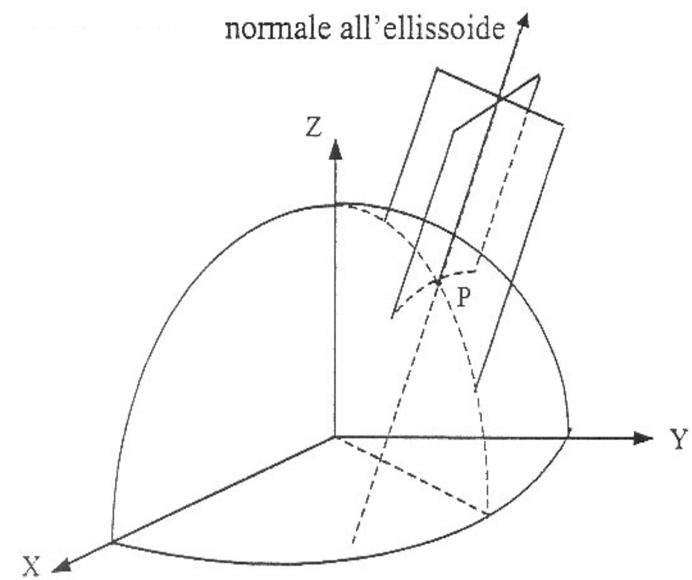
PROPRIETA’ GEOMETRICHE DELL’ELLISSOIDE

Al fine di stabilire una geometria sull’ellissoide di rotazione è necessario non solo definire le equazioni delle *curve idonee ad individuare in modo univoco la posizione relativa di punti* (meridiani e paralleli) appartenenti alla superficie stessa, ma anche conoscere *la loro curvatura*, che in generale sarà variabile da punto a punto.

Distinguiamo subito tra ***sezioni normali*** **e** ***sezioni oblique****.*

Consideriamo un punto P che giace sull'ellissoide e la sua normale: il fascio di piani che ha per costola la normale, intersecherà l'ellissoide secondo delle linee piane chiamate ***sezioni normali.***



Tutte le altre linee che si ottengono dall’intersezione dell’ellissoide con un qualsiasi fascio di piani che non contiene la normale sono chiamate ***sezioni oblique***.

- **Sono sezioni normali i meridiani**, non lo sono i paralleli
- Le sezioni normali nel punto P hanno raggi di curvatura diversi *in funzione dell'angolo che la sezione normale forma con il piano che assumiamo come riferimento.*

RAGGIO DI CURVATURA DEL PARALLELO:

Raggio di curvatura della sezione obliqua PARALLELO

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \sqrt{X^2 + Y^2} = \\ &= \frac{a}{\sqrt{\left(1 - e^2 \sin^2 \varphi\right)}} \cos \varphi = \frac{a}{W} \cos \varphi = N \cos \varphi \end{aligned}}$$

RAGGI DI CURVATURA DELLE SEZIONI NORMALI

Considerando l'insieme delle infinite sezioni normali della superficie, ottenuto dall'intersezione di tale fascio di piani con l'ellissoide di rotazione, si può verificare che i ***raggi di curvatura delle sezioni normali*** nel generico punto P considerato **variano** con continuità:

- **da un minimo ρ** (curvatura massima)
- **ad un massimo N** (curvatura minima)

*ρ e **N** sono i **raggi principali di curvatura** a cui corrispondono le **sezioni normali principali** che hanno la proprietà di essere tra loro ortogonali.*

