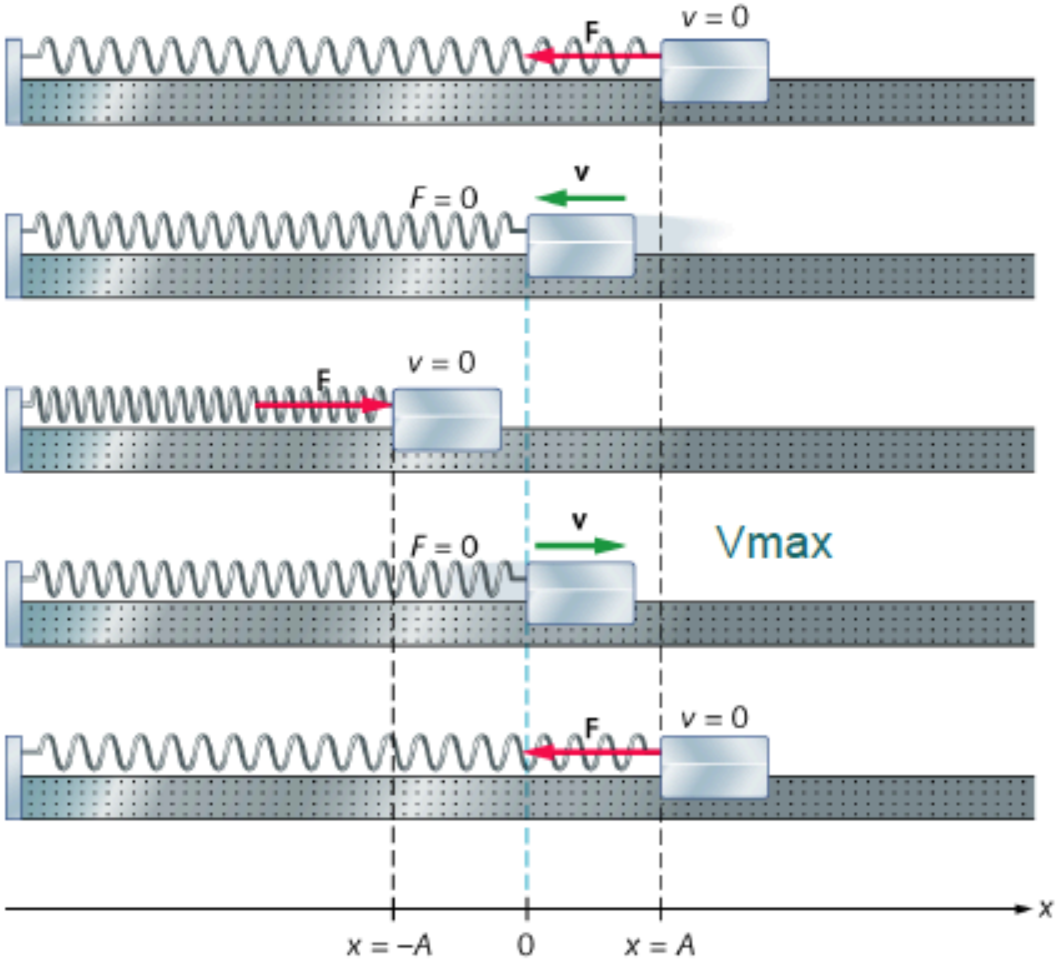
Moti oscillatori

Le oscillazioni periodiche sono osservabili in molti fenomeni fisici, in cui la forza applicata non è costante

- Oscillazioni meccaniche
- Vibrazioni molecolari
- Correnti elettriche
- Onde sonore
- Onde e.m.

Nonostante la natura dei sistemi sia differente, i moti oscillatori rispondono alle relazioni matematiche del moto armonico semplice

Oscillatore armonico semplice



Vmax

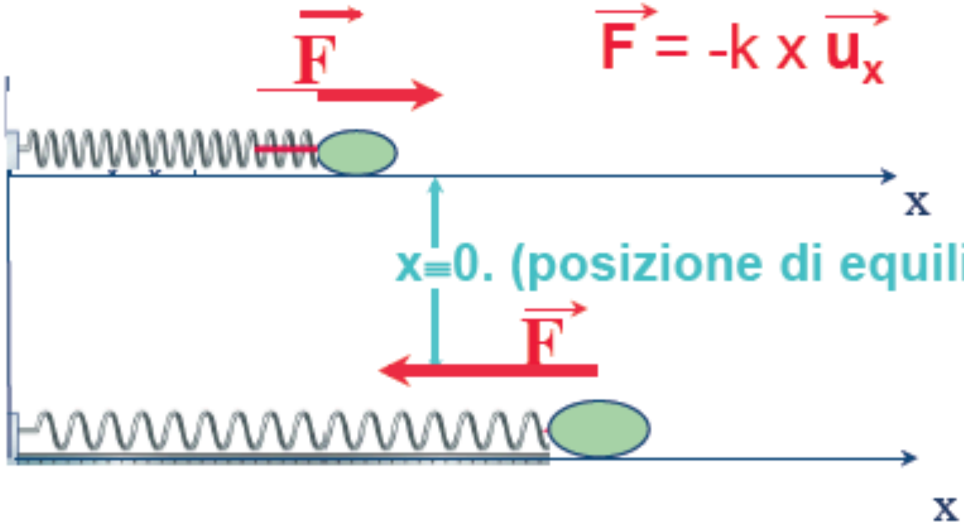
Una molla esercita sul corpo una forza di richiamo, proporzionale allo spostamento dalla posizione di equilibrio

v. Legge di Hooke

Relazione con la forza elastica

Moto di un punto materiale di massa m sotto l'azione di una forza elastica

$\vec{F} = -k\,x\,\vec{u}_x$



$x < 0$
$F_x = -k\,x > 0$

$x > 0$
$F_x = -k\,x < 0$

Legge di Newton: $\vec{F} = m\,\vec{a}$

$$-kx(t) = m\,a_x \Rightarrow \boxed{a_x = -\omega^2 x(t)} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

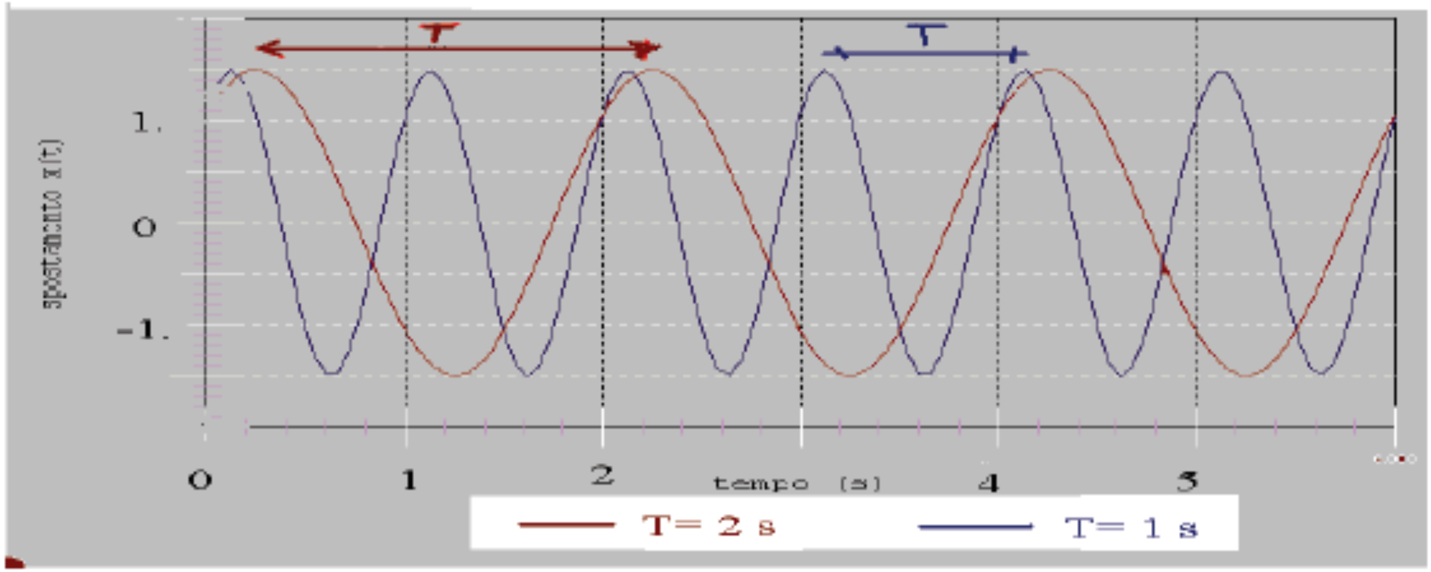
Moto armonico semplice

Equazione del moto: $a_x = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$

soluzione: $\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \phi)}$

T periodo, ω pulsazione

A ampiezza, ωt fase (in rad) e φ fase iniziale



Con fase iniziale $\phi = 0$

spostamento

$$\boxed{x = A \sin \omega t}$$

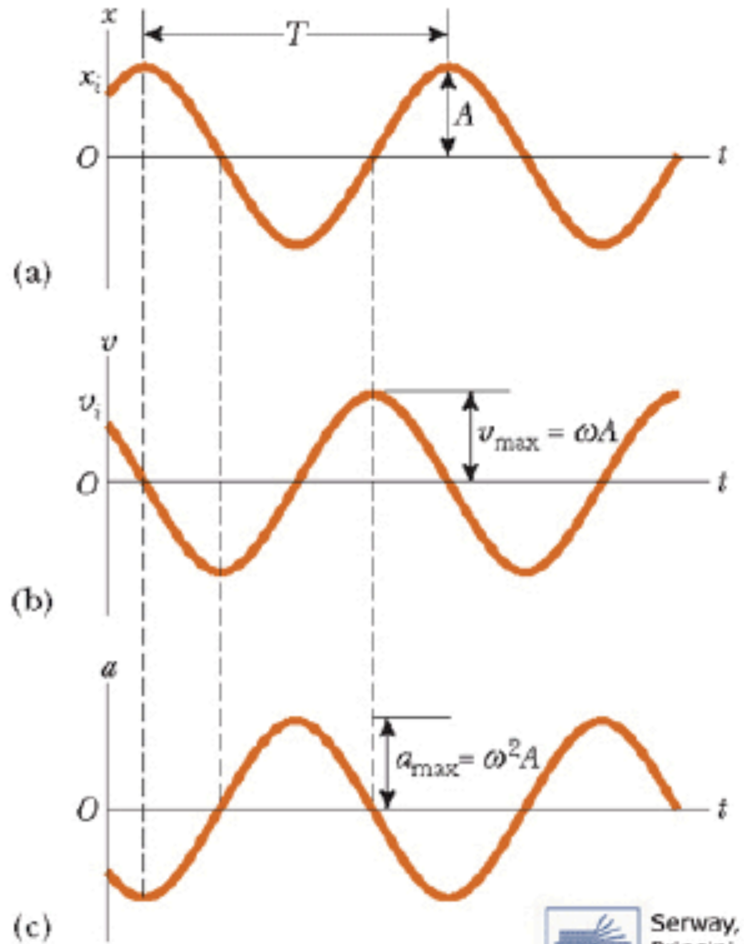
velocità

$$v(t) \equiv \frac{dx(t)}{dt} = A\omega\cos(\omega t)$$

accelerazione

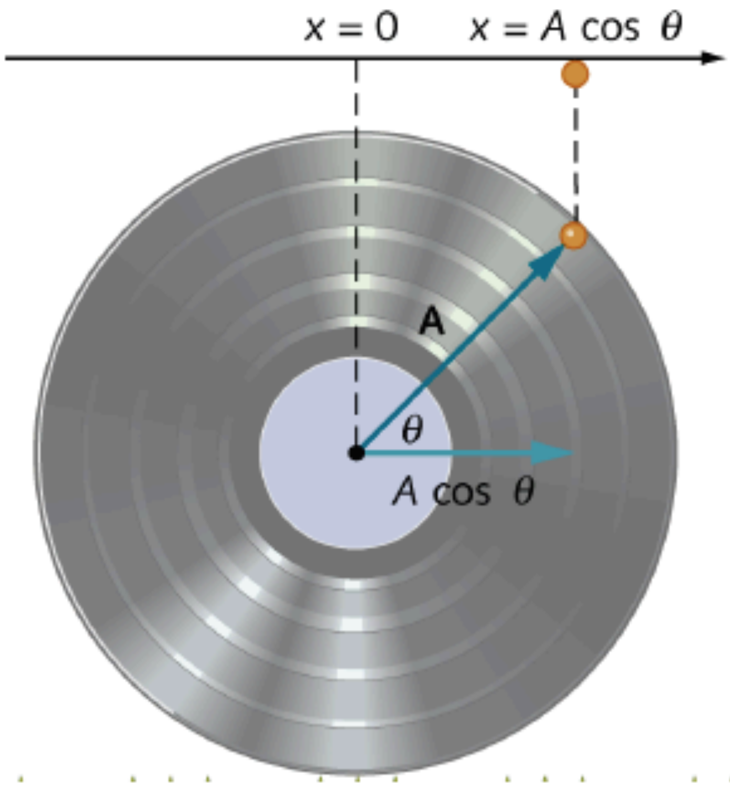
non costante

$$a(t) \equiv \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$



Serway, Jewett
Principi di Fisica, IV Ed.
EdiSES

Relazione con moto circolare uniforme



Il disco (e ogni suo punto) ruota con moto circolare uniforme e velocità angolare ω

La proiezione del moto di ogni punto sulla retta indicata (o su ogni segmento diametro) segue un moto armonico semplice

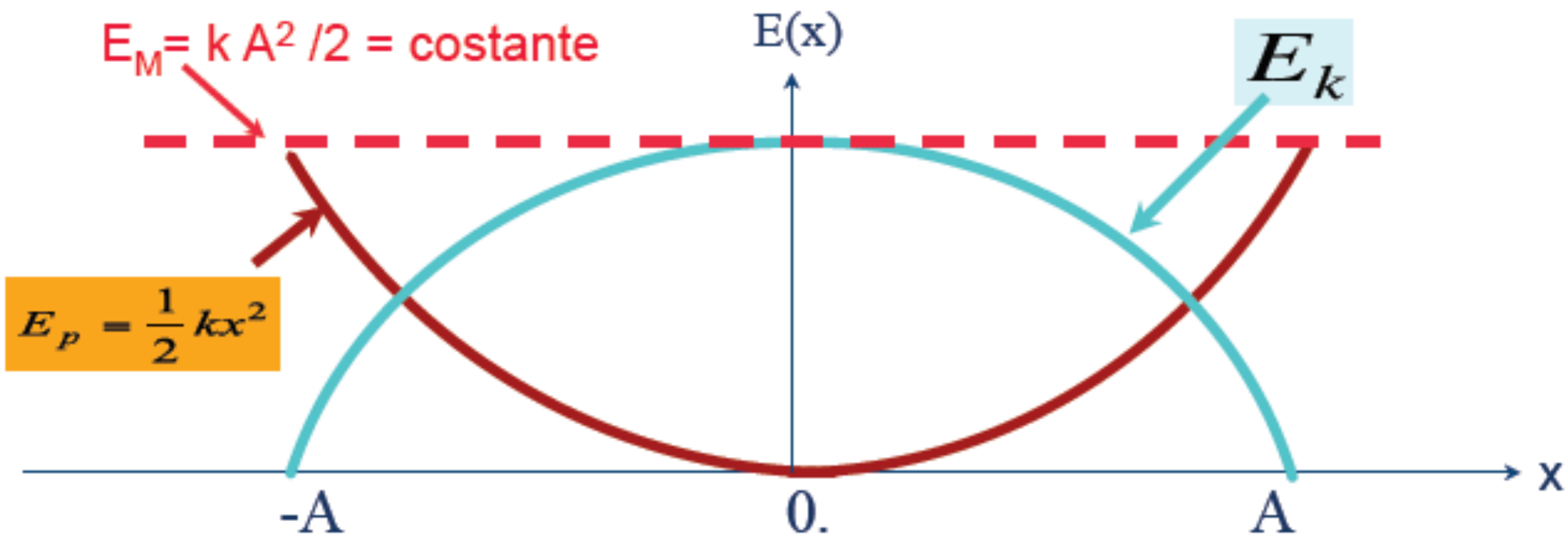
Energia meccanica dell'oscillatore armonico

