad t_{ferro} = \frac{680\,m}{5000\,\frac{m}{s}} = 0.14\,s$$

$$\Delta t \;=\; (2 - 0.14)\;s = 1.86\,s$$

Esempi

Un uomo colpisce una lunga barra di alluminio a un'estremità. Un altro uomo, all'altra estremità con l'orecchio vicino alla barra, sente il colpo due volte (una attraverso l'aria, l'altra attraverso la barra), con un intervallo tra i due suoni di $0.120\,s$. Trovare la lunghezza della barra.

Soluzione: la velocità del suono nell'aria è di $343\,m/s$, mentre nell'alluminio è di $6420\,m/s$. Allora,

$$\Delta t = \frac{L}{v_{aria}} - \frac{L}{v_{all}} = L\left(\frac{1}{v_{aria}} - \frac{1}{v_{all}}\right)$$

da cui si ottiene, risolvendo rispetto a L

$$L = \frac{\Delta t}{\left(\frac{1}{v_{aria}} - \frac{1}{v_{all}}\right)} = \frac{0.120\,s}{\left(\frac{1}{343} - \frac{1}{6420}\right)} = 43,5\,m$$