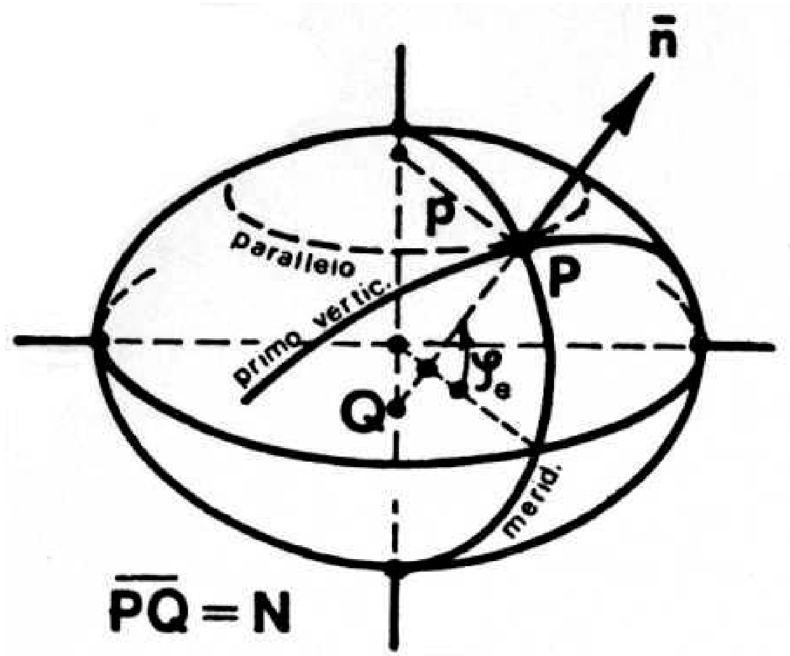
GEODESIA: RAGGI DI CURVATURA DELLE SEZIONI NORMALI PRINCIPALI

- *la* ***curva meridiana*** *di raggio* ρ ***(raggio del meridiano):***
  intersezione fra ellissoide e piano contenente la normale n e l'asse di rotazione

- *il* ***primo verticale*** *di raggio* **N** ***(gran normale):***
  la curva perpendicolare al meridiano (intersezione fra ellissoide e piano che contiene la normale n e la tangente al parallelo)

La gran normale N corrisponde al segmento di normale n compreso tra il punto P e l'intersezione Q con l'asse di rotazione Z.

Non si confonda il primo verticale con il *parallelo,* il cui piano è parallelo a quello equatoriale.