E cinetica $E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\left[cos(\omega t+\phi)\right]^2$

E potenziale $E_p(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\left[sin(\omega t+\phi)\right]^2$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$E_M = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2\left[cos^2(\omega t+\phi)+sin^2(\omega t+\phi)\right] = \frac{1}{2}kA^2$$



MOTO e OSCILLATORE ARMONICO

- **accelerazione:**

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \,\mathrm{sen}(\omega t+\phi) = -\omega^2 x$$

- **forza elastica:** $F = -k\,x = -m\,\omega^2\,x$ $\qquad m\,\omega^2 = k$

(forza conservativa)

- **energia potenziale:** $\qquad x = A\,\mathrm{sen}(\omega t+\phi)$

$$U = \frac{1}{2}k\,x^2 = \frac{1}{2}m\,\omega^2\,x^2 = \frac{1}{2}mA^2\,\omega^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t+\phi)$$

- **energia cinetica:**

$$T = \frac{1}{2}m\,v^2 = \frac{1}{2}mA^2\,\omega^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

OSCILLATORE ARMONICO

- **oscillazione meccanica:**
  massa m in moto armonico causato da una forza elastica

energia totale:

- $E_t = T + U =$

$$= \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \left[\cos^2(\omega t + \phi) + \text{sen}^2(\omega t + \phi)\right] =$$

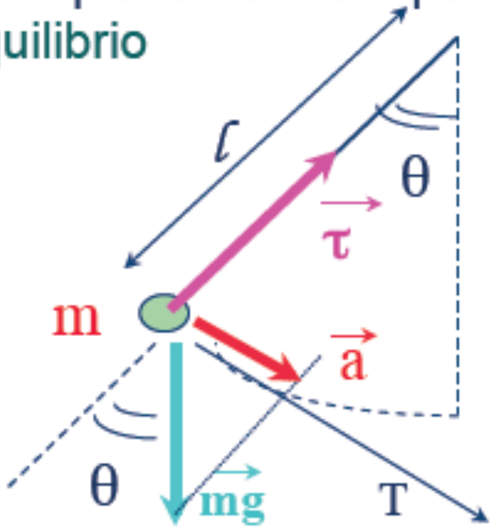
$$= \frac{1}{2} mA^2 \omega^2$$

$$\boxed{E_t \propto A^2}$$

risultato generalizzabile a tutti i fenomeni ondulatori

Il pendolo semplice

In un piano verticale per piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio



$$m\vec{a} = \vec{F}^{tot} = m\vec{g} + \vec{\tau}$$

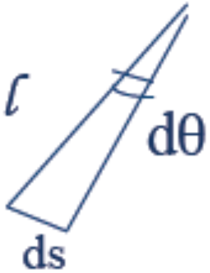
Proiezione in direzione tangente T:

$$ma_T = mg \sin\theta$$

$$m\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = mg\sin\theta(t)$$

$$-ml\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = mg\sin\theta(t)$$

Vale la relazione geometrica: $ds = -\ell\, d\theta$



$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -\ell\frac{d^2\vartheta(t)}{dt^2}$$

Per piccole oscillazioni $\sin\theta \approx \theta$

$$\boxed{\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\omega^2\theta(t)} \quad \text{con: } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Legge oraria del moto del pendolo

Moto di un pendolo semplice per piccole oscillazioni:

$$\boxed{\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\omega^2\theta(t)}$$

⇨ Legge oraria $\boxed{\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)}$

Periodo $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$

indipendente dalla massa m del pendolo:
"isocronismo" del moto
dalla misura di T ⇒ determinazione di g

Moto armonico smorzato

Se un corpo è soggetto ad una forza elastica ed a una forza dissipativa proporzionale alla velocità

$$m\vec{a} = \vec{F}_{el} - \lambda\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - \lambda\frac{dx(t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0}$$

$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsazione propria

coefficiente di **smorzamento** $\gamma \equiv \lambda/2m$

Si hanno tre possibili casi:

$\gamma > \omega_0 \Leftrightarrow$ moto sovrasmorzato

$\gamma = \omega_0 \Leftrightarrow$ smorzamento critico

$\gamma < \omega_0 \Leftrightarrow$ oscillazioni smorzate

Oscillazioni smorzate

In molti sistemi fisici sono presenti forze non conservative che tendono a ridurre l'ampiezza dell'oscillazione e che, tipicamente, sono proporzionali alla velocità:

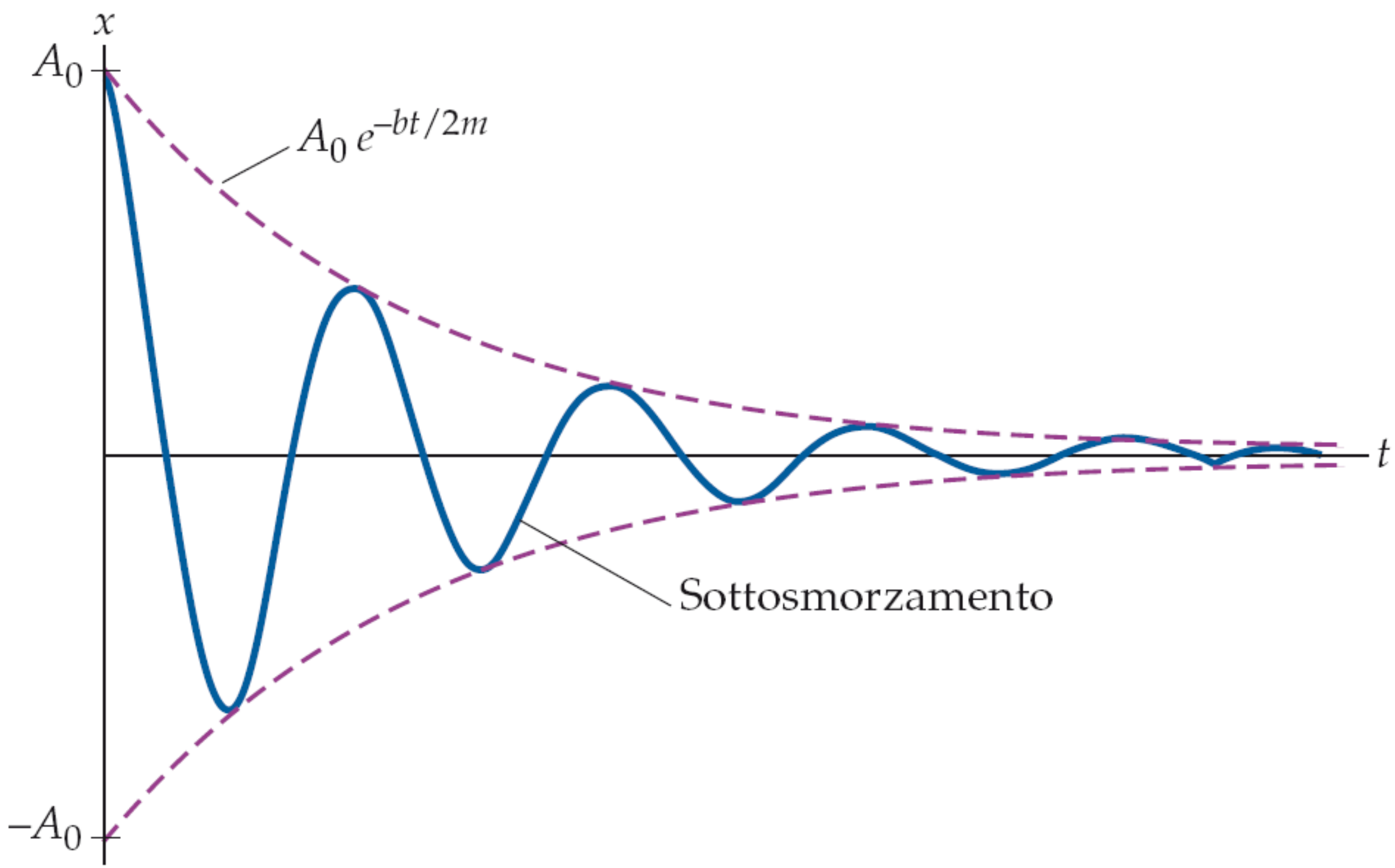
$$\vec{F} = -b\vec{v}$$

A causa loro l'ampiezza diminuisce in modo esponenziale al passare del tempo

$$A = A_0\, e^{-bt/2m}$$

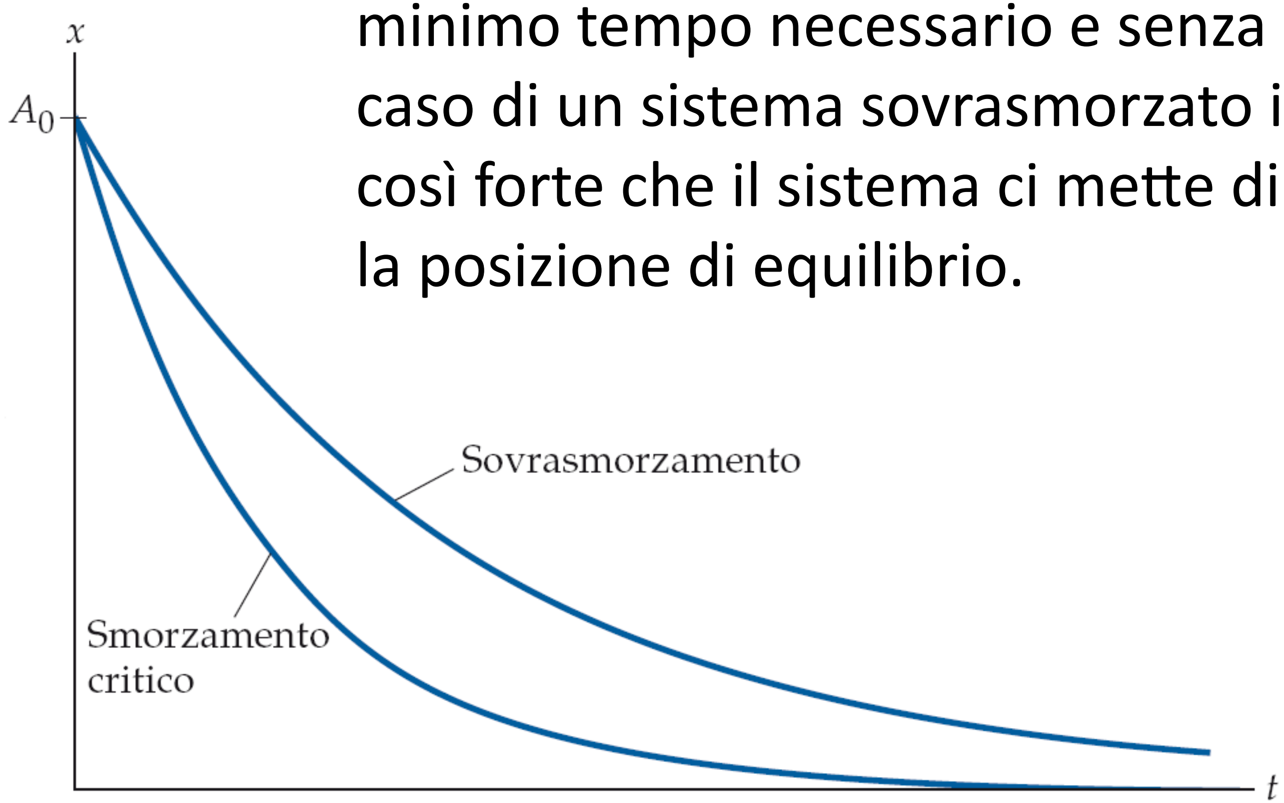
Oscillazioni smorzate

Nella figura è rappresentato lo smorzamento esponenziale.



Oscillazioni smorzate

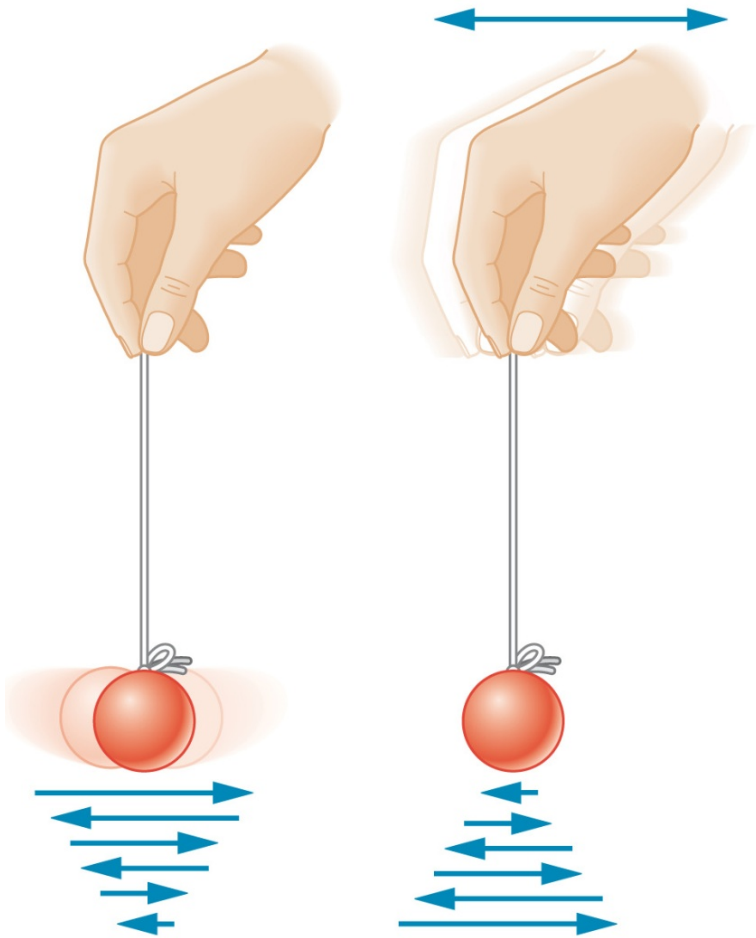
La figura precedente mostra un sistema sottosmorzato, che si ferma solo dopo un certo numero di oscillazioni. In condizioni di smorzamento critico il sistema torna nella posizione di equilibrio nel minimo tempo necessario e senza oltrepassarla. Nel caso di un sistema sovrasmorzato il rallentamento è così forte che il sistema ci mette di più a raggiungere la posizione di equilibrio.



b)

Oscillazioni forzate e risonanza

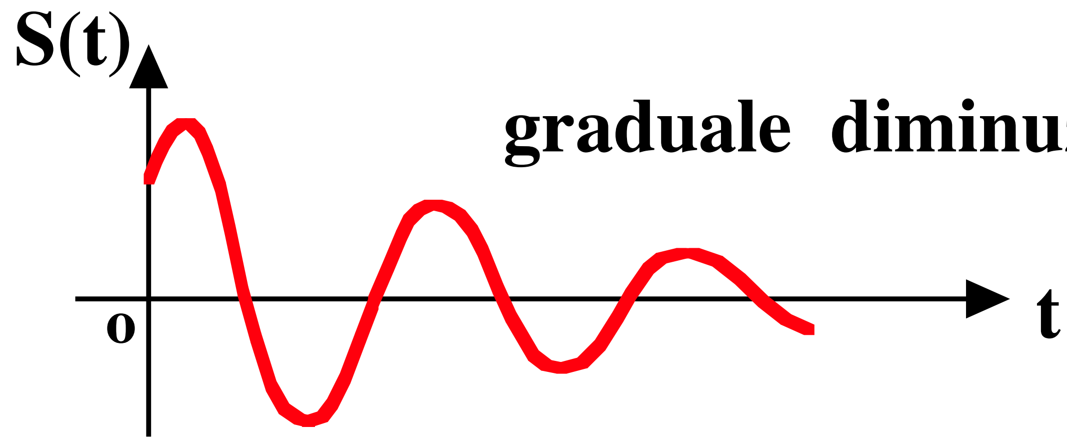
Un'oscillazione può essere amplificata da una forza oscillante esterna la cui frequenza può coincidere o meno con la frequenza naturale del sistema.



OSCILLAZIONI FORZATE e SMORZATE

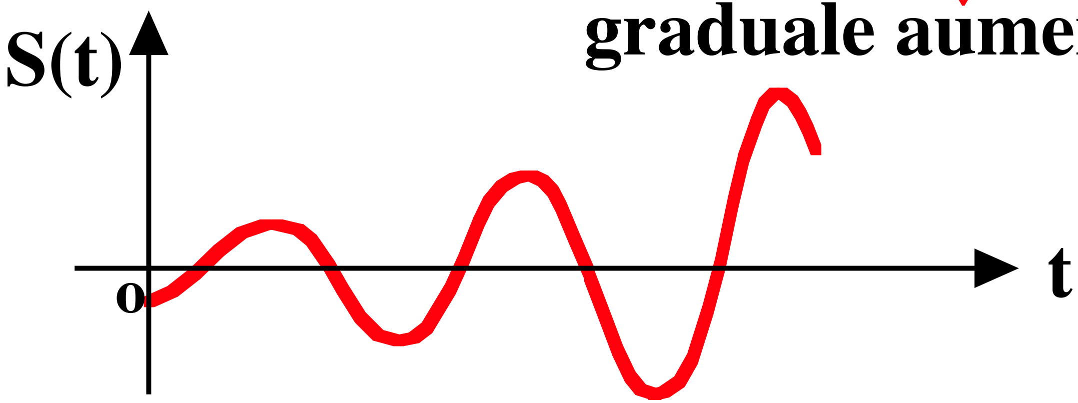
- **forze dissipative (attriti) → energia dissipata**

graduale diminuzione dell'ampiezza A



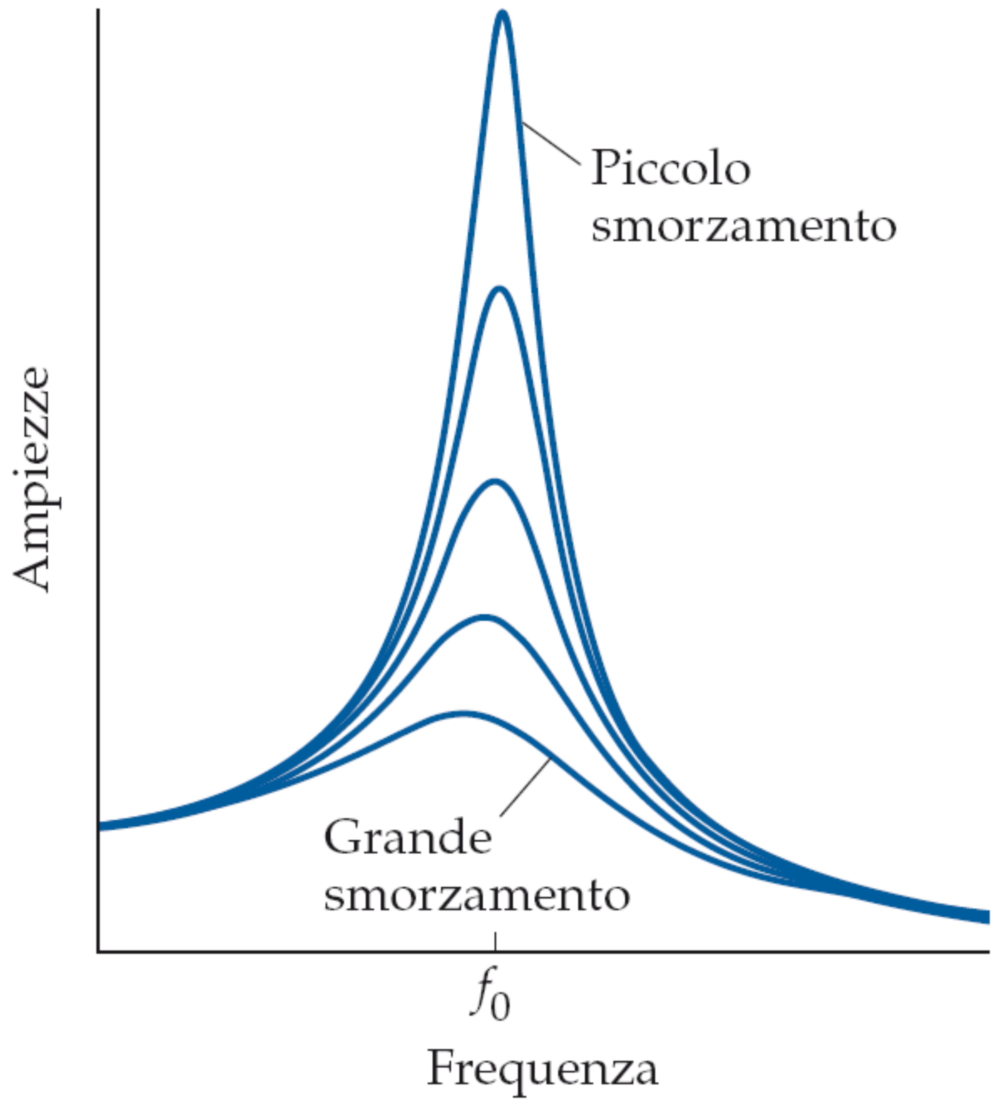
- **energia rifornita al sistema**

graduale aumento dell'ampiezza A



Oscillazioni forzate e risonanza

Se la frequenza con cui si forza il sistema si avvicina alla sua frequenza naturale l'ampiezza dell'oscillazione può aumentare notevolmente, soprattutto se l'oscillazione è piccola. In tal caso si parla di risonanza.



FENOMENO DI RISONANZA

- energia rifornita al sistema

  ↓

  apporto **periodico** di frequenza ν

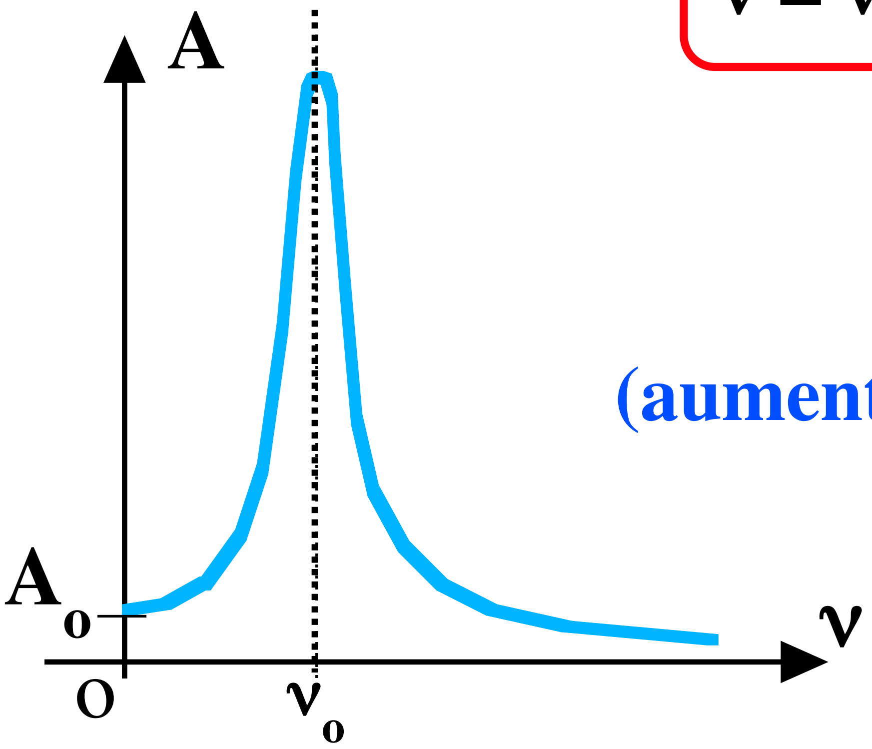
ν_o = frequenza propria del sistema oscillante

$\boxed{\nu = \nu_o}$ → risonanza

↓

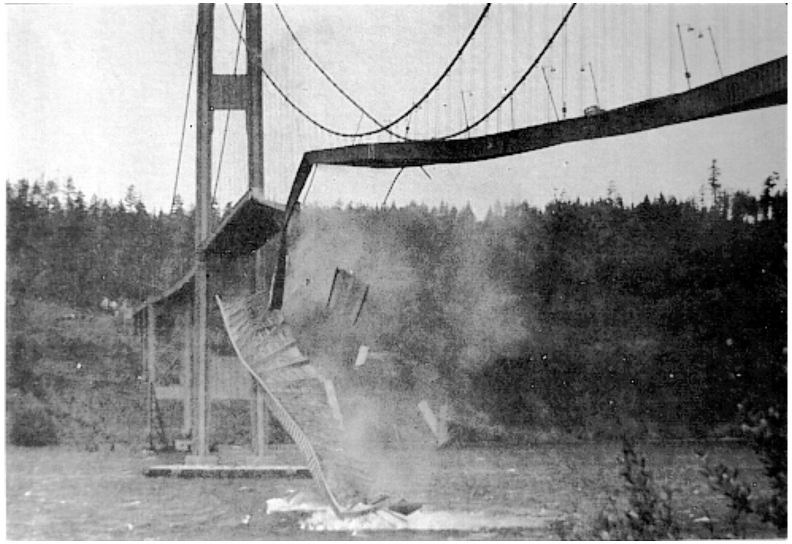
energia totalmente assorbita dal sistema

(aumento consistente dell'ampiezza)



EFFETTI DELLA RISONANZA!!!!

!!! Si vocifera che il tenore Caruso facesse rompere i bicchieri di cristallo



Le ampie oscillazioni del ponte sul fiume Tacoma, dovute a raffiche di vento, ne hanno provocato il crollo (7 Novembre 1940).

Il crollo di un’autostrada in California, dovuto al terremoto del 1989, provocato in parte dalla risonanza.

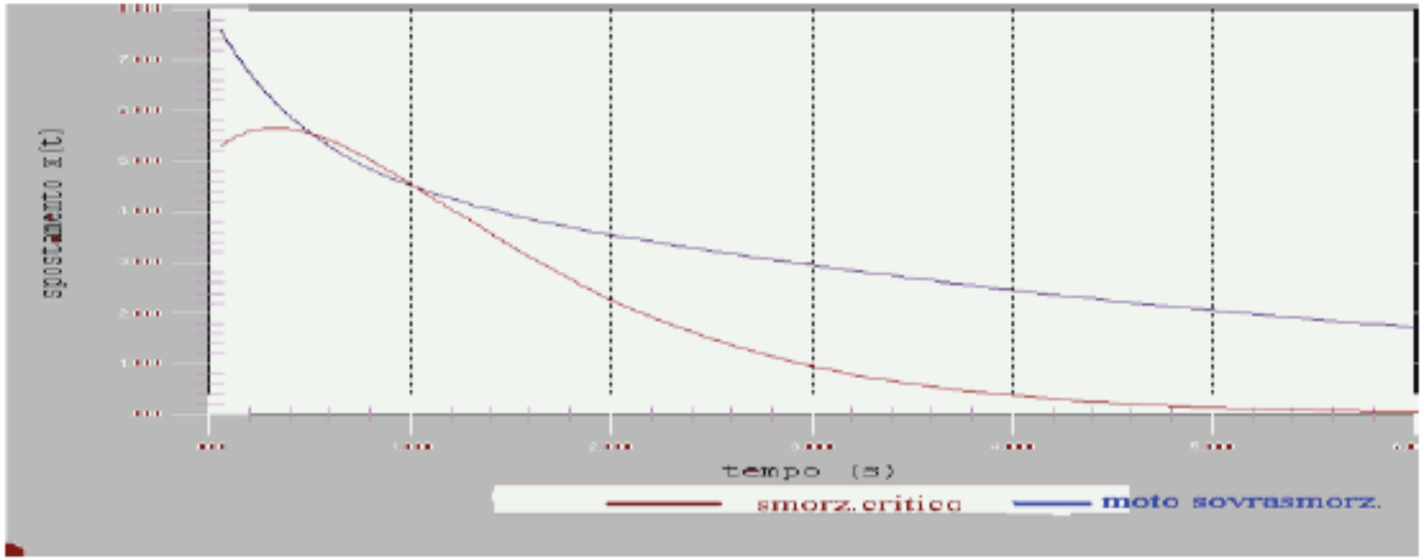
Leggi orarie del moto smorzato .1

moto sovrasmorzato

$$x(t) = Ae^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + Be^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

moto con smorzamento critico

$$x(t) = e^{-\gamma t}(At + B)$$



E meccanica si trasforma in E interna del sistema o del mezzo

Leggi orarie del moto smorzato .2

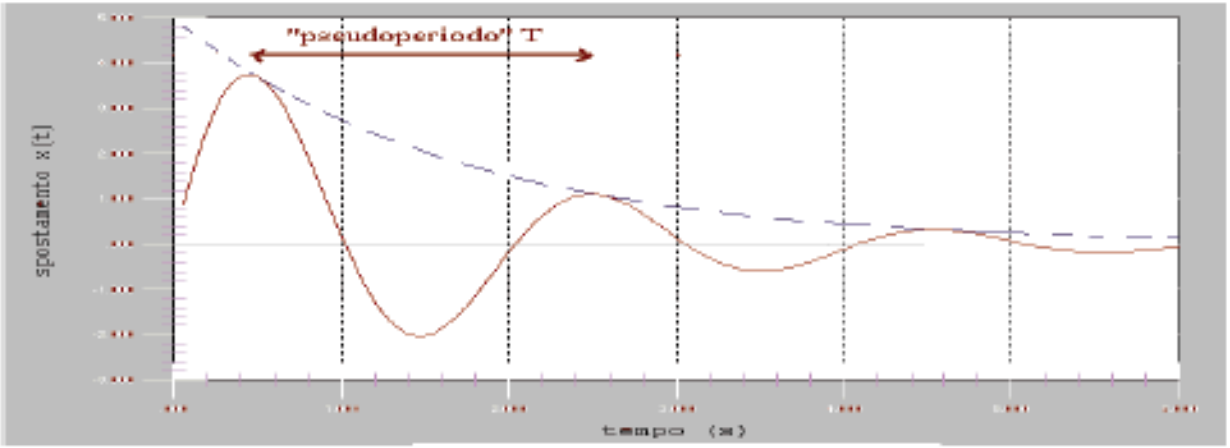
$$\boxed{x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \phi)}$$