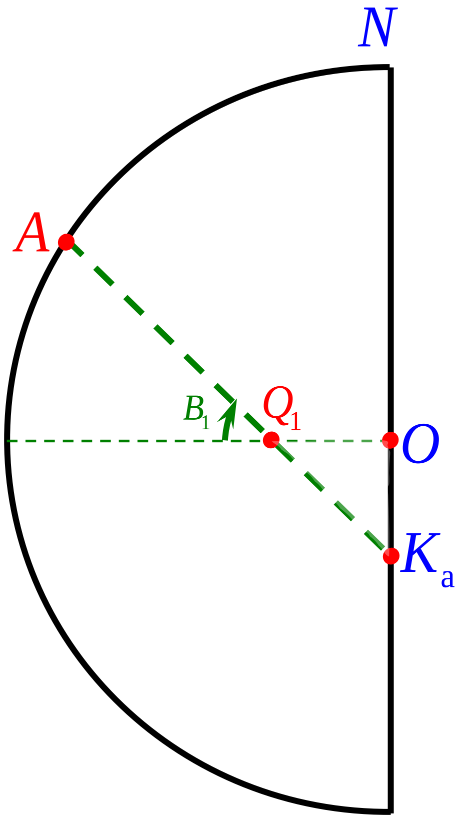
$$\boxed{AK_a = N}$$

$$\boxed{AQ_1 = N\left(1-e^2\right)}$$

$$Q_1K_a = Ne^2$$

$$OQ = Ne^2 \cos B$$

$$OK_a = Ne^2 \sin B$$



GEODESIA - RAGGI DI CURVATURA DELLE SEZIONI NORMALI PRINCIPALI

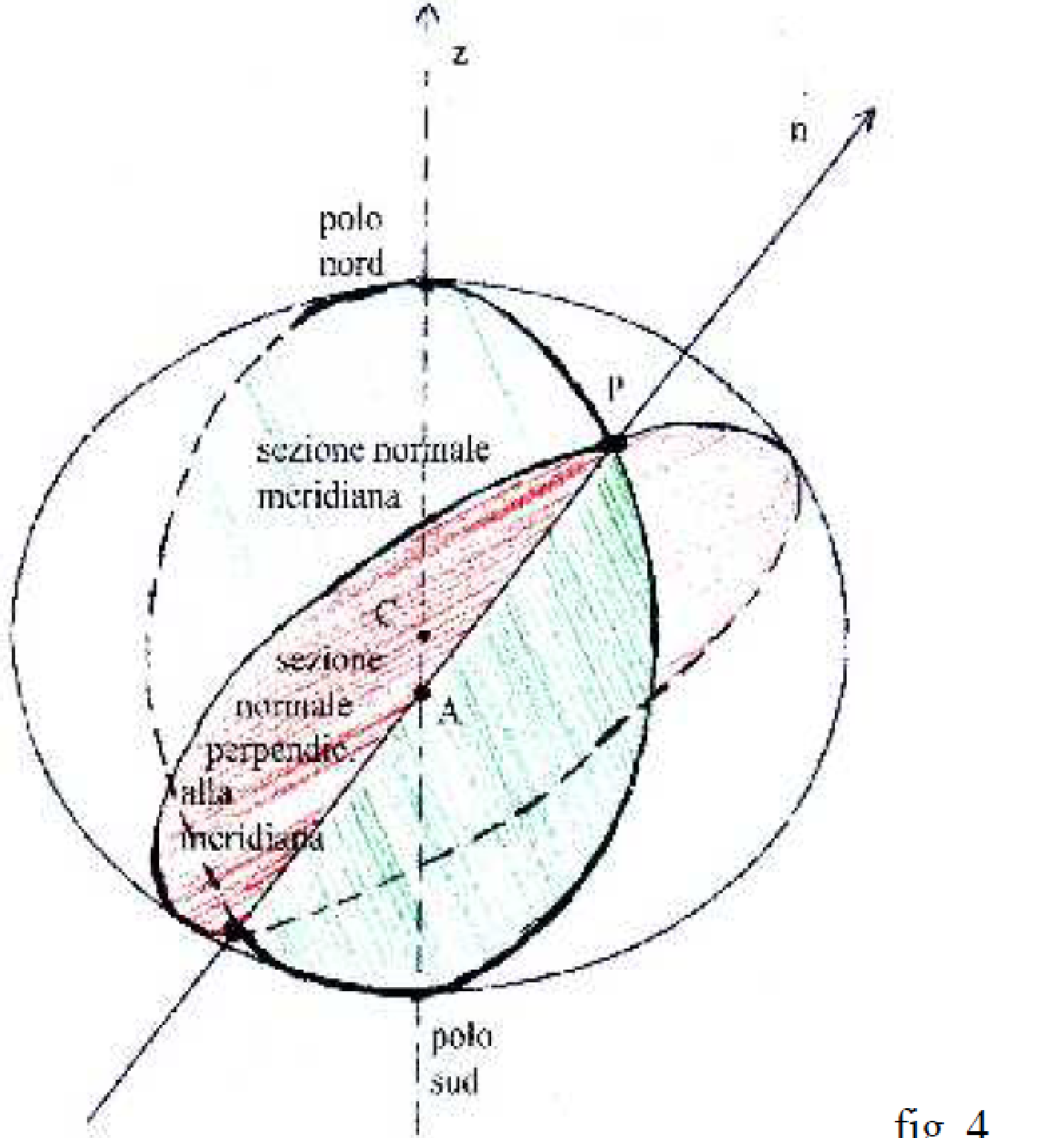


fig. 4

A = punto d’intersezione fra la normale e l’asse polare

C = origine degli assi cartesiani

GEODESIA: RAGGI DI CURVATURA DELLE SEZIONI NORMALI PRINCIPALI

Tutte le sezioni dell'ellissoide ottenute tagliandolo con dei piani che contengano la normale all'ellissoide in un punto P si chiamano sezioni normali. Nella figura 4 si sono rappresentate due delle infinite sezioni normali, le più significative per i calcoli della topografia e della geodesia. In particolare la sezione verde, che contemporaneamente contiene la normale all'ellissoide nel punto P e l'asse polare è detta sezione meridiana e il suo contorno è un meridiano, cioè un'ellisse.