Oscillazioni smorzate

Pseudoperiodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$

Esempio: $\omega_0 = 3.14 s^{-1}, T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2s$

$$\gamma = 0.6 s^{-1} \cong \omega_0/5, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cong 0.97\omega_0, T = \frac{2\pi}{\omega} \cong 1.03 T_0$$



Oscillatore armonico forzato

Su di esso agisce una forza aggiuntiva nota F(t) : $\boxed{F(t) = F_0 \sin \omega t}$

$$m\vec{a} = \vec{F}_{el} - \lambda\vec{v} + \vec{F}(t)$$
$$= -kx\vec{u}_x - \lambda\vec{v} + F_0 \sin \omega t \vec{u}_x$$

$$\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m} \sin \omega t}$$

dove: $\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \gamma \equiv \frac{\lambda}{2m}$

Soluzione generale:

$$x(t) \equiv \underline{Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t}} + x_p(t)$$

soluzione generale dell'eq.omogenea associata:
moto smorzato x_{om} (t) $\rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty$

soluzione particolare dell'eq.**non omogenea:**
soluzione "di regime" x (t) → x_p(t) t → ∞

Soluzioni per oscillatore forzato

Soluzione particolare dell'eq. per un **moto armonico forzato** da una forza $F(t) = F_0 \sin \omega t$

$$\boxed{x_p(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))}$$

pulsazione forzante

ampiezza e **sfasamento** **dipendenti da** ω

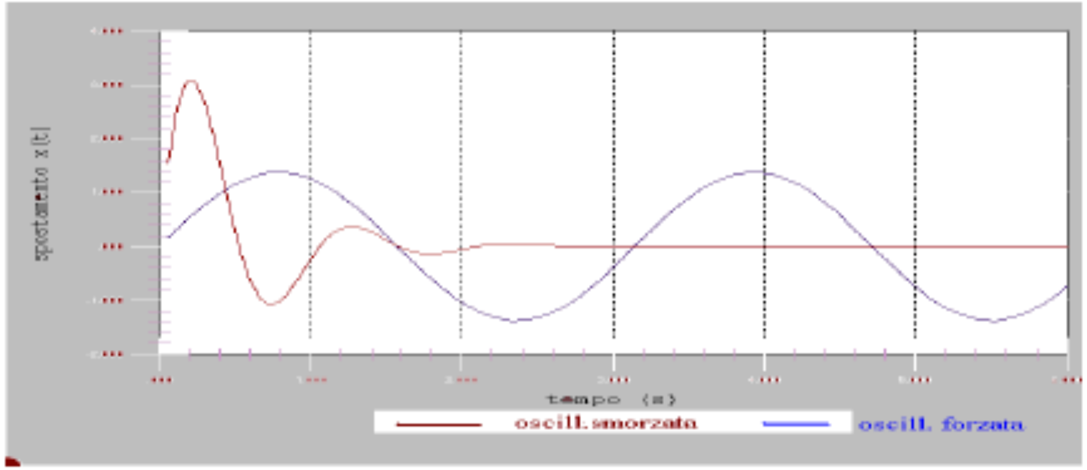
$$\boxed{A(\omega) = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}}$$

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arctan\left[\frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right]}$$

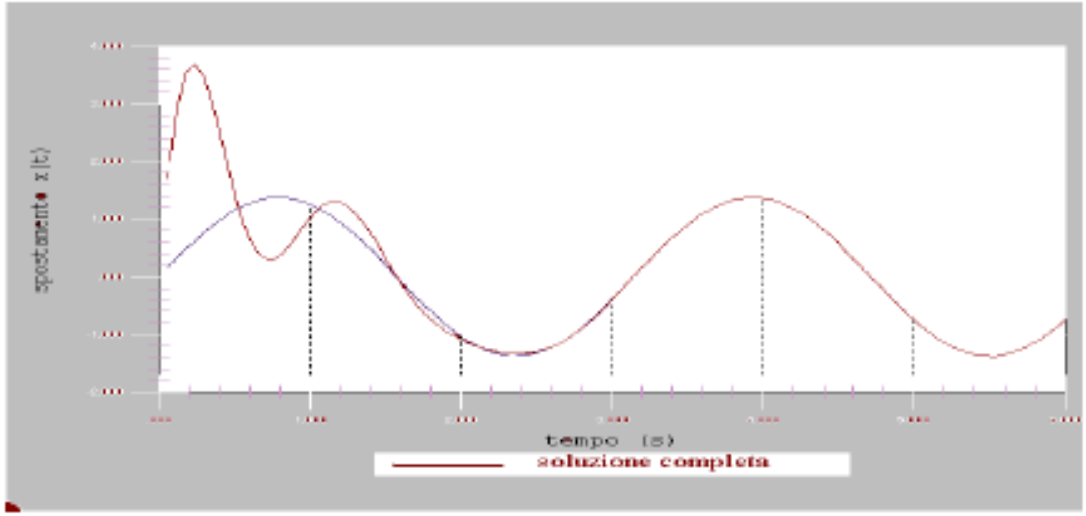
Moto di oscillatore forzato

$x_{om}(t)$

$x_p(t)$



$x(t) =$
$x_{om}(t) + x_p(t)$



Fenomeni di risonanza

$$A(\omega) = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$\omega_0 = 300 rad / s$

$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi}$

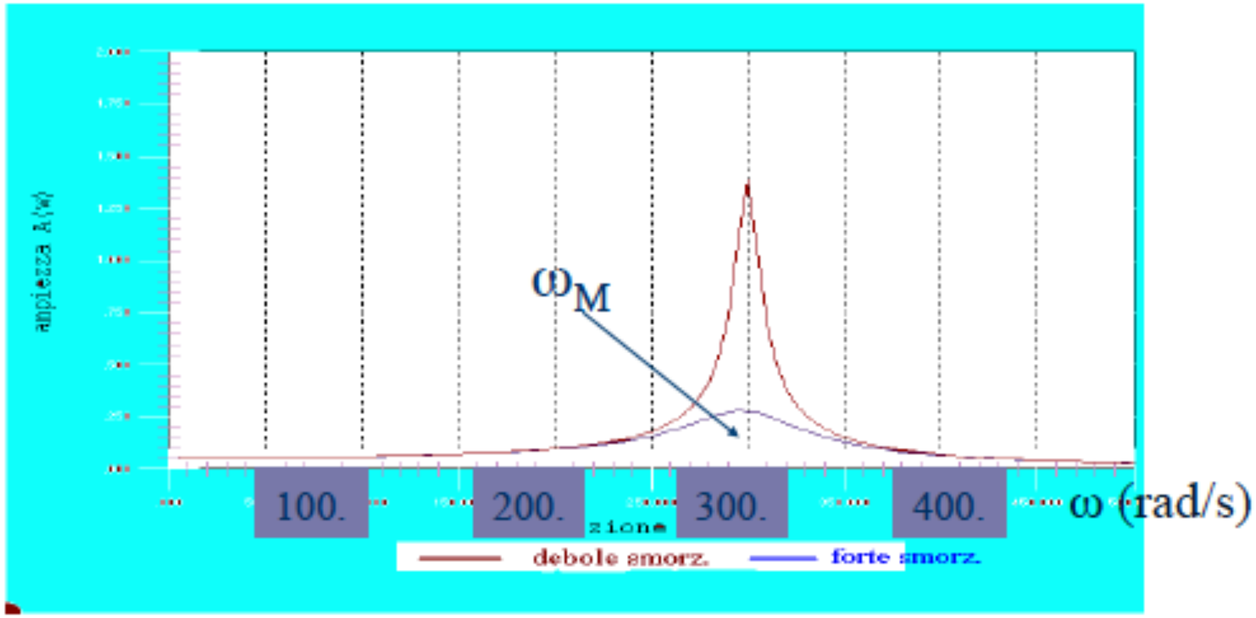
$\approx 100 Hz$

$\gamma = 30 s^{-1}$

$\approx \omega_0 / 10$

$\gamma = 6 s^{-1}$

$\approx \omega_0 / 50$



Massimo della ampiezza di oscillazione: $\omega_M = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$

Potenza trasferita all'oscillatore

$\boxed{< P >= m\gamma\omega^2 A^2(\omega)}$ dalla sorgente F esterna

La potenza media massima trasferita si ha in risonanza

per $\omega = \omega_0$ e vale: $< P >_{MAX} = m\gamma\omega_0^2 A^2(\omega_0) = \dfrac{F_0^2}{4m\gamma}$

...sino a causare la rottura di un corpo se forzato con una frequenza pari alla frequenza di oscillazione naturale (es. sisma)

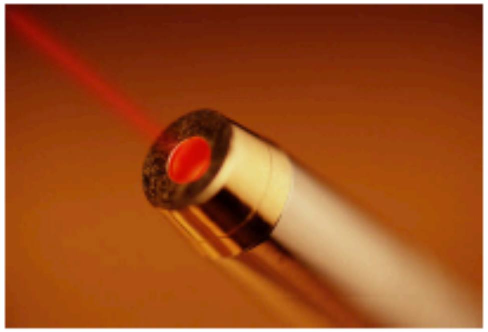
➔ Evitare coincidenza con frequenze risonanti

➔ Adottare strutture smorzate (γ)

Moto oscillatorio

Onde meccaniche, termiche, sonore, e.m.

Grandezze caratteristiche
Velocità di propagazione
Proprietà delle onde
Fenomeni ondulatori



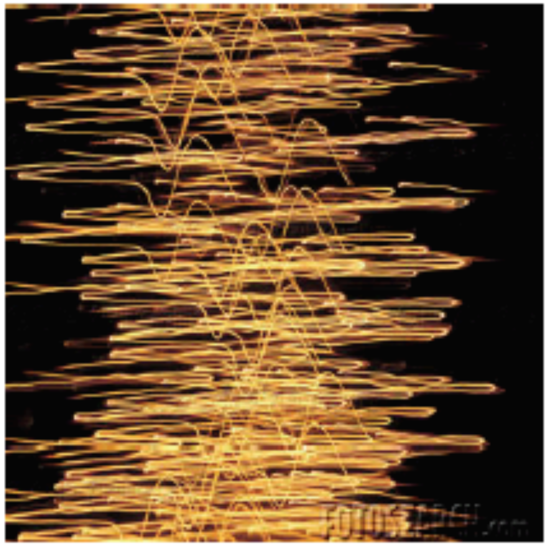
Onda

Perturbazione periodica o impulsiva dello stato di equilibrio di un corpo o del campo di una grandezza fisica

E' provocata da una variazione di una grandezza fisica generata da una sorgente e si propaga in un mezzo - anche vuoto – con data velocità

MEZZO

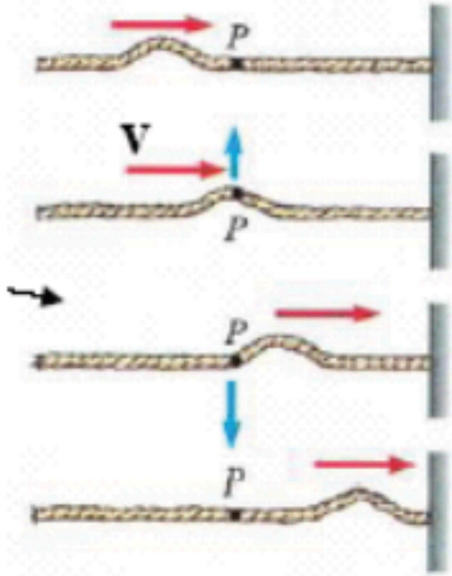
Corpo sorgente



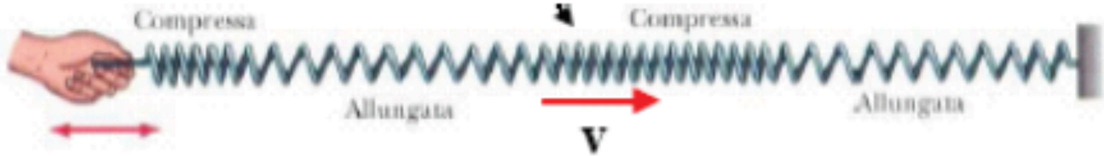
con trasporto di energia e quantità di moto, ma senza trasporto di materia -> può diventare informazione

Tipi di onde in solidi

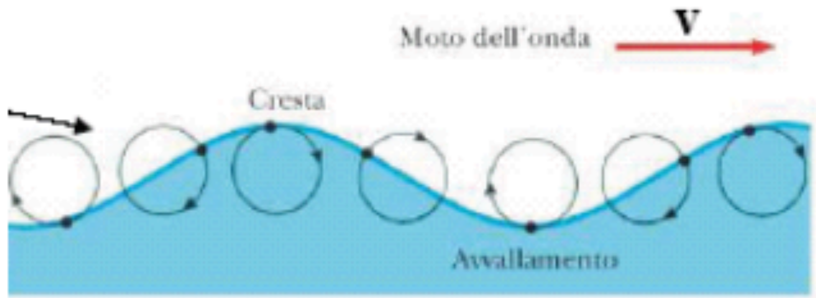
Onde trasversali: l'oscillazione (o la perturbazione) è in direzione perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda (il movimento del punto *P* è verticale mentre l'onda viaggia in orizzontale)



Onde longitudinali: l'oscillazione è nella stessa direzione della direzione di propagazione dell'onda (il movimento è orizzontale come la velocità)



Onde miste: combinazione di moti trasversali e longitudinali.
Es. nelle onde sulla superficie dell'acqua le particelle hanno un movimento quasi circolare.



Onde in gas e vuoto

In gas : le forze di attrazione tra le molecole sono molto più deboli di quelle che legano le molecole di un solido, e lo stesso vale per le forze di superficie in un liquido.

in un gas le forze trasversali (tecnicamente il modulo di taglio) sono troppo piccole
Di conseguenza, in un gas esistono solo le onde longitudinali, o di compressione

In vuoto : non vi sono particelle materiali che propaghino energia mediante onde meccaniche

Possono propagarsi le onde elettromagnetiche (es. luce, microonde, onde radio)
Sono *trasversali* perché le grandezze che oscillano, il campo elettrico e magnetico, oscillano sempre perpendicolarmente alla direzione di propagazione dell'onda.