La sezione rossa é perpendicolare alla sezione meridiana e contiene (come le altre infinite sezioni normali) solo la normale all'ellissoide nel punto P, il suo contorno è una curva che, come la sezione meridiana, ha raggio di curvatura diverso in ogni suo punto (il raggio di curvatura in un punto di una curva é il raggio del cerchio che in quel punto approssima la curva).

RAGGIO PRINCIPALE DI CURVATURA MINIMO:

raggio di curvatura del meridiano per P

$$\rho = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2 sen^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{W^3}\left(1-e^2\right)$$

Dove:

a rappresenta il semiasse equatoriale dell'ellissoide

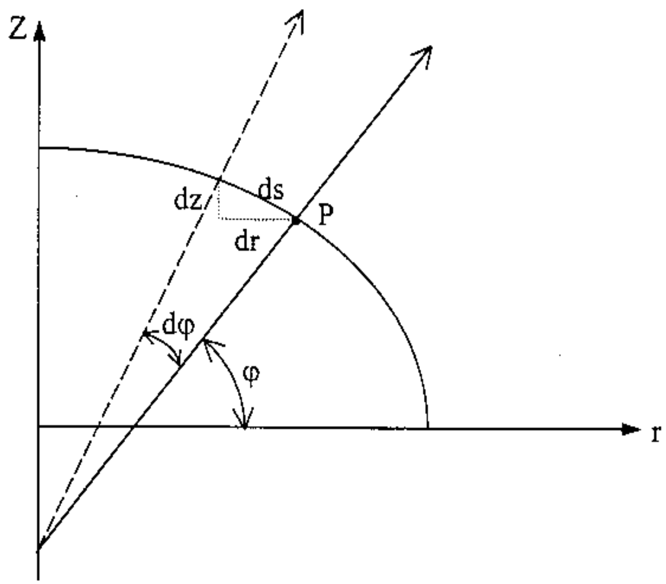
ed **e** l'eccentricità →

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

GEODESIA: RAGGI DI CURVATURA DELLE SEZIONI NORMALI PRINCIPALI – APPROFONDIMENTI

Determinazione dell'espressione del raggio di curvatura minimo → Raggio di curvatura del meridiano per P

Determiniamo le espressioni dei raggi principali di curvatura:



L'equazione ricavata in precedenza per le ellissi meridiane è:

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$$

In una curva piana il raggio di curvatura è il limite del rapporto tra un elemento di arco ds e l'angolo compreso fra le normali alla superficie condotte agli estremi del segmento ds *(→ differenza di latitudine*).

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{\sqrt{dr^2 + dZ^2}}{d\varphi}$$

GEODESIA: RAGGI DI CURVATURA DELLE SEZIONI NORMALI PRINCIPALI – APPROFONDIMENTI

Deriviamo le equazioni parametriche dell'ellissoide trovate in precedenza:

$$r = \frac{a \cdot \cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2\varphi}} \qquad Z = \frac{a \cdot \sin\varphi \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2\varphi}} \qquad W = \sqrt{1 - e^2 \cdot \sin^2\varphi}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{-a \cdot \sin\varphi \cdot W + a \cdot \cos\varphi \cdot \frac{1}{2W} \cdot 2e^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{W^2} = -\frac{a \cdot \sin\varphi \cdot W^2 - a \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi \cdot e^2}{W^3} =$$

$$= -\frac{a \cdot \sin\varphi - a \cdot \sin^3\varphi \cdot e^2 - a \cdot \cos^2\varphi \cdot \sin\varphi \cdot e^2}{W^3} = -\frac{a \cdot \sin\varphi - a \cdot \sin\varphi \cdot e^2 \cdot (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)}{W^3} =$$

$$= -\frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot \sin\varphi}{W^3}$$

$$\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{a \cdot (1 - e^2) \cdot \cos\varphi}{W^3}$$

Si ottiene quindi:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{d\varphi}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 \cdot (1 - e^2)^2 \cdot \sin^2\varphi + a^2 \cdot (1 - e^2)^2 \cdot \cos^2\varphi}{W^6}} = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W^3}$$

$$\boxed{\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W^3}}$$

Teorema di Meusnier :

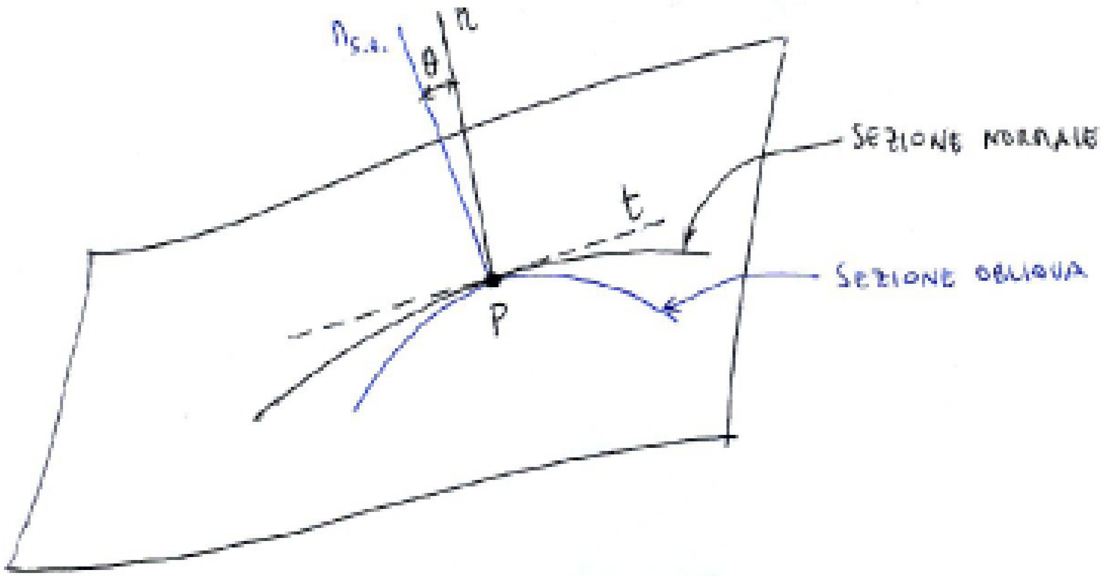
il raggio di curvatura di una sezione obliqua R_θ *(r) in un punto P, è uguale al raggio di curvatura della* *sezione normale* R_n *(N), corrispondente al piano che contiene la tangente in P alla sezione obliqua, moltiplicato per il coseno dell'angolo formato dai piani delle due sezioni* (θ).

$$R_\theta = R_n \cos\theta$$

2) *Teorema di Meusnier:*

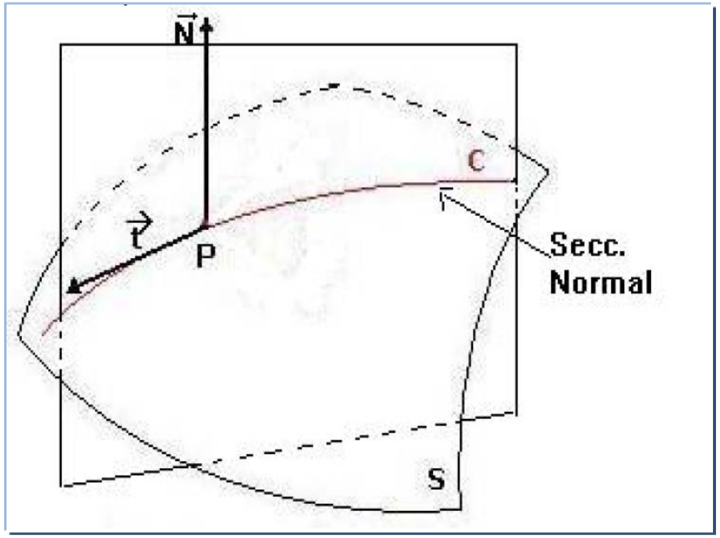
in maniera analoga, consideriamo due altre curve in un punto P:

- una **curva piana** generica (**sezione obliqua**) il cui piano formi un angolo θ con la normale alla superficie
- la **sezione normale** per P avente la stessa tangente t della sezione obliqua