Propagazione di onda sinusoidale

Onde generate da moti oscillatori armonici

Forma generale con costante *k* (detta numero o vettor d'onda)

A ampiezza massima dell'onda

v velocità di propagazione dell'onda

$$f(x - vt) = \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$$

$$\boxed{y = A \cdot \sin(kx - \omega t)}$$

(kx - ωt) è la fase dell'onda (dimensione di angolo = rad)

La propagazione dell'onda con la sua velocità possono fornite informazioni su:

-**Densità e Elasticità del mezzo**

-**Energia cinetica** trasferita

-**Temperatura** in gas

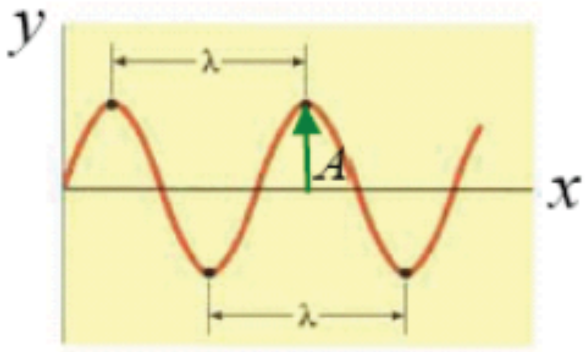
-**Localizzazione** della sorgente o oggetti riflettenti

-**Velocità relativa** di oggetti in movimento

Due Periodicità

Periodicità spaziale: la distanza Δx tra due punti equivalenti dell'onda si definisce *lunghezza d'onda* λ ; corrisponde a una variazione di fase di 2π (a t fissato)

$$k \cdot \Delta x = k \cdot \lambda = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

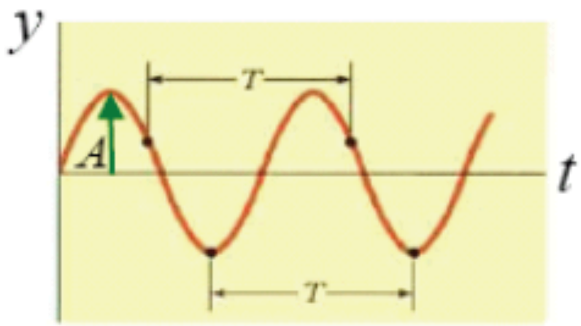


a t fissato

$$y = A \cdot \sin(kx + \varphi)$$

Periodicità temporale: la distanza Δt tra due punti equivalenti dell'onda è il *periodo T* ; corrisponde ad una variazione di fase di un angolo giro (a x fissato)

$$\omega \cdot \Delta t = \omega \cdot T = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi / \omega$$



a x fissato

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Frequenza dell'oscillazione f o $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$

$$\boxed{\text{Segue che } v = \lambda f}$$

Esempi moto ondulatorio

Un impulso ondulatorio su una corda percorre una distanza di 10 m in 0.05 s. Qual è la velocità dell'impulso? Qual è la frequenza di un'onda periodica sulla stessa corda se la lunghezza d'onda è di 0.8 m?

$$v = x / t = 10 \text{ m} / 0.05 \text{ s} = 200 \text{ m/s}$$

$$f = v / \lambda = 200 \text{ m/s} / 0.8 \text{ m} = 250 \text{ Hz}$$

Un'onda sonora associata con la voce umana ha una frequenza di 500 Hz mentre la frequenza della luce gialla è $5\ 10^{14}$ Hz. In aria a 20°C i suoni viaggiano a 344 m/s e la luce a $3\ 10^{8}$ m/s. Si determinino le lunghezze d'onda nei due casi.

$$\lambda_s = v / f = 344 \text{ m/s} / 500 \text{ Hz} = 0.688 \text{ m}$$

$$\lambda_1 = v / f = 3\ 10^{8} \text{ m/s} / 5\ 10^{14} \text{ Hz} = 6\ 10^{-7} \text{ m} = 600 \text{ nm}$$

Velocità di propagazione

In gas e vapori: le molecole sono sostanzialmente libere di muoversi, dipendendo dalla pressione P

γ rapporto fra calore specifico a P costante / a V costante

ρ densità

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}}$$

In liquidi : i legami molecolari sono blandi, le molecole si muovono con scorrimento in piani paralleli, con eventuale attrito da viscosità

Sono molto più rigidi dei gas. Es. Acqua è diecimila volte meno comprimibile dell'aria, il che risulta in un *modulo di compressione* circa 10000 volte superiore

K modulo di compressione **$\propto$ ΔP / ΔV**

$$\boxed{v_{\mathrm{long}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}}}$$

Onde *di superficie* hanno peculiarità:

•si sviluppano in una condizione di ridotta simmetria: F e ρ molto diverse.

•La velocità non dipende solo dalle caratteristiche dei due mezzi, ma anche da caratteristiche delle onde, tipicamente dalla lunghezza d'onda.

Velocità onde nei solidi

in regime elastico lo sforzo è direttamente proporzionale alla deformazione:

•di **compressione** è la stessa dei fluidi: una diminuzione di volume provocata da una forza perpendicolare alla superficie su cui agisce.

•di **trazione** è prodotta quando due forze agiscono in versi opposti perpendicolare alla superficie, determina un allungamento del solido.

•di **taglio** è la deformazione prodotta da una coppia di forze applicate tangenzialmente alla superficie, ad esempio, nelle torsioni.

tipo	sforzo[1]	deformazione	modulo
compressione[2]	$P = \frac{F_x}{A_0}$	$\frac{\Delta V}{V_0}$	$K = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V_0}$
trazione	$\frac{F_x}{A_0}$	$\frac{\Delta x}{x_0}$	$Y = \frac{F_x/A_0}{\Delta x/x_0}$
taglio	$\frac{F_y}{A_0}$	$\frac{\Delta y}{x_0}$	$G = \frac{F_y/A_0}{\Delta y/x_0}$

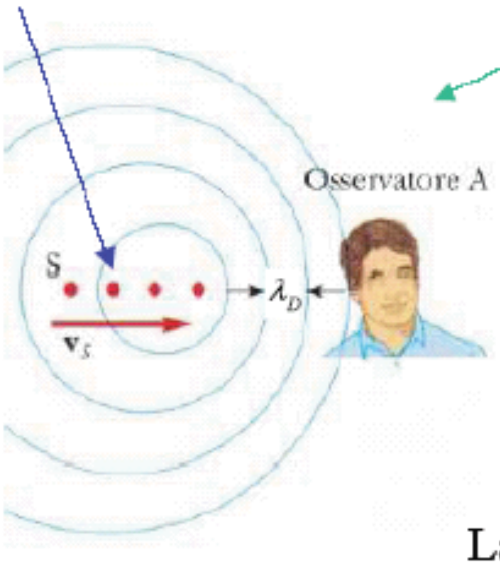
materiale	modulo di elasticità[1] GPa		
	compressione	trazione[2]	taglio
acciaio	160	200	80
vetro	40	65	26
legno	x	13	x

$$v_{\text{trasv}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

onde longitudinali	
barra	blocco
$v_{\text{long}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$	$v_{\text{long}} = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}}$

Effetto Doppler: S in moto

Sorgente ferma emette un'onda sonora di velocità **v** che si propaga nello spazio come onda sferica; le linee sono le creste dell'onda



Sorgente in moto con velocità v_S verso l'osservatore : in un periodo di oscillazione T , i fronti d'onda vengono "schiacciati" perché il massimo successivo si presenta con $\lambda = v_S \cdot T = v_S / \nu$.
La lunghezza d'onda percepita dall'osservatore è quindi diminuita di:

$$\lambda_D = \lambda - \frac{v_S}{\nu} = \lambda - \frac{v_S}{v/\lambda} = \lambda\left(1 - \frac{v_S}{v}\right)$$

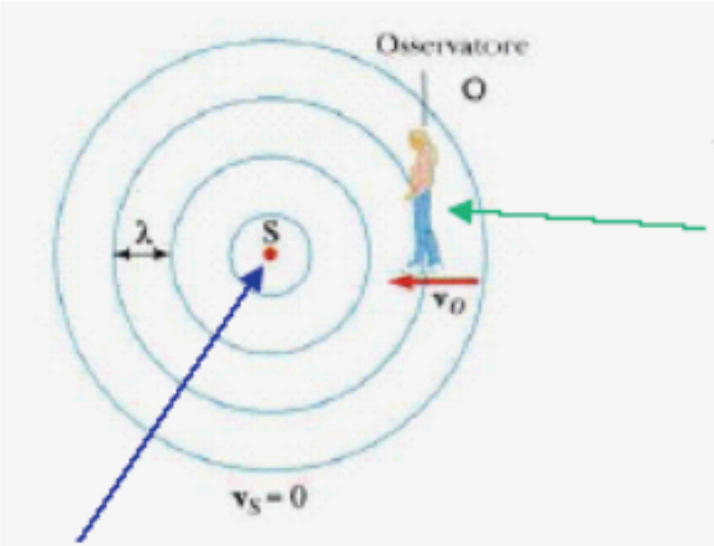
La frequenza percepita sarà quindi aumentata a:

$$\nu_D = \frac{v}{\lambda_D} = \frac{v}{\lambda(1 - v_S/v)} = \nu\left(\frac{v}{v - v_S}\right) > \nu$$

N.B. nei casi opposti in cui vi sia allontanamento, basta cambiare il segno a $\mathbf{v_S}$

Effetto Doppler: O in moto

Moto relativo tra sorgente e osservatore: viene percepita una frequenza di oscillazione dell'onda differente da quella a riposo (fenomeno ben noto per le onde sonore)



Sorgente che emette un'onda sonora di velocità **v** che si propaga nello spazio come onda sferica; le linee sono le creste dell'onda

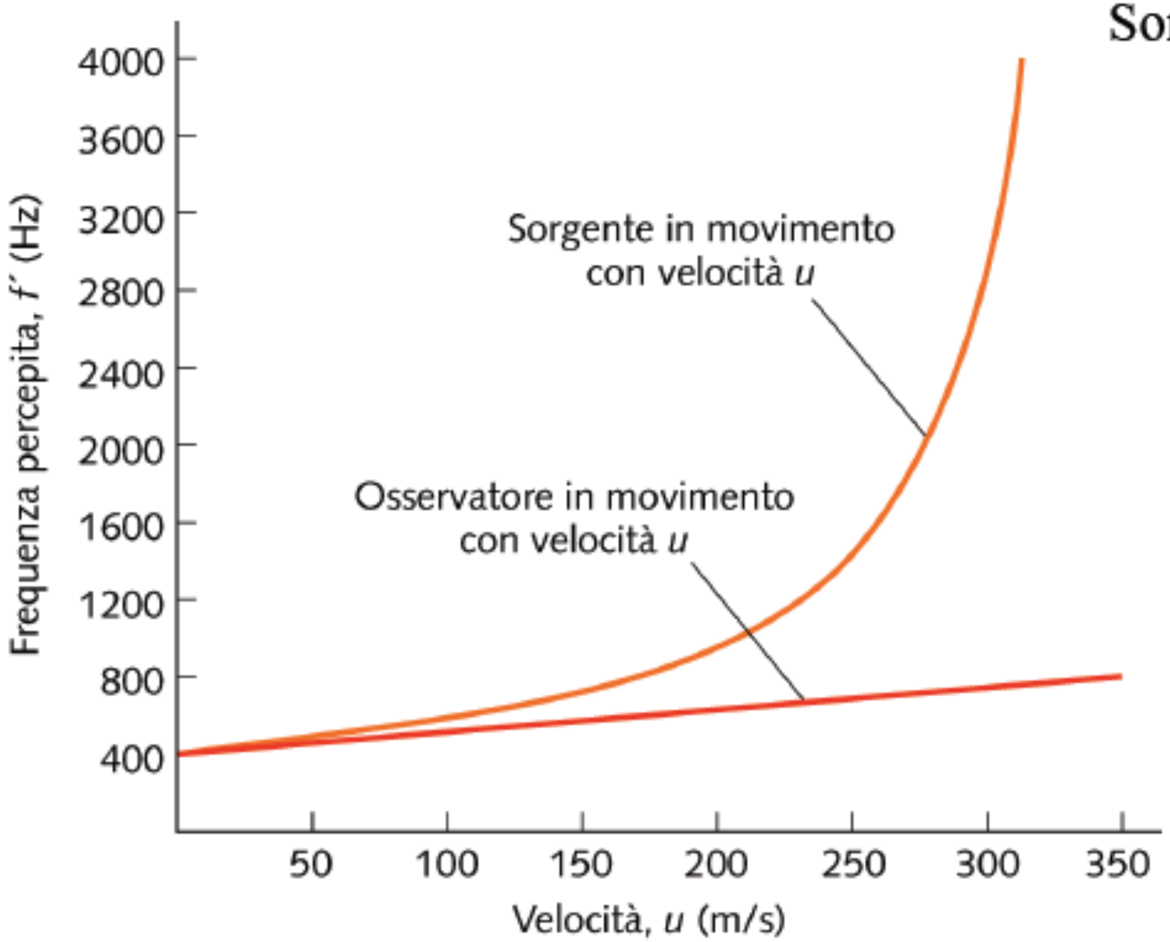
Osservatore fermo: frequenza percepita = numero di vibrazioni per unità di tempo $\nu = v / \lambda$

Osservatore in moto verso la sorgente con velocità $\mathbf{v_O}$: nell'unità di tempo, oltre alle vibrazioni precedenti vengono percepite anche le vibrazioni ricevute avanzando di $\mathbf{v_O}$ ($\cdot$1s) e cioè a frequenza $\mathbf{v_O}$ /λ . La frequenza percepita sarà aumentata:

$$\nu_D = \nu + \frac{v_O}{\lambda} = \nu + \frac{v_O}{v/\nu} = \nu\left(1 + \frac{v_O}{v}\right) > \nu$$

Applicazioni

Sorgente sonora a 400 Hz



Es: misuratore radar di velocità, analisi Doppler di flusso sanguigno con ultrasuoni o luce laser, movimenti galassie

Densità di Energia

Ogni onda produce una deformazione locale del mezzo, con forze di richiamo e propagazione di energia

Il mezzo non è un punto materiale, bensì un corpo continuo, quindi l'energia non è concentrata in un punto preciso, ma distribuita con ***densità di energia***. A differenza dell'energia totale che si conserva, la densità di energia può variare localmente col tempo e può trasferirsi da un punto all'altro del mezzo.

Onde meccaniche: considerando un'onda sinusoidale su un tratto di corda di massa Δm ; ogni elemento della corda esegue un moto armonico, e **l'energia per unità di lunghezza** che viaggia sulla corda è proporzionale ai **quadrati della pulsazione e della ampiezza.**

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2}$$

da Energia totale trasportata dall'onda $E_0 = \frac{1}{2}k_{osc}A^2; \quad k_{osc} = m \cdot \omega^2$

v. dopo per sonore o e.m.

Riass: Parametri di un'onda sinusoidale

Lunghezza d'onda [m] (λ)
Distanza spaziale fra due creste (o gole) successive.

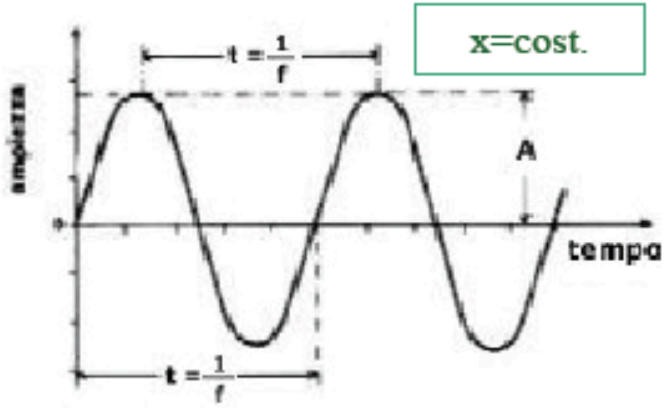
Periodo [s] (T)
Intervallo di tempo fra due identiche configurazioni.

Frequenza [Hz=s^{-1}] (f)
Numero di ripetizioni della medesima configurazione nell'unità di tempo.

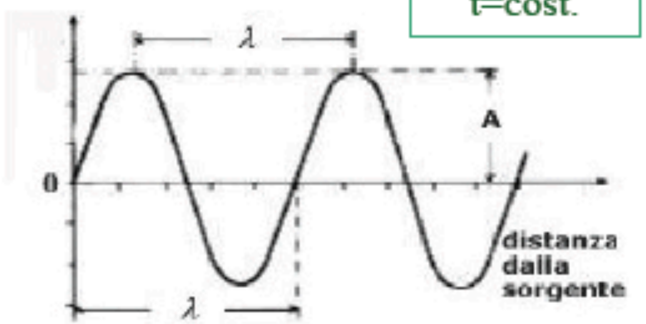
Velocità [m/s] (v)
Velocità di spostamento della superficie d'onda.