4

GEODESIA: TEOREMA DI MEUSNIER



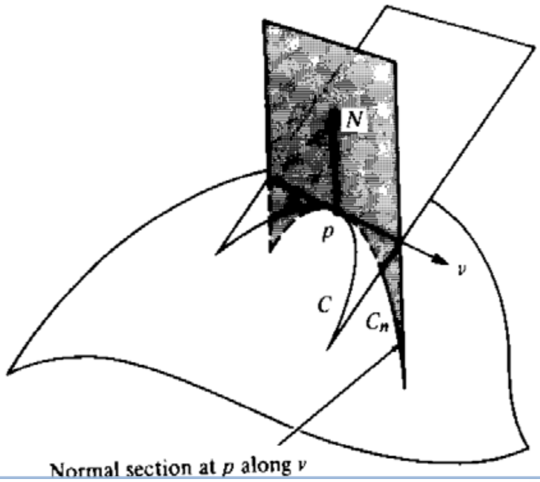
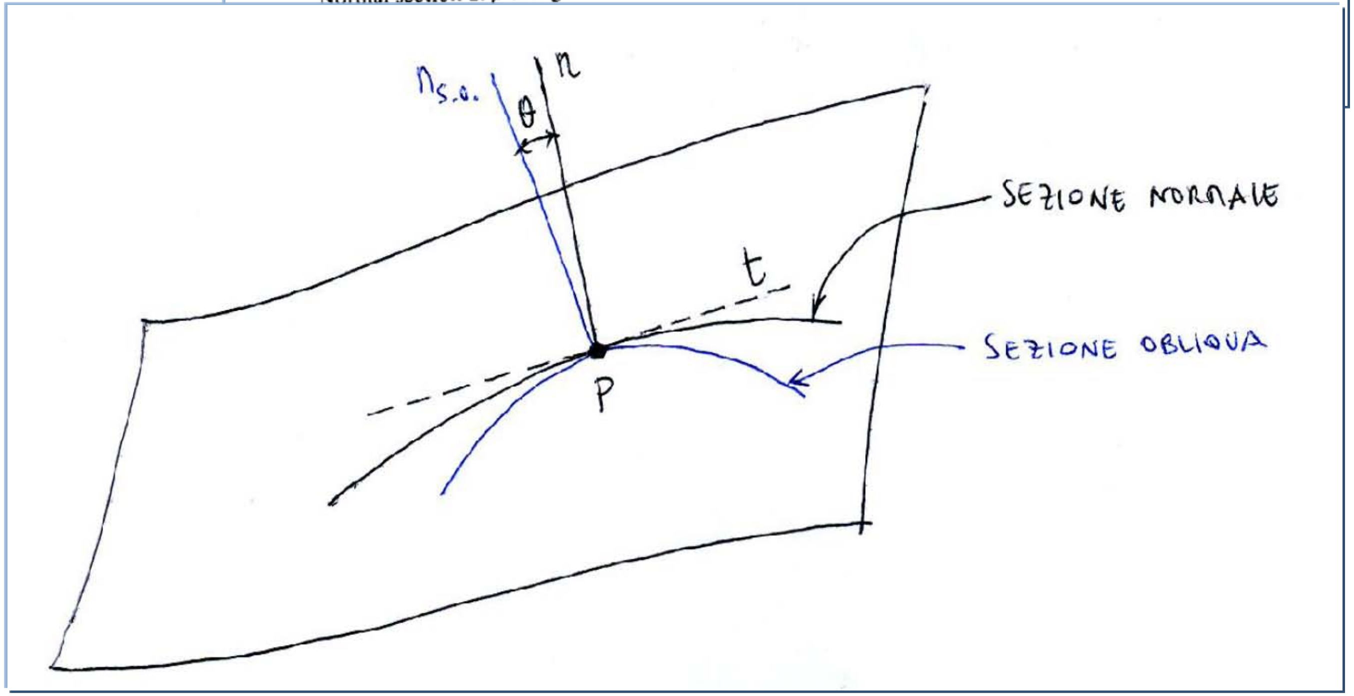


Figure 3-9. Meusnier theorem: C and C_n have the same normal curvature at p along v.