Ampiezza (A)
Massimo spostamento dalla posizione di equilibrio, è legata alla quantità di energia trasportata. L'unità di misura dipende dal tipo di onda in esame.

x=cost.

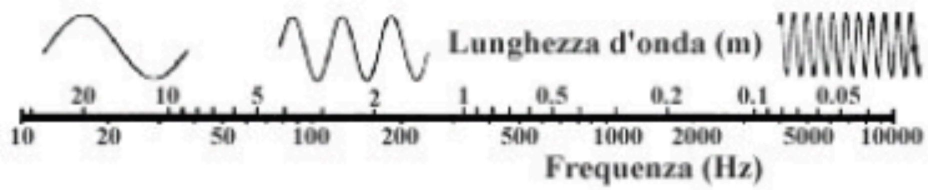


t=cost.



$$T = \frac{1}{f}$$

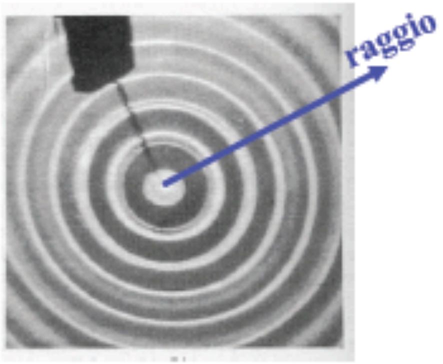
$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$$

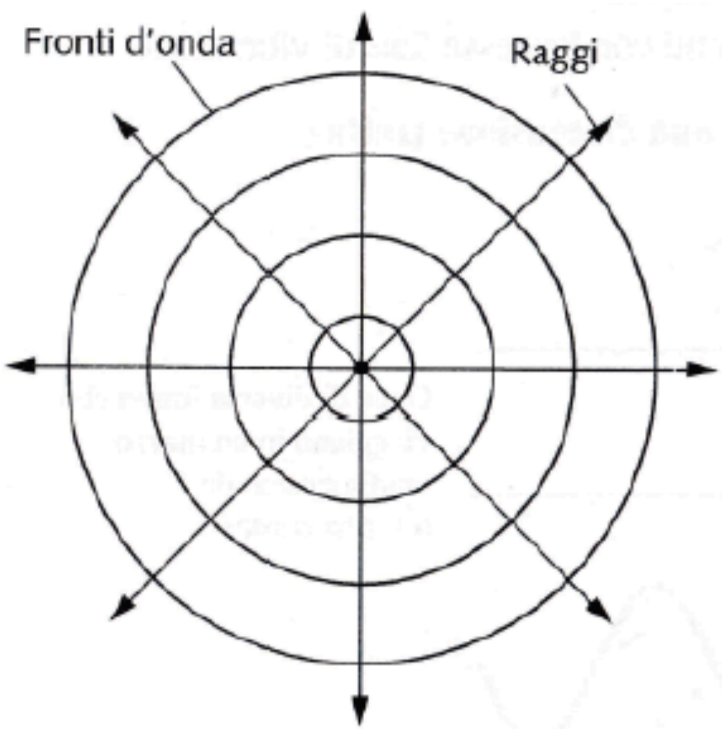


Superfici o fronti d'onda

Punti dello spazio ove vi è - ad un certo istante – **lo stesso stato di perturbazione** del mezzo in cui l'onda si propaga.

Onde circolari





Raggi di propagazione

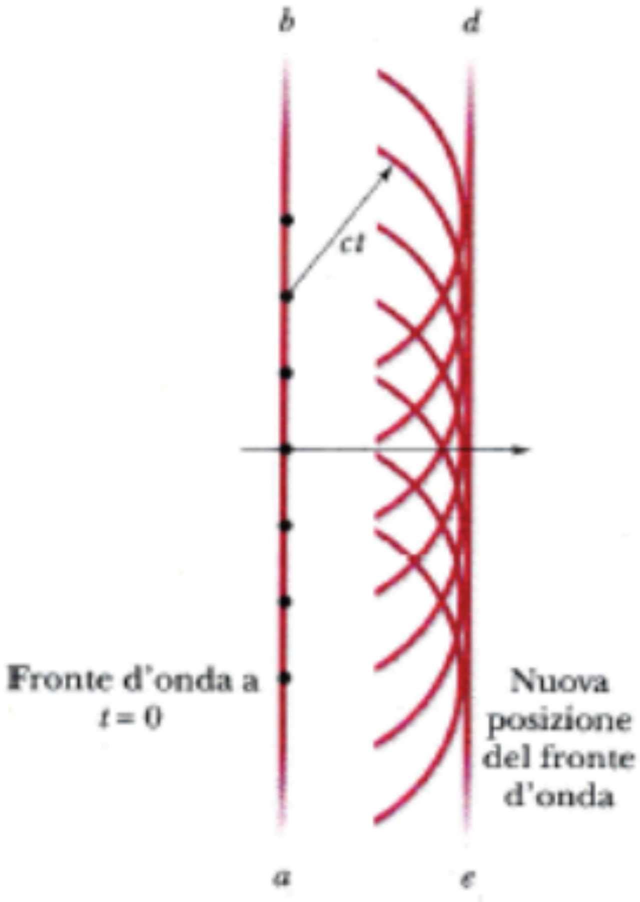
in ogni punto dello spazio, rappresentano la direzione di propagazione, perpendicolare ai fronti d'onda

Principio di Huygens

Il principio di Huygens-Fresnel è una costruzione geometrica che consente di prevedere la propagazione di un fronte d'onda (superficie in ogni punto della quale l'onda è in fase) del quale si conosce la posizione a un dato istante.

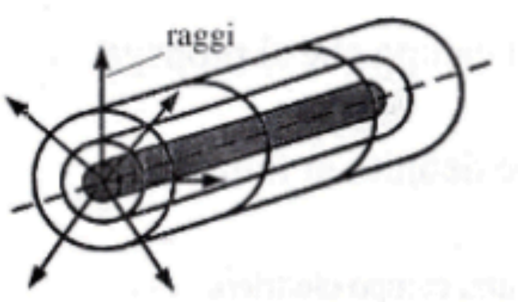
Ogni elemento di un fronte d'onda è sorgente di un'onda sferica secondaria, di ampiezza proporzionale all'ampiezza dell'onda incidente nel punto considerato.

Dopo un tempo *t* la nuova posizione del fronte d'onda sarà la superficie di inviluppo di queste onde secondarie, ovvero la superficie tangente a tutte le onde secondarie.

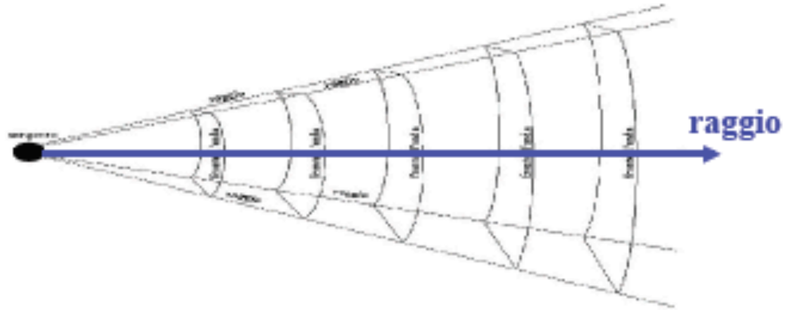


Superfici (fronti) d’onda in 3D

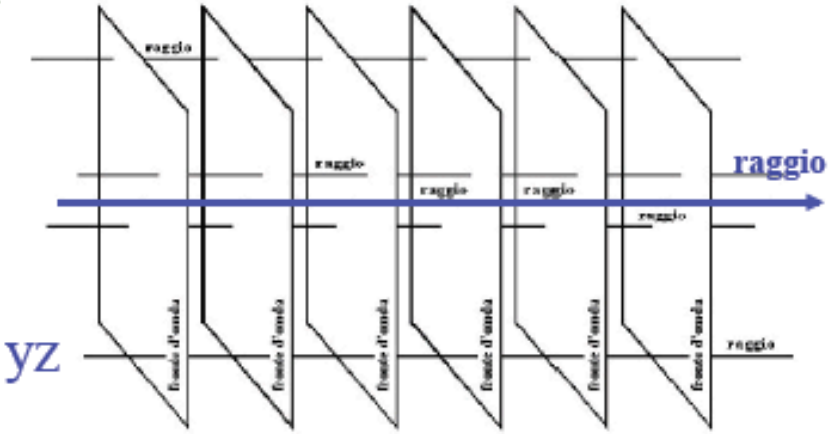
Onde cilindriche



Onde sferiche



Onde piane



Al limite onde sferiche a grande distanza dalla sorgente

$\xi\ (x,t)$ in ogni punto del piano yz

Intensità e assorbimento del mezzo

Intensità di un'onda I [W/m²]

è l'energia trasportata dall'onda che nell'unità di tempo fluisce attraverso una <u>superficie unitaria</u> ortogonale a r.

$$I = \frac{E}{S \cdot \Delta t}$$

In presenza di assorbimento del mezzo con coefficiente di assorbimento α [m^{-1}] l'intensità decade esponenzialmente

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x}$$

onde piane	$\xi = \xi_0 e^{-\alpha x/2} \mathrm{sen}(k x - \omega t)$
onde sferiche	$\xi = \xi_0 \dfrac{e^{-\alpha r/2}}{r} \mathrm{sen}(k r - \omega t)$
onde cilindriche	$\xi = \xi_0 \dfrac{e^{-\alpha r/2}}{\sqrt{r}} \mathrm{sen}(k r - \omega t)$

Fenomeni legati alla propagazione di onde

ONDE

Principio di sovrapposizione →

INTERFERENZA

RIFLESSIONE

RIFRAZIONE

DIFFRAZIONE

Principio di sovrapposizione

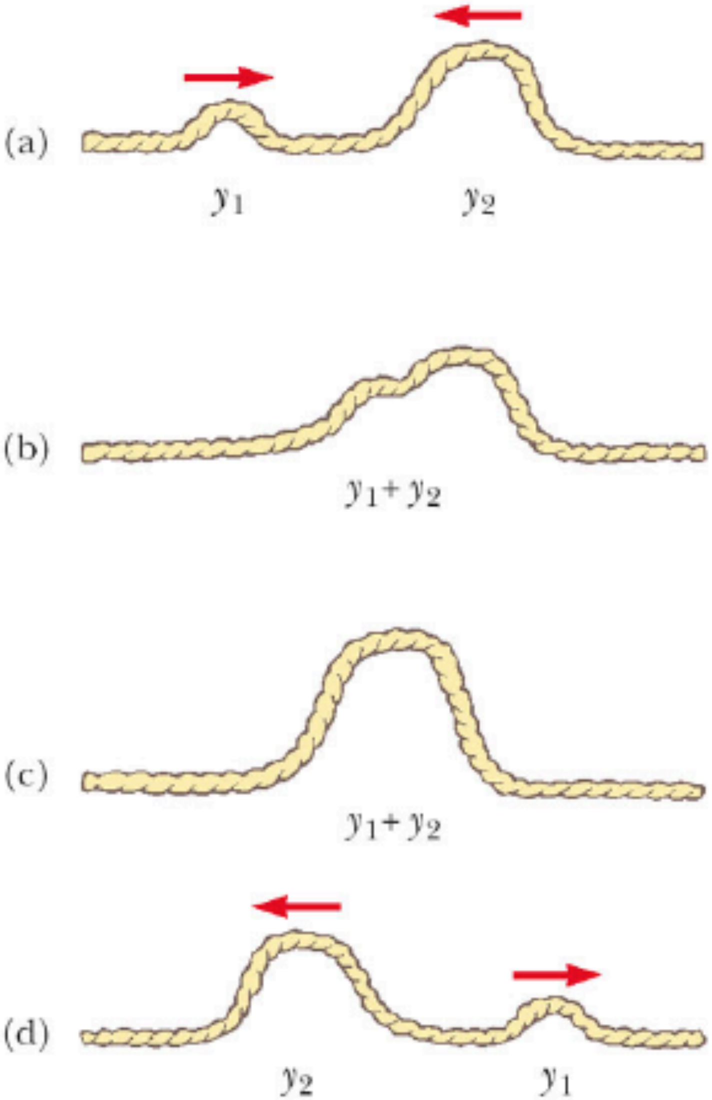
Funzioni d'onda esprimono propagazione rigida, con invarianza della forma d'onda. Dalla linearità dell'eq. di d'Alambert segue che la somma di due soluzioni è ancora soluzione.

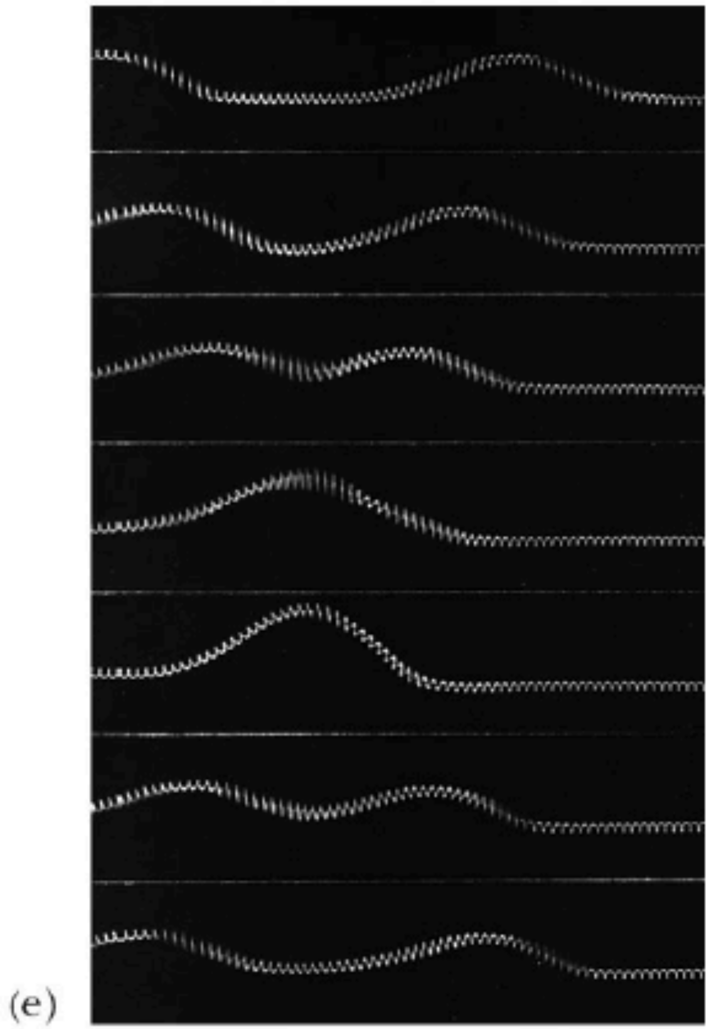
Cosa accade se in un punto ***P*** arrivano 2 onde differenti?

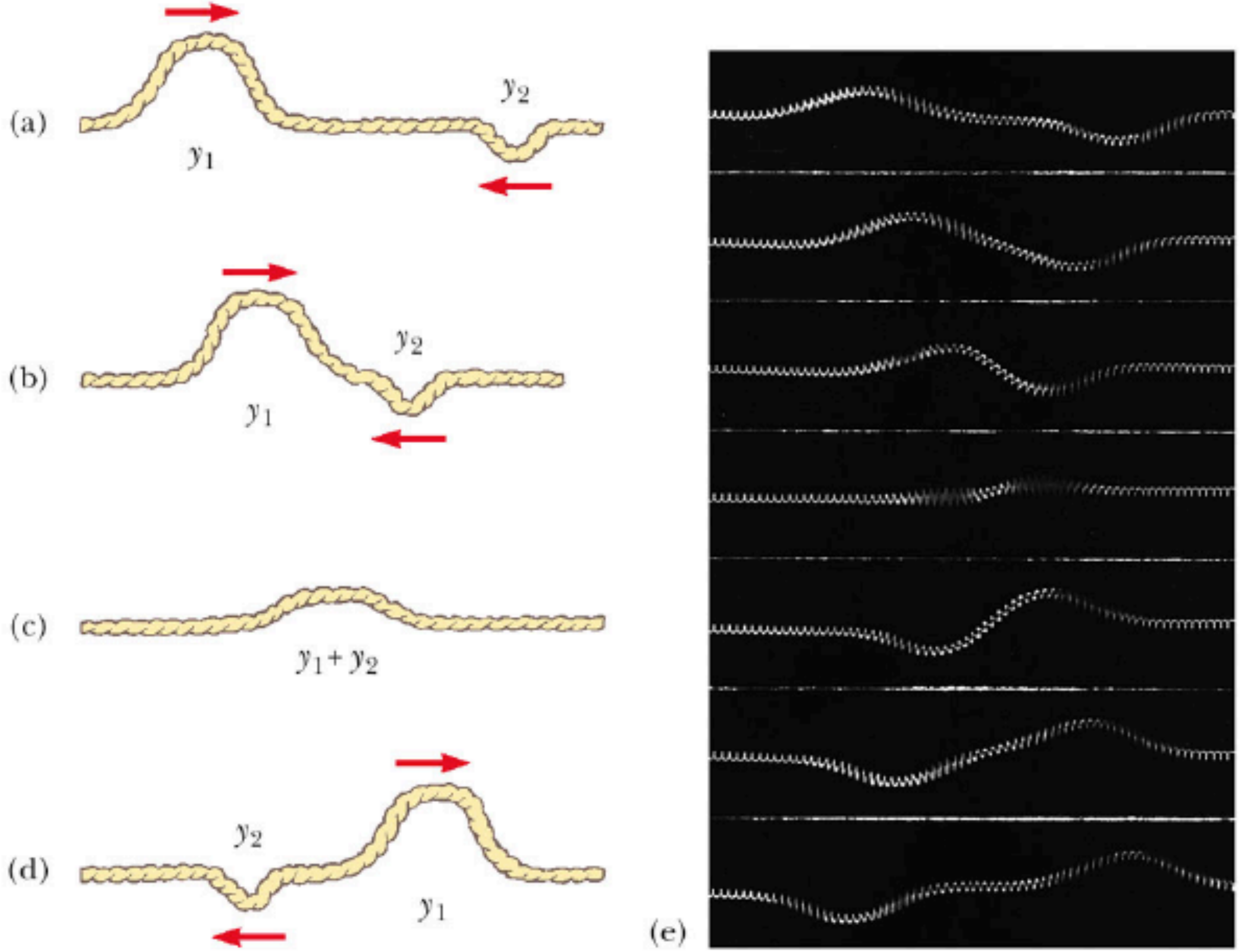
Se due o più onde che si propagano in un mezzo si combinano in un punto, lo spostamento risultante è la *somma algebrica* degli spostamenti delle singole onde

Linearizzare il problema

$$\lambda f_1(\mathbf{r}, t) + \mu f_1(\mathbf{r}, t)$$





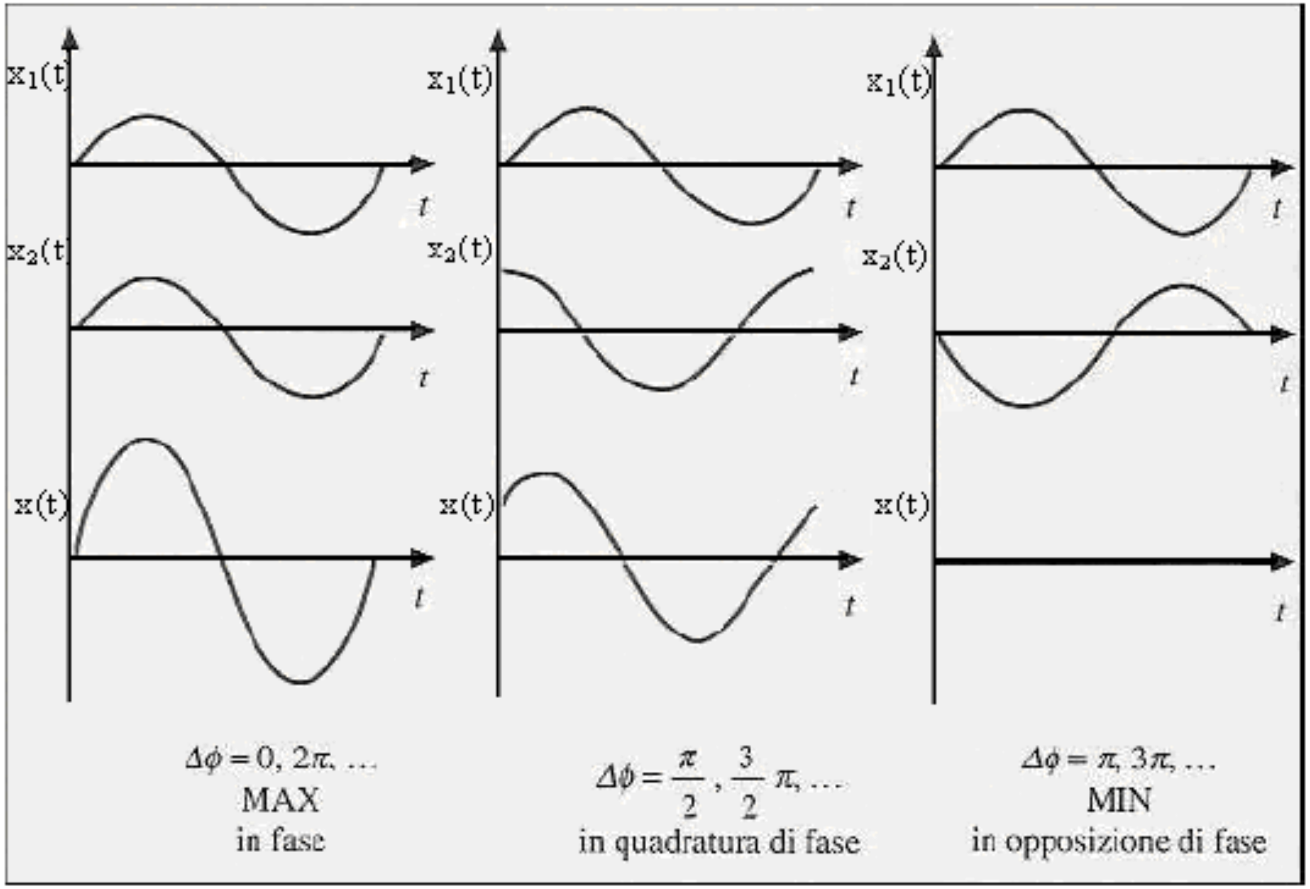


(a)
y_1
y_2
(b)
y_1
y_2
(c)
$y_1 + y_2$
(d)
y_1
y_2
(e)

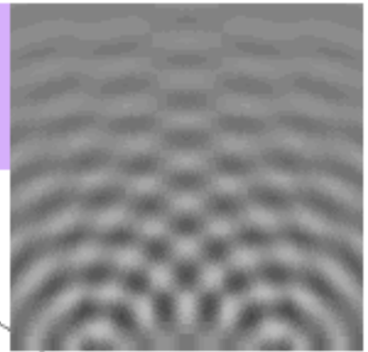
Composizione di moti armonici

I risultati della sovrapposizione di due moti armonici di eguale pulsazione lungo lo stesso asse

Ampiezza somma



Interferenza di onde



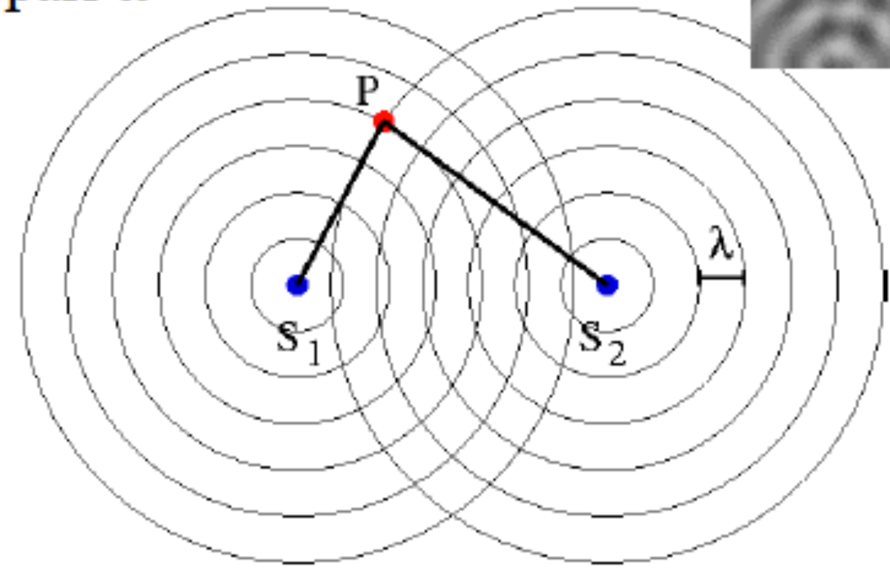
Con sorgenti puntiformi a pari ω

Interferenza distruttiva

$$\left|\overline{S_1P} - \overline{S_2P}\right| = (2k+1)\cdot\frac{\lambda}{2}$$

Interferenza costruttiva

$$\left|\overline{S_1P} - \overline{S_2P}\right| = 2k\cdot\frac{\lambda}{2}$$



In questa condizione:

•nel caso di luce monocromatica si osserva un rinforzo dell'intensità della luce (legata all'ampiezza dell'oscillazione) senza nessuna variazione di "colore" (legato alla frequenza)

•nel caso del suono si sente un rinforzo dell’intensità del suono (legata all'ampiezza dell'oscillazione) senza che sia variata l’altezza (legata alla frequenza).

•nel caso di onde meccaniche la bassa frequenza di oscillazione permette di osservare l'oscillazione con ampiezza rinforzata

Somma di moti armonici a ω simile

Consideriamo la somma di due moti armonici lungo lo *stesso asse* caratterizzati da differente pulsazione :

$$\boxed{x_1(t) = A\ \text{sen}(\omega_1 t)} \qquad \boxed{x_2(t) = A\ \text{sen}(\omega_2 t)}$$

Per semplicità supponiamo che $A_1 = A_2 = A$ e $\phi_1 = \phi_2 = 0$

$$\boxed{x(t) = x_1(t) + x_2(t) = A\,\text{sen}\,\omega_1 t + A\,\text{sen}\,\omega_2 t = 2A\cos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\,\text{sen}\,\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t}$$

Se $\omega_1 \sim \omega_2$, allora

$$\boxed{x(t) = A(t)\text{sen}\,\omega t = 2A\cos\Omega t\,\text{sen}\,\omega t} \qquad \text{con } \Omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$$

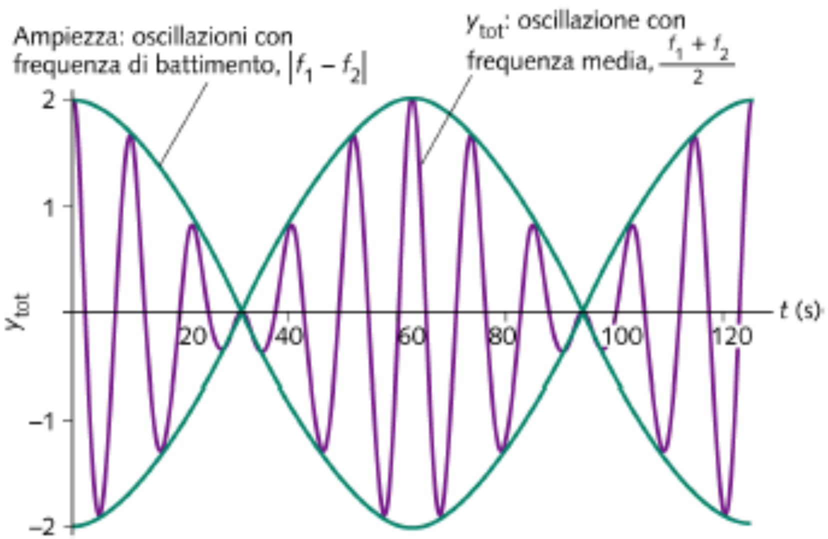
e

$$A(t) = \sqrt{2A^2[1 + (\cos(\omega_1 - \omega_2)t)]}$$

Battimenti

Dalla composizione di due oscillazioni armoniche a pulsazione differente si ha un nuovo moto oscillatorio (non armonico):

$$\boxed{x(t) = A(t)\operatorname{sen}\omega t = 2A\cos\Omega t \operatorname{sen}\omega t}$$



caratterizzato da :

- una nuova pulsazione $\omega = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}$
- un' ampiezza modulata con pulsazione $\Omega = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$

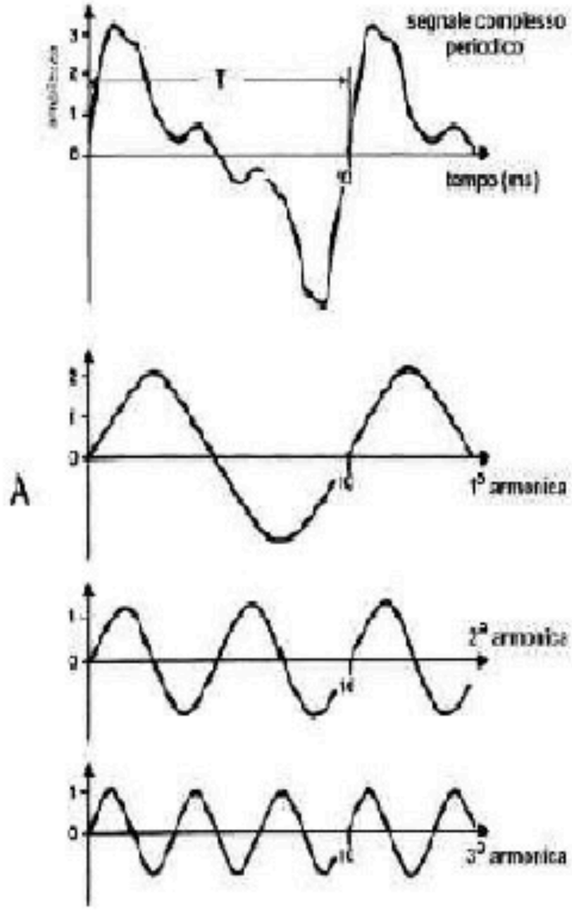
=> *modulazione di ampiezza*, caratteristico fenomeno di *battimento*