Per la sezione normale si ha $\theta = 0$, da cui $\cos\theta = 1$

Detto $R\alpha$ il raggio di curvatura della sezione normale ed R quello della sezione obliqua, si ha pertanto:

$$\frac{\cos\theta}{R} = \frac{1}{R_\alpha}$$

da cui si ottiene:

$$R = R_\alpha \cdot \cos\theta \qquad \text{(Teorema di Meusnier)}$$

Il raggio di curvatura di una sezione piana obliqua la cui normale formi con la normale alla superficie un angolo θ è pari al raggio di curvatura della sezione normale avente la stessa tangente moltiplicato per il coseno di θ

Questo teorema e quello precedente permettono di calcolare il raggio di curvatura di una curva qualsiasi (gobba) per mezzo di quello della sezione normale avente stessa tangente (molto più semplice da studiare)

RAGGIO PRINCIPALE DI CURVATURA MASSIMO:

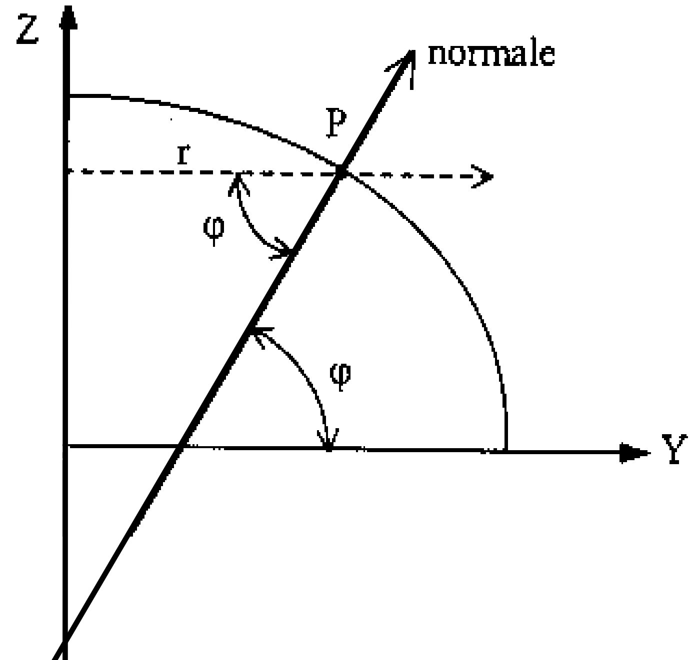
Raggio di curvatura della sezione primo verticale per P

Per il Teorema di Meusnier, pensando al parallelo per P come una sezione obliqua, ne deriva che:

$$r = N \cos\varphi$$

La gran normale N è espressa dalla seguente relazione:

$$N = \frac{r}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos\varphi} = $$
$$= \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 sen^2\varphi}} \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sen^2\varphi}} = \frac{a}{W}$$



Teorema di Meusnier :
il raggio di curvatura di una sezione obliqua R_θ(r) in un punto P, è uguale al raggio di curvatura della <u>sezione normale R_n</u> (N), <u>corrispondente al piano che contiene la tangente in P alla sezione obliqua</u>, moltiplicato per il coseno dell'angolo formato dai piani delle due sezioni (θ).

$$R_\theta = R_n \cos\theta$$

Dalle espressioni di ρ ed **N** si possono trarre le seguenti considerazioni:

$$\boxed{\rho = \frac{a\left(1-e^2\right)}{\sqrt{\left(1-e^2 sen^2\varphi\right)^3}} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{W^3}}$$

$$\boxed{N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi}} = \frac{a}{W}}$$

-**N** è sempre maggiore o uguale a ρ;

-la differenza tra i raggi principali di curvatura:

$$N-\rho = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi}} - \frac{a\left(1-e^2\right)}{\sqrt{\left(1-e^2 sen^2\varphi\right)^3}} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi}}\left(1-\frac{1-e^2}{1-e^2 sen^2\varphi}\right)$$

-è massima all'equatore (φ=0° → senφ=0);

-è nulla ai poli (φ=90° → senφ=1)

Raggio medio di curvatura

In un punto P, si definisce **raggio medio di curvatura** delle infinite sezioni normali all'ellissoide, la media geometrica tra il raggio minimo e massimo:

$$R_m = \sqrt{R_1 \cdot R_2} = \sqrt{\rho N} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2 sen^2\varphi} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W^2}$$

Risulta minimo all'equatore (φ=0) e massimo ai poli (φ=90°).