Scomposizione: Teorema di Fourier

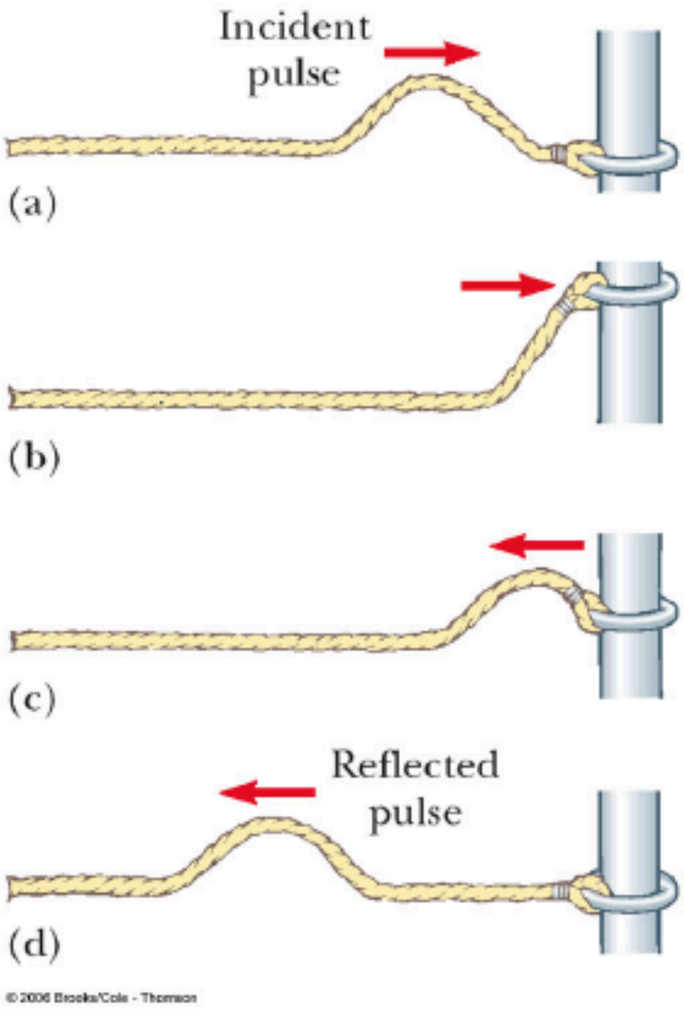
Un'onda "non sinusoidale" è detta complessa: essa può essere periodica, o no. Un'onda (o segnale) complessa può essere considerata come la somma (algebrica) di segnali sinusoidali ciascuno di data frequenza e intensità.

Se l'onda complessa è periodica (con periodo **T**), esso può esser scomposta in un certo numero di onde sinusoidali le cui frequenze sono multipli interi di una frequenza chiamata ***frequenza fondamentale***.

Le onde componenti prendono il nome di ***armoniche***: la ***prima armonica*** è chiamata ***fondamentale*** e la sua frequenza è uguale a **1/T**; la n-esim***a armonica*** ha frequenza **n/T**.



Riflessione di onde



Riflessione della perturbazione propagante nel mezzo quando essa arriva all'estremo del mezzo stesso (in una dimensione)

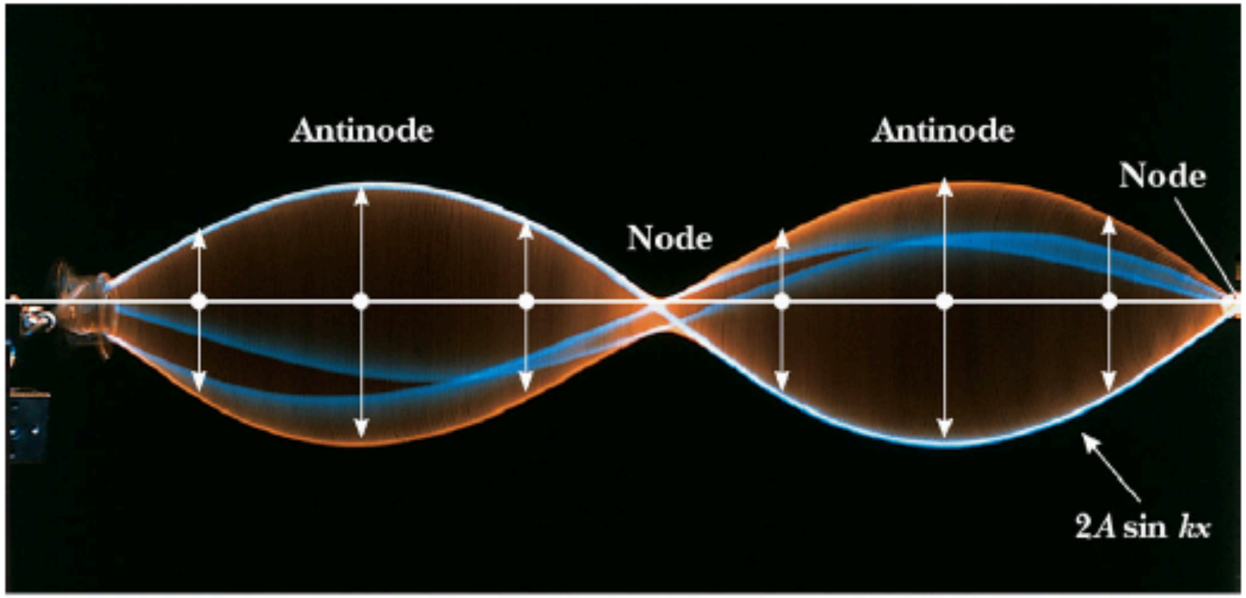
Le modalità di riflessione differiscono:

1. dall'estremo vincolato l'onda viene riflessa con inversione di fase , cioè capovolta

2. dall'estremo libero l'onda viene riflessa senza inversione di fase, cioè invariata

Il caso delle onde Stazionarie

Si verifica es. nel caso di corda con estremi fissi, cavità acustiche, cavità ottiche: onda incidente e riflessa SI SOVRAPPONGONO (stessa ampiezza e frequenza)



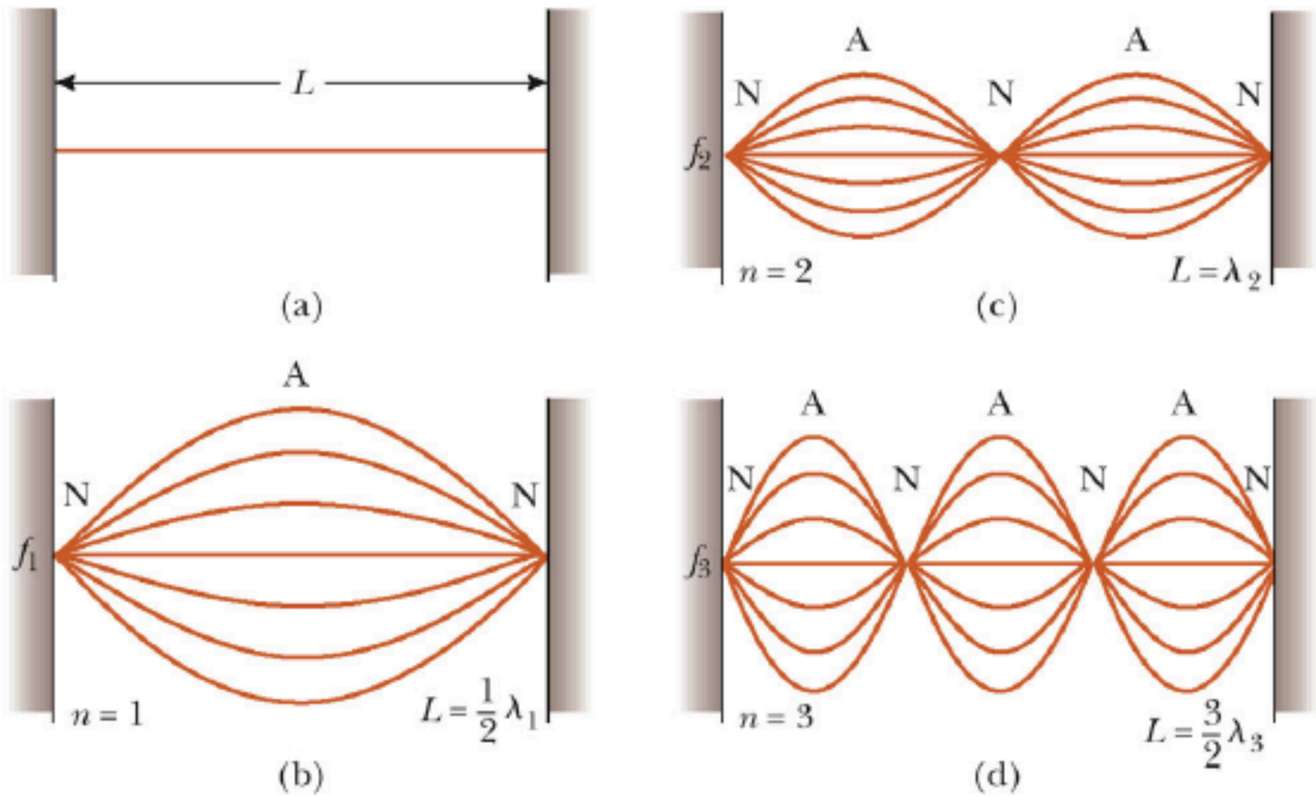
→ SI EVIDENZIANO NODI: punti in cui la perturbazione è nulla

→ GLOBALMENTE L'ONDA NON SI PROPAGA

Modi normali di vibrazione

Se il risuonatore è lungo ***L***, vi sono INFINITI MODI NORMALI di vibrazione, con $\boldsymbol{\lambda}$ fissata (quantizzata)

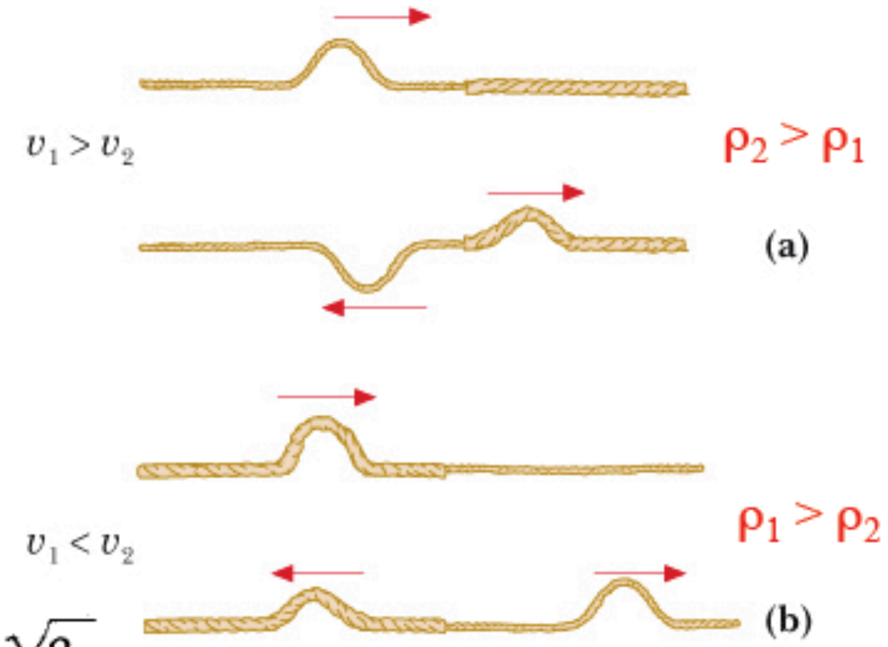
$$\lambda = \frac{2L}{n}$$



n =1 => frequenza fondamentale, ***n > 1***, ARMONICHE

Riflessione e rifrazione per onde elastiche

Avvengono per le onde elastiche all'interfaccia fra due mezzi con differente velocità di propagazione



$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\xi_{0,r}^2}{\xi_{0,i}^2} = r^2 = \left(\frac{\sqrt{\rho_2} - \sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1}}\right)^2$$

R in fase o opposizione di fase

$$T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{\rho_2 v_2 \xi_{0,t}^2}{\rho_1 v_1 \xi_{0,i}^2} = \frac{\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}} t^2 = \frac{2\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2}}{(\sqrt{\rho_2} + \sqrt{\rho_1})^2}$$

Vale R+T= 1

Nel caso limite di vincolo ($\rho_2 = \infty$) R=1 e T=0

Diffrazione delle onde

I fronti d'onda di un'onda piana quando passano attraverso una fenditura o incontrano uno spigolo vengono incurvati.
L'onda dopo l'ostacolo non ha più un fronte piano
$\Rightarrow$ l'onda si propaga nella zona d'ombra geometrica.

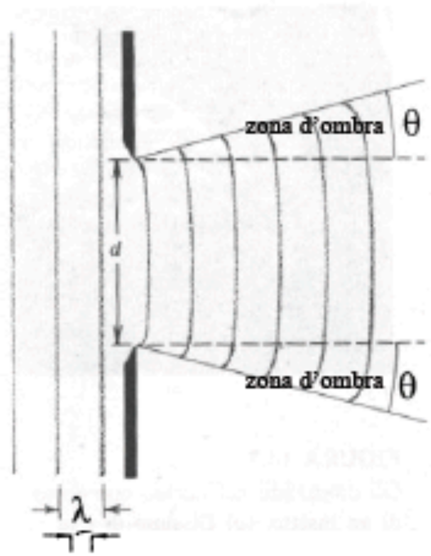
L'angolo di apertura dipende dalla larghezza della fenditura e dalla lunghezza d'onda dell'onda incidente.

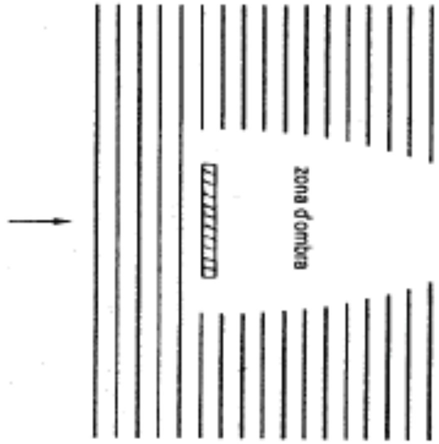
Se λ: lunghezza d'onda incidente
d: larghezza fenditura

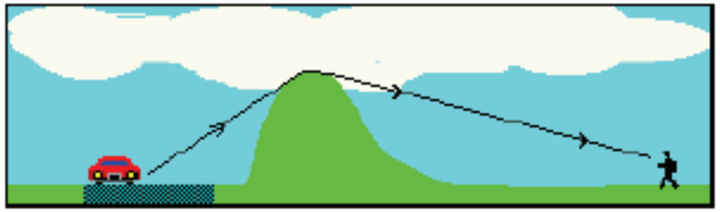
$\lambda \geq d \Rightarrow \vartheta = 90^0$, diffrazione in tutte le direzioni

$\lambda < d \Rightarrow 0 < \vartheta < 90^0$, diffrazione parziale

$\lambda << d \Rightarrow \vartheta = 0$, nessuna diffrazione







Grazie al fenomeno di diffrazione, le onde possono "aggirare gli ostacoli". Questo fenomeno è tanto più efficiente quanto maggiore la lunghezza d'onda.

tipo d'onda	**lunghezza d'onda**	**ostacolo**
suono	da 1,5 cm a 20 m	edificio, testa di una persona
onde radio	maggiore di 10 cm	colline, montagna
onde del mare	decina di metri	scoglio
luce visibile	qualche centinaio di nanometri	un essere umano
raggi X	qualche di nanometro	un elettrone