E' un parametro di grande interesse nella semplificazione delle elaborazioni analitiche geodetiche e topo-cartografiche.

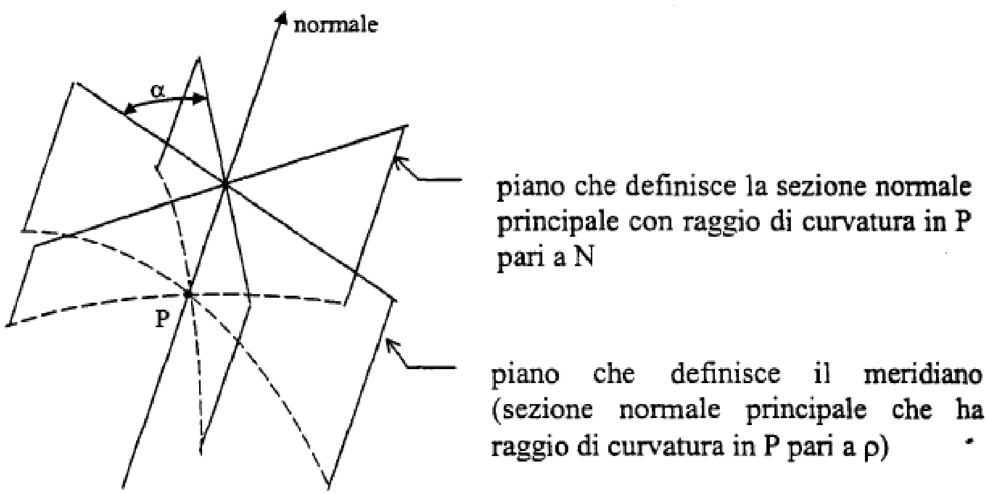
Vedremo che tale raggio R_m può considerarsi come il raggio di una sfera, detta **sfera locale**, tangente all'ellissoide nel punto P *(ha quindi la stessa normale)* e che meglio l'approssima in un intorno di circa 100 km di raggio dal punto stesso

Raggio di curvatura di una generica sezione normale

Il raggio di curvatura R_α di una generica sezione normale che forma un angolo α, (chiamato azimut) con il meridiano in funzione del raggio principale di curvatura minimo (ρ) e massimo (N), è dato dal *Teorema di Eulero*:

Teorema di Eulero

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\rho} + \frac{\sin^2\alpha}{N}$$



ESEMPIO 5:

Il vertice IGM di M.te Pagliano (1°ordine) ha coordinate su ROMA40:

lat 44° 32' 21.594'' lon -5° 00' 11.276''

$a_{Hayford} = 6378388$ $e^2_{Hayford} = 0.006722670022$

Calcolare nel punto:

1) Raggi principali di curvatura ρ, N.
2) Raggio sfera locale R.
3) Raggio del parallelo
4) Raggio di curvatura della sezione obliqua di azimut α=45° ed inclinata di β=60° rispetto alla normale.

$$\varphi = \#° + \#'/60 + \#''/3600 = 44.53933167°$$

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi} = 0.9983449875$$

GEODESIA: PROPRIETA' GEOMETRICHE DELL'ELLISSOIDE

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{W^3} = 6367068.646m \qquad N = \frac{a}{W} = 6388342.281m$$

$$R = \sqrt{\rho \cdot N} = 6378005.835m$$

$$r = N \cdot cos\varphi = 4553854.752m$$

$$\frac{1}{R_\alpha} = \frac{cos^2\alpha}{\rho} + \frac{sin^2\alpha}{N} \quad \rightarrow \quad R_\alpha = \frac{\rho \cdot N}{N \cdot cos^2\alpha + \rho \cdot sin^2\alpha} = 6377996.441m$$

$$R_\beta = R_\alpha \cdot cos\beta = 3188998.221m$$